# О ГЕОМЕТРИСКОЈ ИНТЕРПРЕТАЦИЈИ М. МИЛАНКОВИЋА КОНВЕРГЕНЦИЈЕ БЕСКОНАЧНИХ РЕДОВА

ЈОВАН КАРАМАТА (Београд)

**1.** У свом чланку „Eine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen“ {*Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. XL. Heft* 6/7 (1909), стр. 22} проф. М. Миланковић је показао како се може геометриски интерпретисати конвергенција, односно дивергенција геометрискога реда. Ова претстава са извесним изменама ушла је у многе уџбенике, међутим, у необјављеном рукопису проф. Миланковића налазе се извесне измене, а поред тога и проширења овог геометриског расуђивања на неке друге редове. Ове допуне са методолошког гледишта омогућавају геометриску претставу извесних типичних редова, као што су

$$\Sigma q^n,\ \Sigma n,\ \Sigma 1/n(n+1),\ \Sigma 1/n,$$

и јаснију претставу њиховог поређења, а сам поступак као такав стоји у вези са сукцесивном апроксимацијом и методом итерације, и даје могућност да се не само корвергенција већ и брзина конвергенције ових редова прегледније интерпретира.

Излажући најпре разматрања М. Миланковића, према самим ауторовим забелешкама, циљ ми је да укажем и на овај други део проблема. Стога у **2** износим резултате из поменутог необјављеног рукописа, а у **3** показујем како се из ове интерпретације могу извући извесни закључци о брзини конвергенције ових редова и указујем на везу са брзином конвергенције приближних решења једначине

$$x = \zeta(x)$$

методом сукцесивне апроксимације.

**2.** Основна идеја изложена у поменутом чланку проф. М. Миланковића је ова.

Нека је $\overline{AB} = a$, $\measuredangle CBA = 90^\circ$. Ако повучемо праве $\overline{AS}$ и $\overline{BS'}$ тако да буде $\measuredangle CAB = \measuredangle CBD = \alpha$ (в. сл. 1) и ставимо $q = \operatorname{tg}\alpha$, тада поједине стране правоугле полигоналне линије $ABCDEF$ претстављају чланове геометриске прогресије

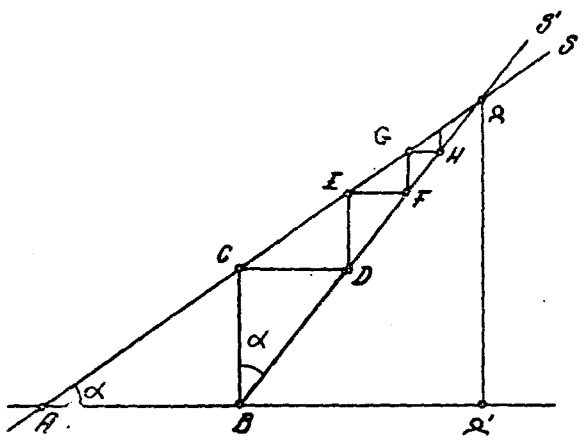
$$a, aq, aq^2, \ldots\ldots$$

Ако је $\alpha < 45^0$, тј. $q < 1$, полуправе $AS$ и $BS'$ су конвергентне и секу се у тачки $\Omega$. Геометриски ред

$$a + aq + aq^2 + \ldots$$

је конвергентан и његов збир износи

$$S = \overline{A\Omega'} + \overline{\Omega'\Omega}.$$




Сл. 1.

Ако је, међутим, $\alpha \geqslant 45^0$, тј. $q \geqslant 1$, ове полуправе дивергирају или су паралелне, тачке пресека нема, а геометриски ред је дивергентан.

