Зборник радова Математичкоі института, Нова серија, књ. 2 (10), 1977.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 2 (10), 1977,

Symposium: Set Theory. Foundations of Mathematics, Beograd, 29. 08. — 2. 09. 1977.

LE NOUVEL ESPRIT MATHEMATIQUE

Maurice LOI

Le sujet de cette conférence tient d'abord à une question d'opportunité: je prépare un ouvrage dont le titre sera d'ailleurs celui de la conférence d'aujourd'hui, qui rappelle tout ce qu'elle devra à l'oeuvre de Gaston Bachelard en épistémologie, et il me sera particulièrement utile d'avoir votre opinion sur les quelques idées que exposer devant vous.

Ces idées sont à l'origine du Séminaire de philosophie et mathématiques. Elles ont leur source dans les travaux d'Albert Lautman, qui viennent d'être réédités par les Editions 10/18 à Paris, et dans la constatation que l'enseignement, la philosophie et la culture méconnaissent le véritable esprit des mathématiques contemporaines, dont je voudrais montrer la liaison avec l'heuristique. Même lorsque les programmes ont été modifiés dans les écoles, même quand les notions nouvelles y ont été introduites, l'ancien epsrit dogmatique et sclérosé règne toujours, oubliant la dynamique de la science. La vie des concepts est ignorée et pour donner du mouvement à des notions mortes on a recours à l'agitation enfantine, à du bricolage, des exercices et des problèmes destinés à faire "sécher" les élèves parce que les outiles nécessaires à leur résolution ne leur sont pas toujours donnés, ce qui leurs impose des complications stupides. A l'opposé on encombre l'apprentissage de notions simples et nécessaires de considérations pédantes et inutiles à ce niveau. C'est une conception dépassée des mathématiques qui domine cette pédagogie ou rigueur et créativité sont trop souvent opposées, alors que l'accroissement de la rigueur mathématique et les recherches logiques ont permis d'augmenter de façon considérable les moyens d'invention de l'esprit humain dans tous les domaines, comme je m'efforcerai de le montrer au cours de cette conférence. Et c'est une autre raison de cette conférence; le mépris contemporain de trop de personnes pour la déduction et la rigueur, le "déductivisme" disent-ils d'un ton méprisant. Or les conquêtes essentielles de la science ont été obtenues avec l'intervention dominante de la déduction. L'impossibilité d'y arriver par le moyen de simples inductions basées sur l'observation directe avait été reconnue par Galilée lui-même comme je le rappellerai tout à l'heure. Or l'a priori est devenu signe da l'arbitraire, du conventionnel et Poincaré n'a pas peu contribué à répandre cette idée. La science expérimentale équivaut alors à la science objective. Bien sûr, il y a eu un usage abusif de la déduction au Moyen-Age,e aboutissant à des théories mystiques ou fantastiques, mais les alchimistes ont bien usé aussi de la méthode expérimentale. Ces médisances contre la raison humaine ne doivent pas nous faire oublier la fécondité de la déduction, qui n'est stérile qu'entre les mains des ignares. En fait, elle constitue souvent un moyen bien plus efficace et plus sûr de recherche que l'expérience ou l'observation directe. Mieux: sans elle la science ne peut pas se constituer. Même dans l'étude des phénomènes sociaux, les plus hardis inventeurs et constructeurs de plans de réformes et les critiques les plus impitoyables des théories justificatrices des institutions et des règles sociales effectivement existantes, sont précisément ceux qui se distinguent par une plus grande tendance à l'usage de la déduction, par exemple Rousseau et Marx. Or ce mépris et cette ignorance de la déduction ne permettent pas de juger correctement les mathématiques, qu'on réduit à quelques recettes ou procédés de calcul sans portée au delà des exercices et des problèmes d'examens et de concours. Il est vrai que la société de consommation les utilise comme moyen de sélection pour recruter ses cadres. Mais les mathématiques ont quand-même un autre intérêt et c'est la société qu'il faut changer.

I. L'essor des Mathématiques et leur valeur Invéntive

Les mathématiques, malgré leur ancienneté, connaissent de nos jours un essor impétueux et accéléré dont il est possible à un profane d'apprécier l'ampleur en consultant la circulaire mensuelle de la *SMF* donnant le programme des séminaires, colloques, congrès, en visitant une bibliothèque spécialisée; en feuilletant un numéro de *Mathematical Review*, de *Current mathematical Publications* ou encore de *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*. On sera impressionné par le nombre de problèmes résolus et la variété des résultats obtenus, par la floraison de théories audacieuses, par la quantité de livres et de publications divers. Jean Dieudonné a pu écrire: "On peut dire sans exagération qu'il y a eu plus de problèmes mathématiques fondamentaux résolus depuis 1940 que de Thalès à 1940"* L'âge d'or, qui a commencé pour les mathématiques au début du XIXe siècle, n'est pas prêt de finir. Cette première constatation prouve l'activité créatrice de l'esprit humain en mathématique pour élaborer des méthodes et des théories nouvelles permettant de résoudre des problèmes posés depuis longtemps, théories nouvelles qui font naître inversement l'idée de problèmes nouveaux, lesquels ne pouvaient être formulés abstraitement auparavant. Le degré d'abstraction de plus en plus poussé des mathématiques ne les empêche pas — au contraire, pourrait-on dire — d'être utilisées dans des secteurs les plus divers, ou ce sont parfois les théories et les idées les plus récentes et les plus élaborées qui se révèlent les plus nécessaires. Ainsi Einstein eut besoin au début du siècle de la théorie des groupes, de la géométrie riemanienne et du calcul tensoriel pour élaborer sa théorie de la Relativité. Ce faisant il ne procédait pas du tout à la façon dont l'imaginent encore en 1977 trop de personnes, utilisant un langage, un simple moyen d'expression pour une idée déjà existante. Grâce aux mathématiques formelles les plus élaborées et les plus éloignées de l'expérience, des notions aussi fondamentales que l'espace et le temps, dont Kant avait fait des absolus, furent bouleversés. Des conclusions étonnantes, telles que celles de l'équivalence de la masse et de l'énergie ont été obtenues comme des conséquences mathématiques du principe d'invariance par les transformations de Lorentz de toutes les équations gouvernant les phénomènes physiques. Le point de vue du mathématicien triomphe de celui des empiristes.

