О ПРИНЦИПИМА ИНДУКЦИЈЕ

ЂУРО КУРЕПА (Загреб)

1. Међу принципима индукције свакако је најважнији:

Принцип потпуне (тоталне) индукције, а гласи овако: Ако нека тврдња зависи од природних бројева, па ако је она истинита за број 1; ако из истинитости тврдње за природни број n слиједи њена истинитогт за природни број $n+1$, онда је дотична тврдња истинита за сваки природни број.

Тај исти принцип можемо изрећи и овако: означимо ли са

$$N \tag{1.1}$$

скуп свих природних бројева, а са M скуп свих природних бројева за које је тврдња истинита, тада је наравно M дио скупа N:

$$M \subseteq N. \tag{1.2}$$

К томе су према горњему испуњена ова два услова:

1. I. $1 \in M$ (тј. тврдња је истинита за број 1);

1. II. из $n \in M$ слиједи $n+1 \in M$ (тј. чим је тврдња истинита за неки број n, истинита је она и за $n+1$).

Закључак је онда овај:

$$M = N \text{ (а не само } M \subseteq N).$$

Другим ријечима, код принципа тоталне индукције ради се о томе, да уз горња два услова 1.I., 1.II сваки $M \subseteq N$ нужно се подудара са читавим N. На тај начин, принцип исказује извјестан начин исцрпљивања скупа N:

$1 \in M$ (по својству I), $2 \in M$ (јер је $1 \in M$ па по II и $1+1 \in M$), $3 \in M$ (јер је $3=2+1$ па из $2 \in M$ по II слиједи $2+1 \in M$ итд.).

Видимо, да у својој суштини принцип потпуне индукције значи исто што и само *бројање*. Зато га многи математичари и стављају као основни логичко-математички суд, који се не може доказати. Само се притом ипак морамо запитати: „Шта су природни бројеви?"

Дефинишући природне бројеве као главне (кардиналне) бројеве *коначних* скупова може се ипак принцип тоталне индукције потпуно доказати (в. Курепа [2]). О тоталној индукцији види такођер: Б. Петронијевић [4] и М. Попадић [5].

2. Проблем исцрпљења задана скупа. Можемо поставити ово питање: нека је задан неки скуп S и његов дио M, дакле

$$M \subseteq S; \tag{2.1}$$

када смо осигурани да ће бити $M=S$ и тиме скуп S бити исцрпљен до своје последње тачке помоћу скупа M? Другим ријечима, шта је потребно и довољно па да из $M \subseteq S$ слиједи $M=S$?

Теорем 2. 1. *Да из $M \subseteq S$ слиједи $M=S$ треба, а и доста је да из система*[1])

$$X \subseteq M, \ X \neq S$$

слиједи $X_0 \subseteq M$ за бар један скуп $X_0 \supset X$. Другим ријечима, чим M садржи неки скуп X садржи он и још опсежнији скуп X_0, уколико већ скупом X није исцрпљена читава подлога S.

Доказ је ванредно прост.

Услов је потребан. Нека је $M=S$; ако је тада $X \subseteq M$, $X \neq S$ дакле $X \subset M$, садржи M и скуп $S \supset X$, јер је по хипотези $M=S$; према томе довољно је ставити $X_0=S$, па да се види да је услов теорема потребан.

Услов теорема је и довољан. Означимо наиме са Φ обитељ свих скупова $X \subseteq S$ који су садржани у M; према томе односи

$$X \subseteq S, \ X \subseteq M \tag{2.2}$$

те

$$X \in \Phi \tag{2.3}$$

међусобно су равноправни. Но, одатле непосредно слиједи, да је и спој

$$\bigcup_{x} X, \ (X \in \Phi), \tag{2.4}$$

тј. скуп свих тачака које се налазе у бар једном $X \in \Phi$, такођер садржан у M. Тврдимо да је скуп (2.4) идентичан са заданим скупом S.

У обрнутом случају, по условима теорема, постојао би један још опсежнији скуп

$$Y \tag{2.5}$$

(рецимо скуп $(2.4.)_0$ у горњој ознаци) са својством

$$Y \subseteq M.$$

[1]) Треба држати на уму да је по конвенцији празан скуп v садржан у сваком скупу.

Но тиме би по дефиницији скупа Φ било $Y \in \Phi$, па дакле и $Y \subseteq (2.4)$, противно томе да је $Y = (2.4)_0 \supset (2.4)$, јер је по претпоставци $(2.4) \subset S$.

Тиме је теорем 2.1 доказан.

Њиме се исказује, да се скуп S може исцрпсти преко својих дијелова. О томе какви су ти дијелови, теорем не каже ништа, нити у опћем случају може да штогод каже. Но, ако је скуп S извјесне специјалне грађе, моћи ће се нешто казати и о „комадима“ X преко којих можемо до последње тачке исцрпсти S. Нас ће овдје особито занимати случај, кад је скуп S снабдјевен извесним уређењем.