У поменутом рукопису проф. Миланковић посматра општи случај, тј. ред

$$\Sigma a_n. \qquad (1)$$

чији је општи члан $a_n$ реалан и позитиван, и покушава да изведе сличну геометриску интерпретацију, с том разликом што за дужине страна полигоналне линије $ABCDEF\ldots$ не узима редом чланове $a_1, a_2, a_3, \ldots$ као што је то случај код слике 1, него узима да је дужина првих двеју страна $AB$ и $BC$ једнака $a_1$, дужина других двеју страна $CD$ и $DE$ једнака $a_2$ итд., наносећи при томе прву страну на $Y$-осу, а не на $X$-осу (в. сл. 2),

Уместо ранијих правих $AS$ и $BS'$ овде се појављује права $AS$ (која заклапа угао од $45^0$ са $X$-осом), на којој се налазе темена $ACEG\ldots$, и извесна крива $BS'$, на којој се налазе темена $BDFH\ldots$ поменуте полигоналне линије (в. сл. 2).

Једначину ове криве линије

$$y = f(x)$$

можемо у узвесним случајевима накнадно да одредимо из структуре самог реда (1), док се темена $ACEG\ldots$ увек налазе на правој

$$y = x.$$

Означимо са $s_n$ збир $n$ првих чланова реда (1), тј.

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu .$$

Како је општи члан $a_n$ извесна функција индекса, рецимо,

$$a_n = \varphi(n),$$

то је и збир $s_n$ нека функција индекса; ако ставимо

$$s_n = \psi(n), \tag{2}$$

координате $x$ и $y$ неког темена које лежи на кривој $BS'$, тј. на кривој $y = f(x)$, дате су са

$$x = s_{n-1} = \psi(n-1), \tag{3}$$

$$y = s_n = \psi(n). \tag{4}$$

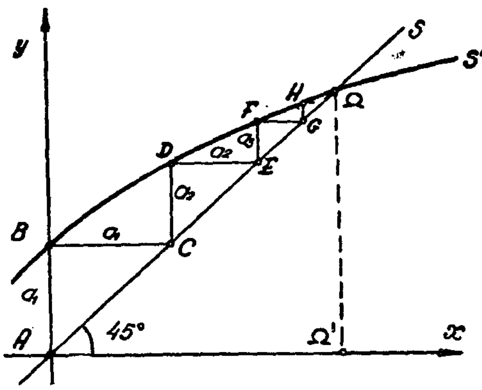
Из (3) следи

$$n = 1 + \rotatebox{180}{$\psi$}(x),$$

где смо са $\rotatebox{180}{$\psi$}(x)$ означили инверзну функцију функције $\psi(x)$, а сменом ове вредности у (4) добивамо

(5) $$y = \psi\{1 + \rotatebox{180}{$\psi$}(x)\},$$

као једначину криве $BS'$.




Сл. 2.

Према томе, кад год обрасцем (2) можемо изразити збир $s_n$ као функцију индекса, тада увек можемо добити и једначину криве $BS'$, тј. карактеристичну функцију $f(x)$: она је, према (5), дата обрасцем

$$f(x) = \psi\{1 + \rotatebox{180}{$\psi$}(x)\}. \tag{6}$$

Кад је функција $f(x)$ једном позната, из слике 2 видимо да ће ред (1) бити конвергентан или дивергентан према томе да ли крива $BS'$ сече праву $AS$ или не.

У првом случају, ако са $\Omega$ означимо тачку пресека, збир реда (1) ће бити дат било ординатом било апсцисом ове тачке, тј.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \overline{A\Omega'} = \overline{\Omega'\Omega}.$$

Дакле, испитивање конвергенције реда (1) се своди на решавање система

$$y=f(x),$$

$$y=x,$$

тј. на решавање једначине

$$x=f(x); \tag{7}$$

решење ове једначине, ако постоји, даје збир посматраног реда.

Тако је, на пример, у случају геометриског реда

$$\Sigma\, a q^n$$

збир

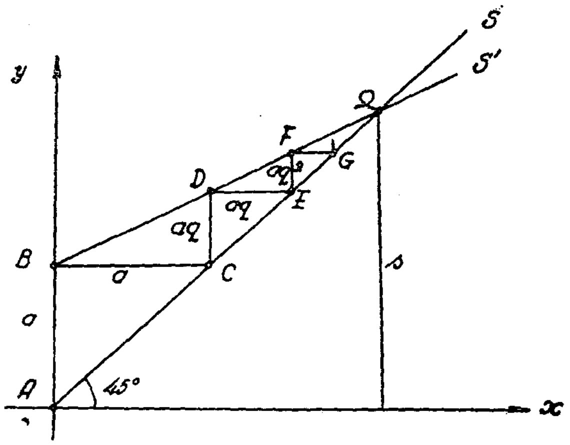
$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n-1} a q^\nu$$

дат изразом

$$s_n=a\frac{1-q^n}{1-q}=\psi(n).$$

Отуда се, кад се према (2) и (3) елиминише $n$, однисно $q^n$, добива

$$y=a+qx.$$




Сл. 3.