* Es *ai sur l'unité des mathématiques*, par Albert Lautman, p.20 note 2.

Conséquence ce qui n'a pas assez retenu l'attention des philosophes, ni medifié notre culture colporteuse d'idées surrannées.

Aussi, trop souvent, n'estime-t-on pas à sa juste valeur le rôle des mathématiques dans la pensée scientifique. Or désormais elle est tout entière présente dans son effort mathématique, ou, pour mieux dire, c'est l'effort mathématique qui forme l'axe de la découverte. C'est l'expression algébrique qui seule, souvent, permet de penser le phénomène, comme si l'esprit acquerrait des facultés nouvelles en la maniant, rendant possible le mouvement spirituel de découverte. Je pourrais citer d'autres exemples analogues de la physique: algèbre stellaire, géométrie symplectique, théorie des groupes etc, ou des sciences biologiques ou humaines, qui montreraient le rôle heuristique des mathématiques dans l'oeuvre de théorisation, de réflexion et de définition des concepts. C'est le premier aspect essentiel du Nouvel esprit mathématique d'être une source d'idées qui permettent la compréhension et la maîtrise des phénomènes comme l'avait rêvé Descartes dans sa philosophie pratique et conquérante : saisir l'intelligence des choses à partir de leurs vrais principes qui donnent la lumière intellectuelle, telle est la véritable mathématique, où il n'opposait pas induction et déduction comme le font certains de nos contemporains, qui voient dans l'induction la source unique des inventions et considèrent la "sèche" déduction comme un simple moyen de preuve et d'exposition de résultats déjà trouvés. Or la conquête de vérités importantes ne peut être effectuée par la simple observation passive, mais exige l'exercice d'activités mentales bien plus élevées et compliquées. Dans la plupart des cas les expériences sont de simples vérifications de conclusions auxquelles les expérimentateurs sont déjà arrivées indépendamment d'elles: "Je fus d'abord persuadé par la raison avant d'être assuré par les sens" écrivait Galilée (*Dialogue* des grands systèmes, seconde journée). Pasteur, deux siècles plus tard, a justement défini l'expérimentation comme une observation guidée par des idées préconçues, c'est-à-dire, en d'autres termes, une observation précédée et accompagnée de procédés déductifs.

Un précurseur : Descartes.

Descartes avait le souci d'une logique féconde qui serve non seulement à exposer mais à découvrir. Les mathématiques l'ont justement séduit par l'évidence de leurs raisons et l'enchaînement de leurs conclusions. Elles lui ont donné ses idées-clés : toute vérité est un degré, auquel on accède en partant du précédent et qui lui donne lui-même un accès du suivant. Aux touts perçus par l'intuition il faut désormais substituer des composés artificiels, fabriqués par nous et dont par conséquent la structure et tous les éléments nous sont exactement connus. Ainsi la science, au lieu d'être, comme le croyaient les anciens une contemplation d'objets idéaux, se présentera désormais comme une création de l'esprit, une composition synthétique. La tâche essentielle du savant sera, par conséquent, non pas d'apporter une nombreuse collection de résultats, mais de mettre sur pied de bons instruments de combinaison, de constituer une méthode puissante et efficace. Les voies de la synthèse algébrique sont ouvertes. Tel est précisément le but que Descartes se propose avant toute chose. La physionomie nouvelle que va prendre la science, c'est la géométrie qui la définit, qui la commente, et en donne en même temps une vision concrète : par l'algèbre, une algèbre nouvelle il est vrai, clarifiée et perfectionnée, il est possible de résoudre les problèmes relatifs aux grandeurs et auf figures en suivant une voie sûre et régulière. La sûreté, la régularité de la méthode ; voilà ce qui est essentiel aux yeus de Descartes, voilà ce qui doit distinguer la science moderne de la géométrie ancienne, ce champ clos ou les virtuoses de la démonstration pouvaient seul se mouvoir et accomplir leurs prouesses. C'est en ce sens que Descartes est un précurseur du Nouvel esprit mathématique et pour ainsi dire de Bourbaki: l'algèbre pour lui n'est pas un recueil de résultats, c'est une technique, c'est une méthode de combinaison et de construction. Par le simple jeu du mécanisme algébrique nous faisons surgir un monde géométrique illimité que ne nous aurait jamais révélé l'intuition directe de la figure. En réhabilitant le calcul délaissé par les Grecs au profit de la géométrie, Descartes prépare la route pour la mathématique formelle. Tous les scrupules des géomètres grecs touchant la définition des courbes s'évanouissent, et les détours qu'ils employaient pour y échapper perdent leur raison d'être. La théorie de la construction géométrique devient inutile ainsi remplacées par cette synthèse créatrice, autrement féconde qu'elle.

II. Le rôle central du concept de fonction.

Sous le vêtement de la notion de courbe apparaît (bien sûr il faudra attendre la fin du XVIIe siècle pour que le mot apparaisse et que l'idée soit précisée) la notion générale de fonction grosse de toutes les questions qui bientôt surgiront à sa suite. Cette notion n'a pas seulement constitué un perfectionnement des mathématiques, elle a marqué un changement radical dans leur orientation, qui n'est pas toujours apprécié comme il convient malgré ses nombreuses conséquences et applications pratiques.

