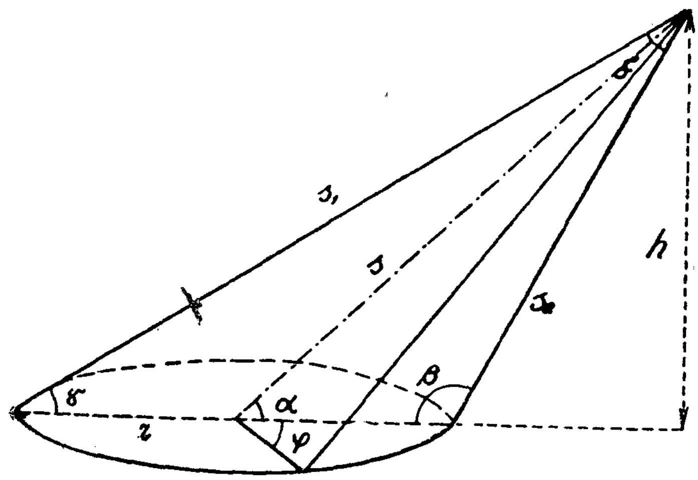
ПРИБЛИЖНА ФОРМУЛА ЗА ОМОТАЧ КОСЕ КРУЖНЕ КУПЕ

СТАНИМИР ФЕМПЛ (Београд)

Нека су s_1 и s_2 највећа и најмања изводница косе кружне купе, r полупречник основе, β и γ наспрамни углови тих трију страна карактеристичног троугла, s осовина купе, α угао осовине према бази, h висине купе (в. сл. 1).



Сл, 1.

У своме раду [1] показао сам да се омотач M косе кружне купе који је дат интегралом

$$M = r\int_0^{\pi} \sqrt{h^2 + (r - s\cos\alpha\cos\varphi)^2}\, d\varphi, \tag{1}$$

своди на облик

$$M = 2\,r\,\sqrt{s_1 s_2}\left(E - F\sin^2\frac{\delta}{2}\right) + 2\,r^2\,\{E_1 F - (F - E)\,F_1\},$$

где су F и E потпуни нормални елиптички интеграли I и II врсте са модулом

$$k = \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$$

и где су F_1 и E_2 нормални елиптички интеграли I и II врсте са модулом

$$k' = \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

и са амплитудом

$$\Theta = \arc \sin \frac{2r}{s_1 + s_2}.$$

На тај начин, на основу постојећих таблица за елиптичке интеграле [2], може се израчунати омотач косе кружне купе.

У овом раду показаћу да се вредност омотача са довољном тачношћу може добити из приближног обрасца

$$M \approx \frac{r}{2} \left(\frac{s_1 + s_2}{2} + \sqrt{h^2 + r^2} \right) \pi \tag{I}$$

и поставићу горње границе отступања ове приближне вредности од праве.

Раставимо интеграл (1) на два интеграла са границама $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Кад се у другом интегралу φ смени са $\pi - \varphi$ и овај поново скупи са првим интегралом, једначина (1) добива облик

$$\frac{M}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{h^2 + (r + s \cos \alpha \cos \varphi)^2} + \sqrt{h^2 + (r - s \cos \alpha \cos \varphi)^2} \right] d\varphi. \tag{2}$$

Подинтегрална функција $F(\varphi)$ монотоно опада од 0 до $\frac{\pi}{2}$, а има максимум за $\varphi = 0$, тј.

$$F_{max.} = F(0) = s_1 + s_2,$$

јер је

$$\sqrt{h^2 + (r + s \cos \alpha)^2} = s_1, \quad \sqrt{h^2 + (r - s \cos \alpha)^2} = s_2,$$

и има минимум за $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тј.

$$F_{min.} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{h^2 + r^2}.$$

Према томе је

$$2\sqrt{h^2+r^2} \leqslant F(\varphi) \leqslant s_1+s_2, \tag{3}$$

а отуда, интеграцијом,

$$\pi\sqrt{h^2+r^2} \leqslant \frac{M}{r} \leqslant (s_1+r_2)\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Обе ове границе постигнуте су за $s_1=s_2$, тј. у случају када је купа усправна; тада образац (I) даје тачну вредност омотача.