У овом се случају дакле, крива $BS'$ своди на праву са

$$f(x)=a+qx,$$

тако да се једначина (7) своди на

$$x=a+qx,$$

чије решење

$$s=\frac{a}{1-q}$$

даје збир бесконачног геометриског реда; то можемо добити и непосредно из сл. 3.

Приметимо да кад је $q$ негативно, тј. кад је $-1<q<0$, да тада положај правих $AS$ и $BS'$ има облик слике 4, а полигонална линија прелази у спиралну полигоналну линију. Ово је карактеристичан пример за редове чији чланови алтернативно мењају предзнак. Док је код редова са позитивним члановима полигонална линија степенастог облика, као на слици 2, дотле је код алтернативних редова полигонална линија спиралног облика, што се сличним резоновањем може лако показати.

Овде ћемо се ограничити само са редове са позитивним члановима и навести још ове примере.

Као пример реда који дивергира посматрајмо аритметичку прогресију

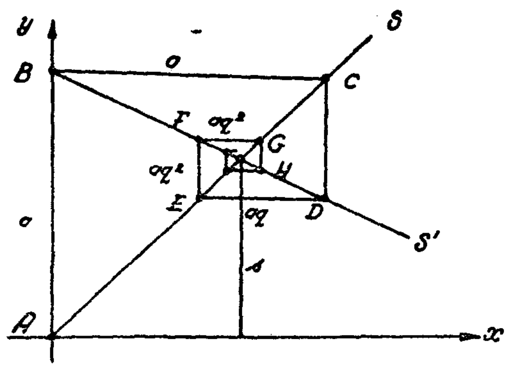
$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

тј. ред

$$\Sigma n.$$

Како је овде

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2} n(n+1),$$



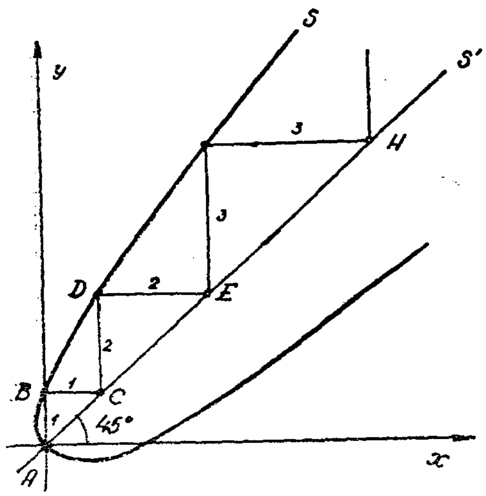

Сл. 4.

то је

$$\psi(n) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Отуда се, према (2) и (3), елиминацијом $n$-а добива за једначину криве $BS'$

$$(x-y)^2 = x+y.$$




Сл. 5.

Ово је парабола са теменом у почетку, а чији је осовина права $y=x$ (в. сл. 5).

У првом од наведених примера крива $BS'$ сече праву $AS$ док се у другом она од ове праве удаљује.