L'intérêt philosophique de cette découverte a été apprécié par la suite par quelques philosophes tels que Hegel ,Marx et Engels: le passage de la pensée de Parménide à la pensée d'Héraclite. Hegel nota dans la *Phénoménologie de l'esprit* que la tâche pédagogique moderne est en quelque sorte inverse de la tâche pédagogique antique, qu'il faut maintenant rendre fluides ces déterminabilités. Telle est la tâche qu'il se proposera dans sa *Logique*. Selon Parménide tout être intelligible par la raison doit être considéré comme invariable tandis que selon Héraclite c'est le changement qui est la loi dominante de l'univers. La constitution de la mathématique grecque marqua le triomphe de Parménide: la philosophie d'Héraclite ne laissant place à aucune fixité, elle aurait abouti à nier la valeur de la mathématique et empêché le développement de la science. Bien sûr la pensée grecque est bien plus complexe que cette schématisation peut le laisser croire. Platon, par exemple, fut tout autant fasciné par Héraclite que par Parménide, mais il appelle dialectique ce qui sera appelé plus tard métaphysique. Car Platon avait déjà une conception riche et souple de la raison, qui savait s'inspirer des découvertes de la science. Aussi n'est-ce pas un hasard si Albert Lautman fit si souvent référence à Platon lorsque vers les années trente du XXe siècle il voulut élaborer une philosophie mathématique. Tel fut aussi l'effort de Brunschwig et de Bachelard. Mais au XVIIe siècle Pascal opposait encore esprit de géométrie et esprit de finesse alors que le mathématicien moderne use autant de l'un et de l'autre. Une constatation doit être soulignée: le dogmatisme fut d'abord surmonté dans la science. Voilà une leçon dont Bachelard sut tenir compte mais que bien des philosophes contemporains devraient méditer.

Quelle fut l'importance de ce tournant dans la pensée mathématique?

Pour la science grecque tout problème se ramenait à la recherche d'un ou plusieurs nombres, déterminées d'une manière complète quoique implicite, par les données de la question. Manifeste en ce qui concerne les problèmes d'arithmétique, cela n'était pas moins certain dans le domaine géométrique, puisque les figures considérées pas les Anciens (points, droites, plans, cercles etc.) dépendaient chacune d'un nombre fini et même peu élevé de paramètres. Etudier les relations entre certains nombres laissées invariables dans tout le cours du raisonnement ainsi que la manière d'utiliser ces relations pour calculer quelques-uns d'entre eux, les autres érant supposés donnés, voilà ce que se sont proposé mathématiciens jusqu'au XVIIe siècle.

D'Eudoxe et Archimède à Leibniz et Newton.

Eudoxe et Archimède furent des exceptions et n'eurent pas de successeurs directs. Le cadre de la géométrie antique ne fut réellement dépassé et une arme nouvelle donnée à la science que lorsqu'on considéra la variation continue de certains éléments numériques ou géométriques — ce qui revient au même. — liés les uns aux autres et ainsi furent jetées les bases de l'édifice que devaient achever Newton et Leibniz.

Mais ce stade devait être bientôt dépassé. Il ne consituait que le début d'une évolution qui n'a cessé par la suite de se poursuivre dans le même sens et elle se continue encore à l'heure actuelle. Lorsque les notions nouvelles déduites de celles de fonction furent appliquées à la physique et eurent montré la légitimité de ce nouveau point de vue, que le calcul infinitésimal permettait pour la première fois d'aborder: il n'était plus possible à la science de le laisser de côté. Dès que l'on commença à s'attaquer au mouvement, à capter l'invisible c'est-à-dire le changement — ce qui n'avait pas été possible avant qu'on disposât des instruments mathématiques adéquats — et à mettre ses lois à la base de la physique, il apparut que dans l'étude de la nature on ne pouvait continuer à considérer comme seule individualité, comme seul objet de recherches, le nombre déterminé ou ses équivalents géométriques (point, droite, cercle etc.) L'être mathématique, en un mot, ne fut plus le nombre: ce fut la loi de variation, la fonction, qui devint le centre autour duquel s'organise la science. La mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes, elle était transformée dans son objet et dans ses fondements.

La transformation ne fut pas totale du premier coup. L'Analyse ne fit pas d'un seul coup le saut qu'elle allait être obligée de faire et garda un pied sur la rive qu'elle devait quitter. C'est seulement au XIXe siècle avec Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann, que la notion de fonction prit son sens moderne et toute sa portée: une fonction $y=f(x)$ ne s'obtient plus nécessairement par un certain nombre d'opérations prises dans une liste déterminée quelle qu'elle soit. C'est une correspondance quelconque établie entre chaque valeur attribuée à x et une valeur y, supposée seulement déterminée dès que la première est donnée, mais sans qu'on s'astreigne à employer pour cela tels ou tels modes de détermination plutôt que d'autres.

La nouvelle tendance dialectique de la science et l'unité des mathématiques.

Cette fois la novelle tendance de la science ne pouvait pas manquer de prendre conscience d'elle-même. Définir une fonction arbitraire, c'est définir sa valeur pour chaque valeur de x; si cette fonction est supposée représentés par une ligne, cette ligne est, elle aussi, quelconque, et n'est déterminée que lorsqu'on connaît chaque point. La connaissance de la fonction ou de la courbe équivaut donc non plus à celle de certains nombres mais à celle d'une infinité de nombres. Et c'est encore sous cette forme que se posaient les nouveaux problèmes, où aucune image simple ne s'offrait plus à l'esprit. L'intuition géométrique ne pouvait plus rien nous apprendre. Pour remédier à cette ignorance, la raison ne pouvait le faire qu'analytiquement: il fallait créer et développer la Théorie des ensembles. Bien sûr il faudrait, dans le même ordre d'idées, parler du calcul des variations, des équations différentielles et intégrales, du calcul fonctionnel, de la théorie du potentiel et de bien d'autres choses pour montrer pourquoi le concept de fonction marque bien le début d'une ère nouvelle et qu'il en est le noeud essentiel. Si je me suis attardé quelque peu sur cette notion fondamentale qui a ouvert des portes nouvelles à la pensée, c'est parce que dans l'enseignement, en France du moins, elle a été quelque peu obscurcie par un engoument exagéré et naïf en faveur du concept d'ensemble ou de relation. Bien sûr on a dit et répété: "la mathématique moderne est la science des relations" en oubliant de préciser que la relation fondamentale de base de l'édifice, reste la fonction. Russell l'a bien vu, qui lui fait jouer le rôle essentiel dans *The Principles of Mathematics*, ou un chapitre est consacré aussi à la notion de variable, une des notions essentielles de la nouvelle mathématique. Mais comme l'écrivit Hermann Weyl en 1949: "Nul ne peut dire ce qu'est une variable"*. Elle n'atteint quelque précision qu'avec le développement de la théorie des ensembles et des mathématiqnes. Birkoff et Mac Lane proclament, eux, le mot d'ordre: "tout est fonction" dans leur traité d'algèbre. Il s'agit alors du concept pris dans toute son ampleur qui est omniprésent en science et non sous sa forme la plus pauvre, comme dans trop de manuels d'enseignement.