Узме ли се за M/r аритметичка средина размака (4), добива се као приближна вредност израз

$$M=\frac{r}{2}\left(\frac{s_1+s_2}{2}+\sqrt{h^2+r^2}\right)\pi. \tag{5}$$

Учињена грешка ([3], стр. 66—67) није већа од

$$\Delta=\frac{r}{2}\left(\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}\right)\pi,$$

и релативна грешка била би

$$\delta=\frac{\Delta}{M}<\frac{s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}}{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}. \tag{6}$$

Тако на пр. за $s_1=24$, $s_2=16$, $2r=13$, на основу обрасца

$$s_1^2-s_2^2=4rs\cos\alpha,$$

$$h^2+r^2=s^2\sin^2\alpha+r^2=s^2+r^2-s^2\cos^2\alpha=\frac{s_1^2+s_2^2}{2}-\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{16r^2}, \tag{7}$$

образац (6) даје релативну грешку око 8%. Међутим показаћу да вредност (I) лежи у много ужем размаку.

Ради тога, посматрајмо функцију која претставља отступање функције

$$K(\varphi)=(s_1+s_2)\cos^2\varphi+2\sqrt{h^2+r^2}\sin^2\varphi \tag{8}$$

од подинтегралне функције. Крива $K(\varphi)$ је доста приљубљена уз подинтегралну криву, а екстремне им се тачке поклапају. Ставимо ли, краткоће ради,

$$K_1(\varphi)=h^2+(r+s\cos\alpha\cos\varphi)^2, \quad K_2(\varphi)=h^2+(r-s\cos\alpha\cos\varphi)^2,$$

поменуто отступање се може написати у облику

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} - K = \frac{(\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2})^2 - K^2}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + K}$$

$$= \frac{2(K_1+K_2) - (\sqrt{K_1} - \sqrt{K_2})^2 - K^2}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + K}$$

$$= \frac{2(K_1+K_2) - K^2 - \dfrac{(K_1-K_2)^2}{(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2})^2}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + K} =$$

$$= \frac{2(K_1+K_2) - K^2 - \dfrac{(K_1-K_2)^2}{F^2(\varphi)}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + K}.$$

Услед неједначина (3), ово отступање лежи између граница

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2(K_1+K_2) - K^2 - \dfrac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + K} \leqslant \Phi(\varphi), \\ &\Phi(\varphi) \leqslant \frac{2(K_1+K_2) - K^2 - \dfrac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + K}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

На основу једначине (8), израз

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\varphi)\, d\varphi = \left(\frac{s_1+s_2}{2} + \sqrt{h^2+r^2}\right)\frac{\pi}{2}$$

даје приближну вредност за M/r. Зато интеграција функције $r\,\Phi(\varphi)$ даје отступање приближне вредности омотача од његове праве вредности, а лева и десна страна неједначина (9) дају после интеграције и множења са r границе тога отступања.

Функција $\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K$ монотоно опада у размаку интеграције, тј. реципрочна вредност функције монотоно расте. Услед тога, на левој и десној страни (9) можемо применити теорему Ossian Bonet-а [3] за средње вредности одређених интеграла, па се због

$$\sqrt{K_1\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt{K_2\left(\frac{\pi}{2}\right)} + K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{h^2+r^2}$$

добија

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{h^2+r^2}}\int_{\xi_1}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(K_1+K_2)-K^2-\dfrac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}}{\sqrt{K_1}+\sqrt{K_2}+K}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{h^2+r^2}}\int_{\xi_2}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}\right]d\varphi,$$