Наведимо сад један пример конвергентног реда код кога крива $BS'$ додирује праву $AS$. У ту сврху уочимо ред који је посматрао још Leibnitz;

$$\sum \frac{2}{n(n+1)},$$

а чији је општи члан реципрочна вредност троуглих бројева

$$1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{1}{2} n(n+1), \ldots.$$

Како је

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

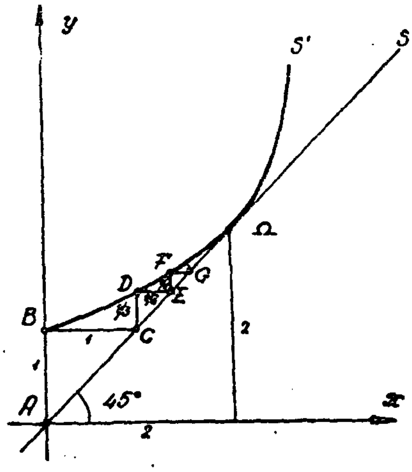
то је

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \psi(n).$$

Увршћавајући ову вредност од $\psi(n)$ у (2) и (3), елиминацијом $n$-а добива се за једначину криве $BS'$ (в. сл. 6)

$$y = \frac{4}{4-x}.$$

Ово је хипербола која додирује праву $y = x$ у тачки $\Omega(2, 2)$, тако да збир овога реда износи $S = 2$.




Сл. 6.

Уочимо најзад случај хармониске прогресије

$$a_n = 1/n.$$

Како је овде

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \lg n + C + o\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

то, да бисмо одредили функцију $f(x)$ која одговара овом хирмоничком реду, довољно је да, у првој апроксимацији, посматрамо низ

$$s_n = \lg n = \psi(n).$$

Према томе, стављајући

$$x = s_{n-1} = \lg(n-1)$$

и

$$y = s_n = \lg n,$$

добивамо из прве од ових једначина

$$n = 1 + e^x,$$

што заменом у другу даје

$$y = \lg(1 + e^x).$$

Дакле, у овом случају је

$$f(x) = \lg(1 + e^x) = x + \lg(1 + e^{-x}) > x,$$

тако да се крива $BS'$ стално налази изнад праве $AS$ и асимптотски јој се приближава (в. сл. 7).

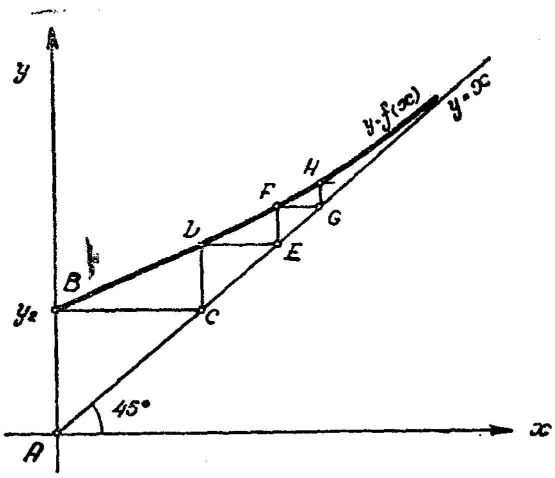
3. Из напред наведених типичних примера можемо извести ове закључке.

Кад ред $\Sigma a_n$ конвергира брзином геометриске прогресије, диаграм функције $f(x)$ пресеца праву $y=x$ под извесним углом $\alpha$, који је $>0$ и $<45^0$.

Кад је конвергенција слабија, као што је то случај код реда $\Sigma \frac{2}{n(n+1)}$, или реда $\Sigma \frac{1}{n^2}$, тада је $\alpha=0$, тј. диаграм функције додирује праву у тачки која одговара збиру.

Кад је ред слабо дивергентан диаграм не пресеца праву, али је та права асимптота, као што је то случај код хармониског реда $\Sigma \frac{1}{n}$.

Најзад, кад ред брзо дивергира као што је то случај код аритметичког реда $\Sigma n$, диаграм функције $f(x)$ се од ове праве удаљује.



Сл. 7.

Из ових разлога видимо да је положај диаграма функције $f(x)$ према правој $y=x$ карактеристичан не само за конвергенцију већ и за брзину конвергенције, и то:

*1*° он је карактеристичан за конвергенцију, према томе да ли он пресеца ову праву или не,

*2*° он је карактеристичан за брзину конвергенције према врсти додира у тачки пресека, односно у случају дивергенције према брзини приближавања, односно удаљавања од праве.