Non seulement le concept de fonction fut à l'origine des travaux de Cantor et il devient le véritable objet du calcul fonctionnel exactement au même titre qu'un point ou un nombre, mais il peut être pris comme notion fondamentale et primitive pour exprimer les propriétés de certains ensembles sans faire appel aux éléments. C'est lui qui sous des noms divers: application, homomorphisme, homéomorphisme morphisme, isomorphisme, transformation, correspondance interprétation, représentation, opérateur, foncteur etc. est si souvent utilisé. Ces divers synonymes suggèrent une activité féconde tissant l'unité profonde des mathématiques, parce qu'elle a pour but de révéler des rapports qui illuminent les données. Elle est devenue la clé de voûte de l'évidence et avait déjà retenu l'attention au XIXe siècle de mathématiciens comme Lejeune-Dirichlet et Dedekind. Le premier écrivait: "Il arrive très souvent en mathématiques ou dans les autres sciences que si un système d'objets ou d'éléments ω est donné, chanque élément ω déterminé soit remplacé d'après une certaine loi par un élément déterminé ω' correspondant à ω". On a l'habitude d'appeler substitution un tel acte et on dit que ω' est le transformé de ω par cette substitution et Ω, lequel est constitué par les ω' le transformé de Ω. Il est encore plus commode de dire, comme nous le ferons, que cette substitution est une application de Ω, que ω' est l'image de ω et Ω' l'image de Ω'. Dedekind ajoute en note: "C'est dans cette capacité de l'esprit de comparer un object ω avec un objet ω', ou de mettre ω et ω' en relation, ou de faire correspondre à ω un ω', capacité sans laquelle il n'y aurait tout simplement pas de pensée, que repose aussi, comme je le montrerai ailleurs, toute l'arithmétique." L'idée de la définition de l'application dans 'Zahlen' remonte en effet à Dirichlet: "Par une application f d'un ensemble S j'entends une loi qui attache à chaque élément déterminé s de S un objet déterminé qui s'appellera l'image de s"**

* Philosophy of Mathematics and Natural Science

** Zahlentheorie hrsg. von R. Dedekind, 1879 — 163 pp 469—70 cité par J. Largeault: Logique et philosophie de Frege p. 418.

Clifford à son tour attira l'attention sur le rôle crucial du concept de fonction: "La mise sur pied d'une correspondance entre deux ensembles et la recherche des propriétés qui se conservent au cours de cette correspondance, peut être considérée comme l'idée centrale des mathématiques modernes: on la retrouve à travers toute la science pure et ses applications."*

III. La fin du dogmatisme et les limites de Descartes

Après avoir souligné les grands mérites de l'épistémologie cartésienne, il est nécessaire d'en tracer les limites précises et de souligner ce qu'elle peut contenir de périmé en 1977. A ce sujet je peux suivre presque à la lettre le dernier chapitre du *Nouvel Esprit scientifique* de Gaston Bachelard.

Tout d'abord le dogmatisme de la méthode, qui fut notons-le quelquefois le fait des cartésiens plutôt que de Descartes lui-même, devient un frein pour la connaissance. Les complications inutiles qui se rencontrent dans beaucoup de résultats classiques sont justement dues à l'emploi de méthodes qui n'ont rien à voir avec le résultat escompté, de méthodes n'admettant pas, en général, le même groupe de transformations que le résultat. L'importance accordée à l'intuition, au simple: à l'évidence et aux idées innées ne convient plus du tout à la science moderne où même des notions comme celles d'espace et de temps sont bouleversése, pas plus que le hautain mépris pour la logique formalle. Leibniz serait un meilleur guide, comme l'a noté Bourbaki.

L'intuition cartésienne, certes, est l'intuition intellectuelle, l'aperception du rapport logique de principe à conséquence, tandis que Kant n'admettra plus d'autre intuition que l'intuition sensible et repoussera avec force l'intuition intellectuelle qui est pour lui le vice fondamental de toutes les métaphysiques antérieures, y compris la métaphysique cartésienne. Sortir du sommeil dogmatique était certainement indispensable, comme l'a écrit Kant, mais il ne fallait pas oublier que sans stabilité il n'y a plus de science: "Donne-moi un endroit où se tenir ferme et j'ébranlerai le monde" notait déjà Aristote. La pensée scientifique détermine dans l'univers changeant les points fixes, les pôles inamovibles et s'en sert comme de repères. Une des premières démarches de l'esprit humain fut de découvrir sous le devenir, ou au-dessus, des permanènces. De là sont nés les problèmes de la substance, de l'essence, de la forme, de l'être, de l'existence, de la vérité, sur lesquels méditèrent les métaphysiciens mais qui furent aussi au centre de l'activité mathématique, activité d'où surgirent de nouvelles manières de penser et l'esprit acquit des capacités insoupçonnées. En grec le terme même d'"épistêmê" est étymologiquement dérivé d'une racine signifiant "fermeté" et "stabilité". Ainsi le changement a-t-il été d'abord considéré comme une dégradation et non pas comme un progrès. La méthode scientifique conduit à un équilibre stable, à la stabilisation et à la consolidation du monde des perceptions et des pensées, sans lesquels le changement ne peut être maîtrisé. Le cas des mathématiques est exemplaire: la géométrie est l'étude des propriétés invariantes dans un déplacement ou quelquefois dans une similitude. Depuis Klein et Sophus Lie une géométrie est désormais l'étude des propriétés invariantes d'un groupe de transformations, la topologie est une géométrie dont le groupe est celui des homéomorphismes etc. Klein a, en effet, montré avec beaucoup de force que le plus important pour une géométrie n'est pas la nature

---

* Cité par Jean-Claude Pont dans la Topologie algébrique p. 121 (Mathematical papers pp 334-5).

des points qu'elle étudie, mais la structure du groupes de transformaticns qui y définit l'égalité des deux figures. Il faudrait citer aussi la théorie des invariants algébriques dont l'intérêt retient encore l'attention des mathématiciens, la théorie de la relativité en physique théorique où l'essentiel ce sont les absolus, les invariants.