где ξ_1 и ξ_2 леже између 0 и $\frac{\pi}{2}$. Услед тога, из (9) следи

$$\frac{r}{4\sqrt{h^2+r^2}}\,\mathrm{Min.}\int_{\xi_1}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r)^2}\right]d\varphi \leqslant r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(\varphi)\,d\varphi, \tag{10}$$

$$r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(\varphi)\,d\varphi \leqslant \frac{r}{4\sqrt{h^2+r^2}}\,\mathrm{Max.}\int_{\xi_2}^{\frac{\pi}{2}}\left[2(K_1+K_2)-K^2-\frac{(K_1-K_2^2)}{(s_1+s_2)^2}\right]d\varphi,$$

где изрази Min. и Max. претстављају најмању и највећу вредност горњих интеграла.

Због

$$\begin{aligned} 2(K_1+K_2) &= 4(h^2+r^2)+4s^2\cos^2\alpha\cos^2\varphi \\ &= 4(h^2+r^2)+\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{4r^2}\cos^2\varphi, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} K^2 &= (s_1+s_2)^2\cos^4\varphi+4(s_1+s_2)\sqrt{h^2+r^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi+4(h^2+r^2)\sin^4\varphi \\ &= 4(h^2+r^2)+4\sqrt{h^2+r^2}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})\cos^2\varphi+ \\ &\quad +(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\cos^4\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{(K_1-K_2)^2}{(s_1+s_2)^2}=\frac{(4\,r\,s\cos\alpha\cos\varphi)^2}{(s_1+s_2)^2}=(s_1-s_2)^2\cos^2\varphi,$$

за подинтегралну функцију десне стране добива се израз

$$(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi,$$

а интеграција те функције даје

$$\psi(\xi_2)=\frac{1}{32}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2(2\pi-4\xi_2+\sin 4\xi_2).$$

Ова функција од ξ_2 нема екстрема у размаку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Како је

$$\psi(0)=\frac{\pi}{16}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

то је највећа вредност функције $\psi(\xi_2)$ вредност $\psi(0)$. Услед тога, десна граница отступања износи

$$G=\frac{r\pi}{16\sqrt{h^2+r^2}}\left(\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}\right)^2. \tag{13}$$

Због једначина (11) и (12) и због једначине

$$\frac{(K_1-K_2)^2}{4(h^2+r^2)}=\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4(h^2+r^2)}\cos^2\varphi,$$

добива се за подинтегралну функцију леве стране израз

$$\left[\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4r^2}-4(s_1+s_2)\sqrt{h^2+r^2}+8(h^2+r^2)\right.$$
$$\left.-\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]\cos^2\varphi-(s_1+s_1-2\sqrt{h^2+r^2})^2\cos^4\varphi.$$

Израз у средњој загради, обзиром на (7), може се довести на овај облик:

$$[(s_1-s_2)^2+4(s_1+s_2)\sqrt{h^2+r^2}+4(h^2+r^2)]$$
$$+\left[4(h^2+r^2)+\frac{(s_1{}^2-s_2{}^2)^2}{4r^2}-(s_1+s_2)^2-\frac{(s_1{}^2-s_2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]$$
$$=(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2+\left[(s_1-s_2)^2-\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{4(h^2+r^2)}\right]$$
$$=(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\left[1-\frac{(s_1-s_2)^2}{4(h^2+r^2)}\cdot\frac{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}{s_2+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}}\right].$$

Ставимо ли још

$$A=\frac{(s_1-s_2)^2}{h^2+r^2}\cdot\frac{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}{s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}},$$

подинтегрална функција леве стране добива облик

$$(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\left[\left(1-\frac{A}{4}\right)\cos^2\varphi-\cos^4\varphi\right],$$

а после интеграције биће

$$\Omega(\xi_1)=(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2\left[\left(1-\frac{A}{4}\right)\cdot\frac{\pi-2\xi_1-\sin 2\xi_1}{4}\right.$$
$$\left.-\frac{3\pi-6\xi_1}{16}+\frac{\sin 2\xi_1}{4}+\frac{\sin 4\xi_1}{32}\right].$$