Због тога је од интереса да се закључак *2*° проучи и у општем случају. У ту сврху пођимо од функције $f(x)$ дате обрасцем (6), тј. изразом

$$y=f(x)=\psi\{1+\varphi(x)\}.$$

Да бисмо одредили под којим углом $\alpha$ диаграм ове функције сече праву $y=x$ ставимо

$$y'=\operatorname{tg}\theta.$$

Како је према слици 8

$$\alpha+\theta=45^0, \text{ тј. } \alpha=45^0-\theta,$$

то је

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}=\frac{1-y'}{1+y'}. \tag{9}$$

Образујмо сад извод

$$y'=\psi'\{1+\varphi(x)\}\varphi'(x).$$

Како из

$$\psi\{\varphi(x)\}=x$$

следи

$$\psi'\{\varphi(x)\}\,\varphi'(x)=1,$$

тј.

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{\psi'\{\varphi(x)\}},$$

то је

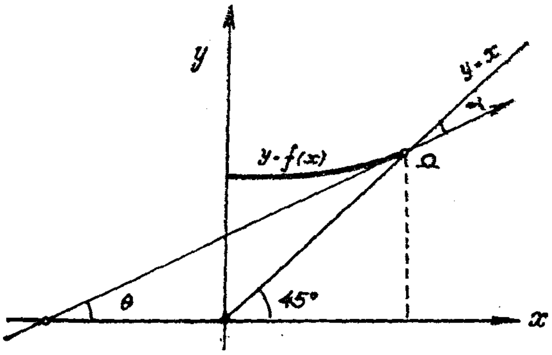
$$y'=-\frac{\psi'\{1+\varphi(x)\}}{\psi'\{\varphi(x)\}},$$

Ако ставимо

$$t=\varphi(x),$$

биће

$$y'=\frac{\psi'(1+t)}{\psi'(t)}.$$




Сл. 8.

Уочимо даље количник два узастопна члана посматраног реда $\Sigma a_n$. Према Cauchy-еву ставу о средњим вредностима је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\psi(n+1)-\psi(n)}{\psi(n)-\psi(n-1)}=\frac{\psi'(n+\xi)}{\psi'(n-1+\xi)};$$

стављајући

$$t=n-1+\xi,$$

биће

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\psi'(1+t)}{\psi'(t)}.$$

То значи да се за известан низ $t$-вредности извод

$$y'=f'(t)$$

понаша као количник $a_{n-1}/a_n$ два узастопна члана посматраног реда. Дакле, ако је овај ред конвергентан и задовољава D'Alembert-ов критериум

$$\frac{a_n+1}{a_n}\to q<1 \text{ кад } n\to\infty, \tag{10}$$

добивамо, према (9), да је

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-q}{1-q}. \tag{11}$$

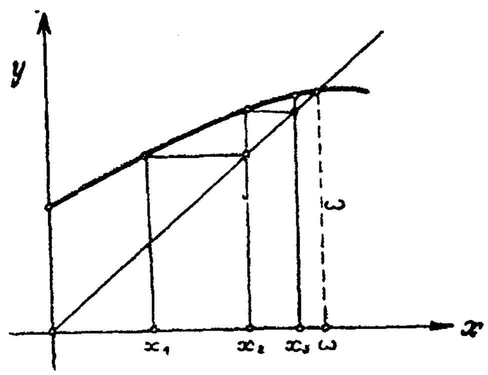
Према томе видимо да и у општем случају, као и код специалног геометриског реда, диаграм функције $f(x)$ пресеца праву $y=x$ ако овај ред конвергира експоненциалном брзином, тј. ако он задовољава услов (10), и да је у том случају угао пресека $\alpha$ дат обрасцем (11).

Међутим, ако овај ред спорије конвергира, на пример кад наступа случај D'Alembert-овог критериума

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$

тада видимо из (11) да мора бити $\alpha=0$, јер је у том случају $q=1$. Дакле, кад ред $\Sigma a_n$ конвергира спорије од геометриског реда диаграм функције $f(x)$ мора додиривати праву $y=x$.