Tout changement d'ailleurs n'est pas forcément un progrès, mais l'esprit a besoin d'une certaine tension pour progresser. Une féconde bipolarité lui est indispensable. Et c'est un mathématicien qui le note, Jean Dieudonné, dans son avantpropos à l'oeuvre d'Albert Lautman (p.17): Tant il est vrai que le grand laboratoire des idées, c'est désormais au sein de la science qu'il se trouve. On peut dire que les vrais savants sont à la pointe de la culture et de l'innovation. Malheureusement la philosophie contemporaine non seulement n'est plus l'antichambre de la science, mais elle ignore la science contemporaine dont elle se fait une conception dogmatique, et Bachelard est une exception. Pourtaint les Grecs avaient déjà très bien saisi la nécessité de cette tension de l'esprit. Lorsqu'un problème était résolu Platon "tenait la blessure ouverte" et se refusait à "cacher derrière un mot la difficulté du concept". Aristote affirmait que la science commence avec l'étonnement. Mais la mode en 1977, où tout un chacun se réclame pourtant de la science, n'est plus à l'étonnement. Tout est présenté comme allant de soi, naturel, facile, à l'aide d'une philosophie paresseuse qui est la négation de la véritable culture. Celle-ci ne peut ignorer l'extraordinaire essor des mathématiques, où nous voyons à l' oeuvre l'effort de la raison et le triomphe de l'intelligence. Il n'est plus possible d'immobiliser la perspective de la clarté intellectuelle, d'imaginer que le plan des pensées les plus claires se présente toujours le premier, que ce plan doit rester le plan de référence et que toutes les autres recherches s'ordonnent à partir du plan de la clarté primitive. Le simple est une conquête et non plus une donnée ou un point de départ.

L'ideal de complexité.

Le temps cartésien des natures simples et absolues est révolu. On pourrait dire que c'est un idéal de complexité qui anime la science contemporaine, ou plutôt il s'est établi un véritable chassé-croisé du simple au complexe et inversement. "Il n'y a pas de route royale pour la science" disait le mathématicien grec Ménechme, l'un des précepteurs d'Alexandre le Grand, qui remplaça l'incomparable Eudoxe précurseur des mathématiques modernes. Les mathématiques sont abstruses et difficiles et toute assertion qu'elles sont simples n'est vraie que pour les initiés ou les pseudo-pédagogues à la suite de Piaget. Mais on paye cher cette facilité, cette confiance dans l'acquis et le spontané, ce repos dans les idées reçues.

Tout le problème de l'intuition se trouve bouleversé. Des concepts aussi primitifs que "point", "droite", "plan", "espace", "nombre", etc ont été enrichis à tel point qu'ils présentent maintenant de multiples facettes. Ils se sont complexifiés en s'enrichissant. Une telle variété d'aspects exige qu'on en finisse avec la stupide raideur dont font preuve trop d'enseignants ou de formateurs d'enseignants, qui soutiennent encore qu'un concept doit être noté d'une seule et unique façon partout et toujours sous peine d'ambiguîté Ils ne voient pas que c'est précisément le choix du bon formalisme, du langage adéquat au but poursuivi, à la solution d'un problème out tout simplement à l'énoncé précis et rigoureux de ce problème qui est devenu la caractéristique de la pensée mathématique contemporaine, de son intelligence et de sa souplesse. On saisit mieux pourquoi les mathématiciens accordent tant d'importance non seulement au résultat mais aussi au style et à l'élégance, pourquoi la "beauté", c'est-à-dire l'exacte concordance entre les moyens mis en oeuvre et les fins à atteindre, occupe une telle place dans les motivations profondes des mathématiciens. Si les rapports entre la pensée et le langage mathématique étaient aussi rigides que les ignorants le prétendent, tout le monde ferait et écrirait des mathématiques de la même façon uniforme. Ce n'est heureusement pas le cas!

La conscience claire du sens axiomatique des principes mathématiques doit être acquise pour bien dessiner le simple après une étude approfondie du complexe. La liste des axiomes dans la géométrie plane axiomatique de Hilbert n'est pas seulement plus complète que celle d'Euclide: ils correspondent désormais à un point de vue diamétralement opposé au point de vue constructif. En effet, au lieu de définir les points, droites etc. à partir d'autres notions pour en déduire ensuite leurs propriétés, elle laisse la nature de ces objets complètement indéterminées se contentant d'énoncer leurs propriétés fondamentales, qualifiées 'axiomes'. Et l'exemple de l'axiomatique de Hilbert ne devait pas resté isolé. En particulier l'Algèbre allait de cette façon se constituer d'une manière autonome. Le style des écrits mathématiques en fut profondément modifié comme l'a noté Claude Chevalley dans un article de la *Revue de Métaphysique et de Morale* en 1935: "Ce souci d'exacte adéquation des méthodes remet en honneur, tout en lui donnant un sens précis, la recherche de l'élégance des démonstrations, quelque peu négligée par les géomètres de l'école précédente" (p.382).

Pour être utile l'intuition doit être savante et rationnelle, sinon elle est 'un obstacle épistémologique', comme aimait à dire Bachelard, et non plus une aide. En particulier la suprématie de la géométrie euclidienne ne saurait être plus légitime que la suprématie du groupe des déplacements. En fait ce groupe est relativement pauvre; il a cédé la place à des groupes plus riches, plus aptes à décrire rationnellement l'expérience fine. On comprend alors l'abandon total de l'opinon de Poincaré relative à la commodité suprême de la géométrie euclidienne. Cette opinion est plus qu'une erreur partielle et l'on trouve à méditer plus qu'un conseil de prudence dans les prévisions du destin de la raison humaine. En la rectifiant on aboutit à une véritable révolution dans le domaine rationnel et l'on apprécie mieux le rôle créateur de l'esprit mathématique. L'idée est communément admise en génétique aujourd'hui que l'évolution biologique dans l'espèce humaine s'est considérablement ralentie et a été relayée par une évolution culturelle*. Dans la formation de l'intelligence, les mathématiques ont certainement occupé une place centrale pour en former la charpente. Valéry dit quelque part dans Eupalinos: "Les nombres ont été les premiers mots."