Извод ове функције

$$\Omega'(\xi_1)=\frac{1}{8}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2(2\cos^2 2\xi_1+A\cos 2\xi_1+A-2) \quad (14)$$

има у тачки $\xi_1=0$ вредност

$$\Omega'(0)=\frac{A}{4}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2>0,$$

што значи да функција Ω расте у близини тачке 0. Како је

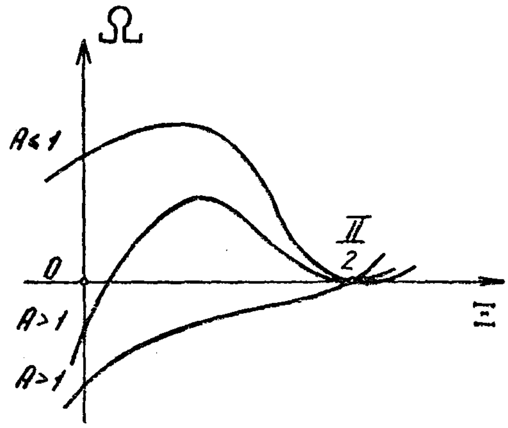
$$\Omega\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \Omega'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad \Omega''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

и

$$\Omega(0)=\frac{\pi}{16}(s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2})^2(1-A), \quad (15)$$

а према (10) извод функције Ω може имати највише две нуле у размаку $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то дијаграм функције Ω може имати један од три облика назначених на слици.

У случају $A\leqslant 1$, према (15), најмања вредност функције Ω у размаку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ једнака је нули.



Сл. 2.

У том случају је лева граница једнака нули, а отступање је позитивно. Напротив, ако је $A>1$, вредност (15) је најмања вредност. Како је на основу (13) и (15)

$$\Omega(0)=\frac{4G(1-A)}{r}\sqrt{h^2+r^2},$$

то је обзиром на (10), лева граница отступања $G(1-A)$. У првом случају је граница грешке мања од G, у другом је граница грешке мања од

$$G-G(1-A)=GA.$$

Релативна грешка је у првом случају мања од G/M, у другом, мања од AG/M.

На тај начин долази се до следећег става за одређивање граница грешке:

Нека је

$$A=\frac{(s_1-s_2)^2}{h^2+r^2}\cdot\frac{\frac{s_1+s_2}{2}+\sqrt{h^2+r^2}}{\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}}$$

и

$$G=\frac{r\pi}{16(h^2+r^2)}\left(\frac{s_1+s_2}{2}-\sqrt{h^2+r^2}\right)^2.$$

Ако је

$$A\leqslant 1,$$

релативна грешка је

$$\delta<\frac{G}{M};$$

ако је

$$A>1,$$

релативна грешка је

$$\delta<\frac{AG}{M}.$$

Примера ради, нека је опет $s_1=24$, $s_2=16$, $2r=13$. Због

$$M=370{,}26,\quad A=2{,}3485>1,\quad G=1{,}0953,$$

рачун показује да је релативна грешка

$$\delta<0{,}007$$

тј. 0,7%.

(Права вредност за омотач је [1] $M=370{,}67$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Фемпл. Компланација косе кружне купе. *Гласник математичко физички и астрономски.* Серија II, Том 4. № 3. Стр. 127—134. Загреб 1949.

[2] Jahnke u. Emde. Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1909.

[3] М. Петровић. Рачунање са бројним размацима. Београд, 1932.

NÄHERUNGSFORMEL ZUR MANTELBERECHNUNG DES SCHIEFEN KREISKEGELS

Von Stanimir Fempl (Beograd)

Verfasser beweist eine angenäherte Formel zur Flächenberechnung des Mantels des schiefen Kreiskegels (Formel (I)) und schätzt den dabei gemachten (relativen) Fehler ab.