О ТЕОРЕМИ О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

ЈОВАН КАРАМАТА (Београд)

Први став о средњој вредности у свом најопштијем облику гласи:

Нека је функција $f(x)$ дефинисана и непрекидна у затвореном размаку (a, b). Ако постоји одређен извод $f'(x)$ за свако x отворена размака $(a+0, b-0)$, тада постоји најмање једно ξ тога размака тако да је

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ a<\xi<b.$$

У већини уџбеника овај се став изводи ослањајући се на низ општих ставова о реалним функцијама, тако да су ови докази доста дугачки.[1])

Један непосредан доказ овог става налази се код Г. Kowalewski-a: Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Leipzig 1910, стр. 177 - 179, а ослања се једино на чињеницу да непрекидна функција $f(x)$ узима најмање једанпут сваку вредност између $f(x_1)$ и $f(x_2)$ док x варира од x_1 до x_2.

Kowalewski прво показује да се у размаку (a, b) увек може наћи један размак (a', b') чија дужина није већа од половине датог размака а за који важи образац

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ако је само функција $f(x)$ непрекидна у размаку (a, b).[2])

---

[1]) Р. Кашанин, Виша математика I, Београд 1946, Ж. Марковић, Увод у вишу анализу, „Загреб 1947. Witting, Differentialrechnung, Berlin 1944, H. Rothe, Höhere Mathematik Wien 1921, etc.

[2]) Једно упрошћење овог поступка дао је Kowalewski у књизи: Lehrbuch der Differential — und Integralrechnung, Leipzig — Berlin 1928, примењујући га на доказ Rolle-ова става.

Полазећи од сличне чињенице овде ћемо показати да се доказ Kowalewski-а може скратити и прегледније извести, шта више и сам нешто проширити и то овако:

Нека је $f(x)$ нейрекидна функција у затвореном размаку (a, b). Ако за свако x отворена размака $(a+0, b-0)$ постоји леви извод $f'_{-}(x)$ и десни извод $f'_{+}(x)$ функције $f(x)$, тада постоји најмање једно ξ тога размака и два позитивна броја

$$p > 0,\ q > 0 \quad \text{са} \quad p+q=1$$

тако да буде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = p\, f'_{+}(\xi) + q\, f'_{-}(\xi). \tag{1}$$

Доказ. Ставимо краткоће ради,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = Q,$$

и разделимо тачкама a' и b' размак (a, b) у три једнака дела, тј.

$$a_{\prime} = a + \frac{b-a}{3}, \quad b' = a + 2\frac{b-a}{3},$$

тада је

$$\frac{1}{3}\left\{\frac{f(a')-f(a)}{a'-a} + \frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} + \frac{f(b)-f(b')}{b-b'}\right\} = Q, \tag{2}$$

и могу се појавити ова два случаја:

1° Или је

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} = Q.$$

2° Или то није случај, већ је, рецимо,

$$\frac{f(b)-f(a')}{b'-a'} > Q. \tag{3}$$

Тада један од израза

$$\frac{f(a')-f(a)}{a'-a} \quad \text{и} \quad \frac{f(b)-f(b')}{b-b'}$$

мора бити $< Q$; јер кад би ова била $\geqslant Q$, онда би, према (3), аритметичка средина (2) била $> Q$, што се противи са (2).

Ако, дакле посматрамо израз

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{са} \quad h = \frac{b-a}{3},$$

(2) се своди на

$$\frac{1}{3}\{\varphi(a) + \varphi(a') + \varphi(b')\} = Q, \tag{4}$$

па је, или

1° $$\varphi(a') = Q,$$

или

2° док x варира од a до a' (односно од a' до b') функција $\varphi(x)$ варира од

$$\varphi(a) = \frac{f(a') - f(a)}{a' - a} < Q$$

до

$$\varphi(a') = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} > Q,$$

(односно од

$$\varphi(a') = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} > Q$$

до

$$\varphi(b') = \frac{f(b) - f(b')}{b - b'} < Q).$$

Према томе, из непрекидности функције $f(x)$, односно $\varphi(x)$, следи да мора постојати једно x' између a и a' (односно a' и b'), тако да буде

$$\varphi(x') = Q.$$

Дакле, ако са a_1 и b_1 означимо у првом случају a' и b', а у другом x' и $x'+h$, долазимо до ове чињенице:

Ако је $f(x)$ непрекидна функција у затвореном размаку (a, b), тада у унутрашњости тог размака постоје увек два броја a_1 и b_1, $a < a_1$ и $b, < b_1$, тако да је

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{3}$$

и

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Применимо ли на размак (a_1, b_1) исто резоновање добићемо два броја a_2 и b_2 таква да је

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{3} = \frac{b - a}{9}$$

и

$$\frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Уопште, после n-тог поступка, добићемо бројеве a_n и b_n такве да је

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{3^n} \tag{5}$$

и

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{6}$$

Како се сваки од размака $(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ итд. налази у унутрашњости претходног размака, и како према (5) дужина ових размака тежи нули кад $n \to \infty$, то постоји број ξ (према Bolzano-Weierstrass-ову или неком њему еквивалентном ставу) који се налази у унутрашњости свих ових размака, тако да

$$a_n \to \xi \quad \text{и} \quad b_n \to \xi \quad \text{кад} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Написаћемо образац (6) у облику

$$p_n \frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}+q_n \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{8}$$

где је

$$p_n=\frac{b_n-\xi}{b_n-a_n}, \quad q_n=\frac{\xi-a_n}{b_n-a_n}$$

и

$$p_n+q_n=1. \tag{9}$$

Према претпоставци о егзистенцији левих и десних извода,

$$\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi} \to f_+'(\xi),$$

а

$$\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n} \to f'_-(\xi) \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

Одавде видимо две ствари.

Прво: ако је

$$f'_-(\xi)=f'_+(f)=f'(\xi) \tag{10}$$

и од обе стране обрасца (8) одузмемо (према (9)), идентитет

$$p_n f'(\xi)+q_n f'(\xi)=f'(\xi),$$

добивамо

$$p_n\left\{\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}-f'(\xi)\right\}+q_n\left\{\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}-f'(\xi)\right\}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi).$$

Пустимо ли овде да n тежи бесконачности, оба израза у витичастим заградама теже нули; како су пак p_n и b_n стално позитивни и <1, то цела лева страна горњег обрасца тежи нули, тако да његова десна страна мора бити једнака нули, тј.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{11}$$

Друго: Ако је

$$f'_-(\xi) \neq f'_+(\xi),$$

и од обе стране обрасца (8) одузмемо, на пример,

$$\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}$$

односно, према (8),

$$p_n \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n} + q_n \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n},$$

биће

$$p_n \left\{ \frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi} - \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n} \right\} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}.$$

Кад овде пустимо да $n\to\infty$, десна страна, према претпоставци, тежи одређеној граничној вредности

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_-(\xi),$$

а израз у витичастим заградама на левој страни тежи граничној вредности

$$f'_+(\xi) - f'_-(\xi) \neq 0,$$

зато мора и низ p_n тежити одређеној граничној вредности,

$$p_n \to p \text{ кад } n\to\infty,$$

па, према (9), и

$$q_n \to q \text{ кад } n\to\infty;$$

при томе је

$$p+q=1.$$

Према томе, ако у (8) пустимо да $n\to\infty$, добивамо образац (1), који, према (11), важи било да је (10) испуњено или не, а чиме је други од горе наведених ставова у потпуности доказан.

Београд, 1 фебруара 1950.

SUR LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Jovan Karamata, Beograd

Par une methode, semblable à celle employée par G. Kowalewski dans la preuve du théorème de Rolle („Lehrbuch der Differential — und Integralrechnung", Leipzig Berlin 1928 p. 62—63), l' auteur établit l'extension suivante de la formule des accroisséments finis:

Soit $f(x)$ une fonction continue dans l' intervalle fermée (a, b), qui admet une dérivée gauche $f_-(x)$ et une dérivée droite $f_+(x)$ pour

toutes les valeurs de x de l'intervalle auverte $(a+0, b-0)$. Allors il existent deux nombres positifs

$$p > 0, \quad q > 0, \quad avec \quad p+q=1$$

et au moins un ξ entre a et b tel que la formule

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = p f'_{+}(\xi) + q f'_{-}(\xi)$$

sait valable.