Mathématiques et philosophie

Mais les philosophes en 1977 s'occupent de tout: politique, linguistique, histoire, sociologie, économie, psychologie, psychanalyse, archéologie du sexe, arts, statut de la philosphie etc, mais ils ignorent souvent les mathématiques, riches pourtant d'idées philosophiques. Il est vrai que les mathématiciens le leur rendent bien en méprisant la philosophie comme une vaine spéculation sans intérêt, qui a perdu sa source principale et le terrain privilégié où naissent les problèmes es-

* Voir à ce sujet Atlan N (1975) *Variabilité des cultures et riabilité génétique. Ann. genet.* 18, n. 3 149—152.

sentiels de la connaissance. Car la mathématique et la philosophie sont nées ensemble en Grèce: Thalès est considéré comme le créateur des mathématiques, du moins au sens où nous l'entendons c'est-à-dire dans leur rigueur démonstrative, et les historiens de la philosophie voient en lui l'initiateur de la spéculation rationnelle.

C'est Kant qui a établi entre la métaphysique et la mathématique une opposition tranchée et on peut dater de cette époque la scission entre la science et la philosophie. Il a insisté sur leur hétérogénéité absolue, sans doute préccupé d'établir la valeur objective de la science et de ruiner au contraire celle de la métaphysique comme connaissance spéculative et transcendante. Mais c'est aussi au point de vue historique parce qu'il veut réagir contre la philosophie de Leibniz et et de Wolff. Il affirme que les jugements mathématiques sont synthétiques à priori et surtout qu'ils sont nécessairement et exclusivement fondés sur l'intuition, alors que Leibniz les considérait comme analytiques et reposant sur le principe d'identité. La mathématique et la logique modernes donnères raison à Leibniz contre Kant, comme l'a si bien noté Bourbaki. Kant croyait que la logique n'avait pas fait un pas depuis Aristote et n'en ferait plus aucun; la logique moderne a donné à cette assertion le plus éclatant démenti. D'autre part il concevait la mathématique comme la science du nombre et de la grandeur et croyait que la méthode mathématique n'est applicable qu'à ces objets spéciaux. Or la mathématique moderne a rompu le cadre où la tradition l'enfermait et vérifié cette parole de Boole: "Il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper exclusivement des idées de nombre et de grandeur."* Boole en inventant le calcul logique et Grassmann en inventant le calcul géométrique n'ont fait que ressusciter des idées de Leibniz et réaliser au XIXe siècle la Caractéristique universelle.

Leibniz plus moderne que Kant

En ce sens on peut dire que Leibniz est plus moderne que Kant. La fusion de la logique et de la mathématique, que Leibniz avait entrevue est aujourd'hui réalisée, mais le développement de la science a montré l'erreur de Kant d'avoir considéré l'espace et le temps comme des absolus éternels de notre sensibilité. Son dogmatisme sur ces problèmes influença bien des savants et des philosophes, comme par exemple Henri Poincaré, qu'il empêcha de découvrir la Relativité, alors qu'il disposait de tout l'outilage technique nécessaire à la constitution de la théorie. Or à cette époque, c'est-à-dire dans les premières années du siècle, c'est le moment où, en Françe, sous la conduite du même Henri Poincaré, de Borel, de Baire et Lebesgue, les notions nouvelles de Cantor sont introduites dans la théorie des fonctions de variable réelle. Elles en bouleversent les principes et les conceptions classiques. La logique traditionnelle montre immédiatement sont insuffisance, car des paradoxes sont inventés, dont la réfutation est malaisée et reste douteuse, des raisonnements dont les faiblesses ne peuvent être démontrées mènent à des conclusions incertaines ou difficiles à admettre. Cette crise atteint sa plus grande acuité exactement en 1904 l'année du centenaire de la mort de Kant, lorsque Zermelo publie son fameux théorème.

Une révision de concepts les plus fondamentaux de l'Analyse paraît alors nécessaire. Qu'est-ce que définir en mathématiques? Une existence ne peut-elle pas être purement nominale et nullement réelle? Un ensemble peut-il être considéré comme défini sans que chaque élément le soit aussi? Qu'est-ce qu'un concept

* *Laws of Thought* p. 12

mathématique véritablement pensé? Hadamard et Denjoy se refusèrent alors à borner la vérité mathématique aux lisières de ce que les hommes sont capables d'exprimer immédiatement par leurs conventions de langage. Dénoncer alors certaines conception de Kant comme le fit, seul, le philosophe Louis Couturat, exigeait un courage certain. Car les idées de Kant régnaient sans partage dans les milieux mathématiques et philosophiques. Deux grands mathématiciens comme Poincaré et Hilbert s'en réclamaient ouvertement. Or ces idées kantiennes étaient devenues une entrave à l'essor de l'esprirt scientifique, dont Kant avait pourtant vu toute la puissance. Mais après avoir fait sa révolution copernicienne il ne sut pas en tirer toutes les conséquences et fut trop préoccupé de mettre des bornes à la raison. Ce sont les savants qui ont fait ce travail, tout particulièrement en mathématiques. Ils n'ont pu le faire qu'en se libérant des oeillères d'une culture dépassée.

IV. Nature des mathématiques

Arrivé à ce point, je voudrais examiner la question de la nature des mathématiques, qui est sous-jacente à mon propos et à toute présentation des mathématiques, donc de leur enseignement. Traditionnellement deux thèses se sont affrontées dans l'histoire. La première consiste à supposer l'existence d'un monde idéal et complet d'objets mathématiques que les mathématiciens doivent découvrir. Cette première conception est appelée platonicienne par référence aux monde des Idées de Platon, encore que ce dernier, malgré le rôle essentiel qu'il accordait aux mathématiques, les considérât comme intermédiaires entre les Idées et la réalité. Cette conception fut et est encore celle de nombreux mathématiciens ou philosophes rationnalistes. Frege et Hermite s'en réclamèrent ouvertement. L'imagination n'a alors aucun rôle, le savant découvre ce qui existe déjà en dehors de lui "tout comme le géographe" aimait à dire Frege, lequel refusa violemment le nouveau point de vue de Hilbert sur la géométrie dans la mesure où il lui semblait compromettre l'objectivité de la science.