Испитивање овог случаја је утолико од интереса што се поставља питање да ли се из реда додира диаграма функције $f(x)$ и праве $y=x$ може закључити нешто и о брзини конвергенције посматраног реда, као и обратно. Ово утолико пре што је геометриска интерпретација проф. Миланковића уствари еквивалентна са решавањем једначине $x=f(x)$ методом сукцесивне апроксимације, итерирањем функције $f(x)$, тако да се ово питање своди на проучавање брзине конвергенције сукцесивних решења једначине $x=f(x)$ према положају, и то специално додиру, диаграма функције $f(x)$ и праве $y=x$.




Сл. 9.

Видели смо, наиме, да је функција $f(x)$ везана за функцију $\psi(x)$ обрасцем (8). Ако у том обрасцу ставимо прво

$$n=1+\phi(x).$$

биће

$$\psi(n)=f\{\psi(n-1)\}.$$

Ако затим ставимо

$$x_n=\psi(n)$$

биће

$$x_n=f(x_{n-1}),\ n=1,2,\ldots.$$

Отуда следи (в. сл. 9) да је низ вредности $x_n$ које настају постепеним итерирањем функције $f(x)$ заиста низ приближних вредности решења једначине $y=f(x)$ које добивамо методом сукцесивне апроксимације.

Да стварно брзина конвергенције којом ова приближна решења $x_n$ теже граничној вредности, тј. решењу једначине $y=f(x)$, зависи од реда додира диаграма функције $f(x)$ са правом $y=x$ увиђамо ако претпоставимо да диаграм функције $f(x)$ има додир $k$-тог реда, рецимо у тачки $x=\omega$, са правом $y=x$. У том случају у близини ове тачке функција $f(x)$ је облика

$$f(x)=x+a(\omega-x)^k+o\{(\omega-x)^k\},\ x\to\omega,\ a>0.$$

Тада, полазећи од извесне подесно изабране почетне вредности $x_0$, сукцесивна приближна решења $x_n$ теже граничној вредности $\omega$ и овој се граничној вредности утолико спорије приближава уколико је $k$ веће. Заиста, за велике вредности од $n$ ова су решења дата асимптотским обрасцем

$$x_n = \omega + \frac{A}{n^{\frac{k-1}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-1}{2}}}\right), \; n \to \infty, \quad \text{где је} \quad A = \left(\frac{1}{((k-1)\,a)^{\frac{k-1}{2}}}\right),$$

(види Pólya-Szegö, Bd. I, Absch. I. Aufg. 174 и 173, стр 31), тако да $x_n - w$ тежи нули утолико спорије уколико је $k$ веће.

На пример, у трећем од примера наведених у тачки 2 је

$$f(x) = \frac{4}{4-x} = x - \frac{(2-x)^2}{4-x} = x + \frac{1}{2}(2-x)^2 + o\{(2-x)^2\}, \; x \to 2,$$

дакле, по среди је додир другог реда тј. $k=2$, тако да ред $\Sigma \frac{2}{n(n+1)}$ конвергира брзином $\frac{1}{n}$, као што је то заиста и случај.

Код примера

$$f(x) = 1 + \sin(x-1) = x + (1-x)\left\{1 - \frac{\sin(1-x)}{1-x}\right\}$$
$$= x + \frac{1}{6}(1-x)^3 + o\{(1-x)^3\}, \; x \to 1,$$

по среди је додир трећег реда, $k=3$, тако да овде приближна решења $x_n$ конвергирају брзином $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Из овог расматрања се види да је за геометриско проучавање конвергенције редова горе дефинисана функција $f(x)$ карактеристична како за конвергенцију, тако и за природу конвергенције тога реда, па би било од интереса, бар за извесне специалне класе редова, детаљније испитати везу између општег члана реда и ове функције.

---

## SUR INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE M. MILANKOVIĆ RELATIVE AUX SERIES GEOMETRIQUES

Par Jovan Karamata (Beograd)

L' auteur a montré que l' interprétation géométrique de M. Milanković sur la progression géométrique peut être même appliquée aux certaines séries de nature simple (série harmonique etc). En même temps, de cette interprétation on peut détérminer l' ordre de grandeur du reste des série considérés.