La deuxième thèse consiste à considérer que les notions mathématiques s'obtiennent par abstraction à partir des objets sensibles du monde réel. Cette deuxième conception fut avancée par Aristote, "le chef des empiristes" disait Kant, et elle fut effectivement la leur au cours de l'histoire tout comme à notre époque. Le critère de la vérité mathématique réside alors essentiellement dans les applications pratiques, la rigueur semble négligeable et même, un raffinement inutile. L'observation et l'expérimentation sont les sources fondamentales des innovations. Alors le bricolage, le tâtonnement, l'à peu près jouercnt un rôle essentiel dans l'enseignement. Dans cette conception l'accord avec le monde réel ne pose aucun problème et va de soi, la physique et la technique sont les sources fécondes dont le mathématicien ne doit pas s'écarter sous peine de stérilité.

Un épistémologue contemporain, Jean-Toussaint Desanti a résumé le problème en écrivant: "Les mathématiques sont elles du ciel, sont-elles de la terre?

Une création humaine

En fait une troisième conception existe, bien plus intéressante mais souvent méconnue: les mathématiques sont une création humaine. Une telle solution donne à l'imagination une importance fondamentale. Elle fut adoptée dans l'histoire par certains mathématiciens et philosophes mais curieusement n'a pas retenu l'attention. Elle rapproche l'activité du mathématicien de celle du poète, de l'artiste.

Elle rend compte des préoccupations d'harmonie et d'esthétique qui animent souvent les mathématicien, Certains d'entre eux les considèrent même comme essentielles et caractéristiques de leur activité. Les nombres sont pour Dedekind comme pour Hankel des créations de l'esprit humain: „Je conseillerais plutôt, écrit-il à Weber de ne pas entendre par nombre la classe même, mais quelque chose de nouveau... que l'esprit engendre. Nous sommes de race divine et possédons . . . le pouvoir de créer." A la même époque Cantor proclamait: "L'essence des mathématiques, c'est la liberté!" et Weierstrass renchérissait: "Le véritable mathématicien est un poète". Wittgenstein indiqua: "Le mathématicien est un inventeur, non un découvreur."*. Plus près de nous Albert Lautman, Jean Cavaillès et Gaston Bachelard conçurent les mathématiques de cette manière. Léon Brunschwig insista, lui aussi sur la dynamique de l'intelligence mathématique. Cette conception des mathématiques les libére de l'escalavage du réel des empiristes dogmatiques et des liens du rationnalisme classique.

Cette révélation de la véritable nature des mathématiques, l'idée d'une nouvelle orientation philosphique est contemporaine de la géométrie non euclidienne, qui prouva la capacité de l'esprit à créer de toutes plèces un domaine de pensée dont la contradiction avec les "vérités intuitives" était flagrante. La Théorie de la Relativité exigea aussi une nouvelle philosophie de l'espace et du temps qui ne pouvait plus être une philosophie du donné, où l'intuition est fondamentale. La raison devait se mettre à l'école des mathématiques les plus modernes et les plus éloignées de la culture traditionnelle: les tenseurs, les différents sortes d'algèbres et de géométries devenaient les instruments habituels du physicien. Le formalisme le plus abstrait se révélait indispensable pour l'investigation la plus concrète. La métaphore célèbre de Kant dans sa préface à la *Critique de la raison pure* sur l'erreur de la colombe platonicienne devait être renversée: le vide du formalisme est indispensable pour atteindre les profondeurs de l'objet. L'esprit doit prendre de l'altitude pour mieux dominer sa proie. Trop près du but la vue manque de perspective pour élaborer la théorie nécessaire. L'immédiateté de la capture n'est pas le propre de l'homme. C'est par la pensée et l'effort qu'il est devenu un géant.

Le rôle de l'imagination et de la philosophie

Dans une telle conception des mathématiques l'imagination a toute sa place, qu'Hilbert a soulignées. A la question "Comment un homme qui était mathématicien peut-il écrire des romans?" — "Mais c'est tout simple, répond Hilbert, il n'avait pas assez d'imagination pour les mathématiques, mais il en avait assez pour les romans."* C'est une autre caractéristique du Nouvel Esprit mathématique que de donner ce rôle essentiel en mathématiques à l'imagination, tout à fait à l'opposé de la conception dominante du XVIIe siècle. Ce n'est plus "la folle" du logis", responsable des divagations de l'esprit, mais ce qui donne sa forme, sa couleur et son relief à une pensée nouvelle.

Pour Descartes l'erreur s'introduit par l'intervention intempestive d'une puissance qu'il exorcise: l'imagination. Pascal est encore plus net dans ses *Pensées***: "C'est cette partie décevante dans l'homme, cette maîtresse d'erreur et de fausseté et d'autant plus fourbe qu'elle ne l'est pas toujors; car elle serait règle infaillible de vérité si elle l'était du mensonge. Mais étant le plus souvent fausse,

* Constance Reid, *Hilbert*, Springer Verlag 1970 p. 175.

** Edition Brunswicg Hachette 1945 pp 362—363—367 et passim.

elle ne donne aucune marque de sa qualité, marquant du même caractère le vrai et le faux." — "Je ne parle pas des fous, je parle des plus sages et c'est parmi eux que l'imagination a le grand don de persuader les Hommes. La raison a beau crier, elle ne peut mettra le prix aux choses."

Au XVIIe siècle l'invention est avant tout l'oeuvre de la raison. Leibniz occupe peut-être une place à part avec le sens très vif qu'il a eu du changement, de l'activité essentielle à toute réalité. Il dépasse le mécanisme cartésien et prélude à l'énergétisme et au transformisme modernes. La Caractéristique et la Logique se confondent pour lui avec la combinatoire, l'art de penser et surtout l'art d'inventer, qui n'est autre que la Mathématique. Car Leibniz a trop conscience de l'unité de l'esprit humain et de l'unité de la science pour séparer synthèse et analyse. Ce sont les logiciens empiristes qui opposent les sciences déductives et les sciences inductives, comme s'il y avait deux méthodes distinctes et contraires pour découvrir et démontrer la vérité. La mathématique formelle et abstraite est la véritable logique des autres sciences et l'on peut dire sans paradoxe que la seule méthode expérimentale est la déduction.

L'imagination créatrice est à l'oeuvre en mathématiques et remet en cause la doctrine traditionnelle d'une raison absolue et immuable, philosophie dogmatique périmée. L'esprit doit se plier aux conditions du savoir, se mettre à l'école des mathématiques, cette invention humaine qui avec quelques autres comme le langage, la poésie, la musique etc, ont créé l'homme tel qu'il est et lui ont permis de se rendré maître et possesseur de la nature. Une telle conception dynamique et vivante pose en termes essentiellement nouveaux le problème de la vérité, de l'objectivité, de la subjectivité, de la nécessité et de la rigueur, des rapports des mathématiques avec le réel. Les solutions du rationalisme dogmatique ou de l'empirisme opportuniste, en fait tout aussi dogmatique, sinon plus, ne peuvent plus être adoptées. Elle souligne avec force l'importance des définitions, car on observe et on décrit ce qui existe, mais on doit définir ce que l'esprit crée et qui n'est pas donné. On comprend mieux aussi le rôle fondamental des théorèmes d'existence et de la cohérence en mathématiques. Ce sont les notions de base. Avec ces théorèmes d'existence les mathématiciens cherchent un critère très large applicable à une multitude de problèmes différents pour savoir si une solution existe ou non. Une fois trouvé le caractère garantissant l'existence d'une solution, nous pouvons chercher à la découvrir avec l'assurance que cette recherche ne sera pas vaine. L'importance de ces théorèmes d'existence est garantie par la pratique des mathématiciens. Les étudiants et les pédagogues sont souvent sceptiques à leur sujet car il existe une grande différence entre les preuves de l'existence d'une solution et les méthodes utilisées pour trouver ces solutions. Un théorème d'existence doit s'appliquer dans tous les cas: sa détermination est souvent difficile et son application effective peur être compliquée et fastidieuse. Un exmple moderne communiqué par J. Dieudonné suffira à le montrer. La démonstration d'un tel théorème de la théorie des groupes, démontré par l'absurde en 1963 par Walter Feit et John G. Thompson occupe 258 grandes pages du *Pacific Journal of Mathematics*. Son énoncé est pourtaint relativement simple et court: tous les groupes finis d'ordre impair sont résolubles. Il est vrai que la plupart des exemples présentés aux étudiants sont simples et l'existence peut être démontrée par des méthodes plus simples et en général constructives. Aussi pensent-ils souvent à la métaphysique quand on esquisse devant eux la notion d'existence de solutions. Pourtant c'est une question fondamentale liée à la solution des problèmes plus traditionnels. Songeons à la fameuse question de la trisection de l'angle avec la règle et le compas, ou à celle de la résolution des équations algébriques. Quand le problème de l'existence fut clairement posé, on sut y répondre. Dans la recherche moderne les questions d'existence sont posées d'abord et les réponses sont absolument vitales afin que les théories reposent sur de saines fondations. Pour s'on rendre compte il suffit de consulter le *Traité d'Analyse* de Goursat, ou celui, plus récent, de Dieudonné. Il y a là une exigence profonde de l'esprit humain qui ne peut être négligée. L'imagination intervient aussi dans l'élaboration de nouveaux formalismes, de nouveaux automatisme. Ceux-ci déchargent l'esprit, certes, de certaines opérations fastidieuses, mais ne dispensent pas, contrairement à ce que certains prétendent, de penser. Bien plutôt, grâce à eux, l'esprit acquiert de nouvelles capacités, il apprend à penser avec des flèches, avec des diagrammes, avec de nouveaux languages qui sont autant d'instruments décuplant ses possibilités. D'autre part les grands mathématiciens, c'est-à-dire ceux qui trouvent une nouvelle façon d'envisager une question, une nouvelle méthode pour résoudre un problème jusque là insoluble, ne se contentent jamais d'utiliser mécaniquement les procédés classiques. Ils poussent d'abord aussi loin que possible l'exploration des sources des automatismes employés et savent restituer ainsi à la pensée son autonomie, grâce à quoi elle pourra prendre un nouvel essor par delà les frontières où elle s'était d'abord crue prisonnière. Souvent la recherche conduit à une nouvelle théorie ou à un renouvellement complet de la problématique traditionnelle. Ce travail d'investigation, qui est la véritable vie de l'esprit, une preuve de sa liberté, ne devrait pas laisser indifférents les philosophes ni les hommes de culture. Il devrait être, comme par le passé au coeur de leurs préoccupations et permettre de réhabiliter des auteurs injustement oubliés, qui avaient compris, eux, la richesse spirituelle des mathématiques, tels Louis Couturat et Albert Lautman, par exemple, qui virent en elle une des plus hautes manifestations de la puissance productrice de l'intelligence.

Malheureusement le dogmatisme, s'il n'est plus soutenable en sciences est toujours présent dans la philosophie et la pédagogie qui suivent les modes les plus contestables, les prétendus novateurs en pédagogie étant souvent les plus fermés à l'opinion des autres, qu'ils refusent d'examiner, J'en connais qui vous traitent en ennemis si vous ne partagez pas leur foi. C'est pourquoi vous ne trouverez pas le Nouvel Esprit Mathématique dans les manuels ou les instructions officielles. Il faut, pour le connaître, vous adresser aux mathématiciens. Il faut entrer en contact avec l'oeuvre d'un maître. Abel (1802—1829) à qui l'on domandait comment il avait fait pour produire des résultats aussi remarquables en six ou sept ans répondit: "En étudiant les maîtres et non pas leurs disciples."

C'est la science en train de se faire qui nous montre le chemin d'une philosophie et d'une culture adéquates aux innovations scientifiques, face à toutes les démissions de l'esprit.

Ecole Normale Supérieure,
ruè d'Ulm. Paris 75000, France