3. Опћи принцип индукције: исцрпљивање дјелимично уређених скупова: Нека је S одн. $(S; \leqslant)$ било какав дјелимично уређен скуп.[1]) Међу дијеловима скупа S истичу се тзв. *почетни комади скупа* S.

Дефиниција 3.1. Под почетним комадом дјелимично уређена скупа S разумијевамо сваки скуп $K \subseteq S$ који има ово својство: чим K садржи неку тачку x, садржи K и скуп $(-\infty, x)_S$ свих тачака из S које леже испред x, оперативно:

$$\text{из } x \in K \text{ слиједи } (-\infty, x)_S \subseteq K.$$

Празни скуп (vakuum) v као и сам скуп S сматрамо такођер (неправим) почетним комадом скупа S.

Слично се уводи појам завршних комада скупа S. Почетни и завршни комади зову се једним именом *крајњи комади скупа* S. Тако на пр. за сваки $a \ni S$ скуп $(-\infty, a)_S$ је одређен почетан комад од S; исто важи за скуп $(-\infty, a]_S$ свих $x \ni S$ за који је $x \leqslant a$.

Дефиниција 3.2. Празни скуп и скупови

$$(-\infty, x)_S, \ (-\infty, x]_S, \ (x \ni S)$$

зову се *једноставни* (*елементарни*) *почетни комади скупа* S.

За вјежбу нека читалац докаже да одстрањивањем из S неког почетног (завршног) комада преостаје одређен завршни (почетни) комад скупа S. Напоменућемо успут, да се поимање реза или пресјека или сецирање у скупу $(S; \leqslant)$ темељи на поимању *крајњих* комада тога скупа, јер се под опћим резом скупа $(S; \leqslant)$ разумијева свако растављање тога скупа на почетни (завршни) комад скупа и на одговарајући преостатак скупа S; у случају кад ниједан од та два скупа (компоненте реза) није пуст, говори се о Дедекиндовом резу.

---

[1]) У новије вријеме све више продире ова терминологија: уређен скуп ($\equiv$ досадашњи: дјелимично или парцијално уређен); потпуно (посве) уређен мјесто досадашњег: уређен; потпуно неуређен или анти-уређен: који нема различитих упоредљивих тачака.

Теорем 3.1. *(опћи принцип индукције за дјелимично уређене скупове). (в.* Курепа [1] п. 23 теор. 1*). Нека је S произвољан дјелимично уређен скуп; да из $M \subseteq S$ слиједи $M = S$, треба а и доста је, да скуп M има ово својство: из чињенице да M садржи извјестан почетан комад K скупа S слиједи, уколико већ није $K = S$, да M садржи извјестан почетни комад $K_0 \supset K$ скупа S.*

Доказ је врло једноставан и потпуно сличан са доказом теорема 2.1; сличност у доказивању темељи се на овој очигледној чињеници: *спој (унија) од било колико почетних комада дјелимично уређена скупа опет је одређен почетан комад тога скупа.*

Но почетан комад опћег скупа $(S; \leqslant)$ може имати врло замршен састав. Тако на пр. ако радимо с уређеним скупом R рационалних бројева, почетни се његов комад $(-\infty, 0)_R$ битно разликује од почетног његова комада $(-\infty, \sqrt{2})_R$; док је наиме први од њих могуће окарактеризирати помоћу једног јединог *члана из самог скупа* R, дотле то за други комад није могуће учинити (на сличној појави темељи се Дедекиндова теорија ирационалннх и реалних бројева).

Не улазећи у даља разматрања о уређеним скуповима, ограничимо се на потпуно уређене скупове. Може ли се можда сваки посве уређен скуп исцрпсти преко својих елементарних почетних комада? Наравно да може, јер је очигледно

$$S = \bigcup_x (-\infty, x]_S, \ (x \in S).$$

Но, то је врло специјалан начин одабирања почетних једноставних комада. Да ли се S потпуно исцрпљује, ако у теорему 3.1 претпоставимо, да су почетни комади о којима је ријеч елементарни? Не, како то показује примјер скупа R рационалних бројева и случај, када проматрамо *једино почетне комаде облика*

$$(-\infty, a_n)_R,$$

притом је $a_1, a_2, \ldots$ било који строго узлазан, а ограничен низ *рационалних* бројева који у скупу R не конвергира; ако је r реалан број према којем тежи низ a_n, можемо ставити $M = (-\infty, r)_R$ и увјерити се да M задовољава условy да чим M садржи извјестан *елементаран* поч. комад од R садржи M и још опсежнији почетни *елементаран* комад од R. А ипак није $M = R$.

Примједба 3. 1. Читамо ли у теореми 3. 1. свуда „завршан" мјесто „почетан", добије се опет исправна изрека[1]).

[1]) Наравно да се при исцрпљивању скупа можемо служити и са његовим завршним комадима; дефиниција ових је слична дефиницији првих. Усталом „завршан" у скупу $(s; \leqslant)$ је исто што и „почетан" у дуалном уређењу $(s; \geqslant)$ — (свуда мјесто $<$ и $>$ писати $>$ и $<$).

4. *Посве уређени скупови који се могу исцрпсти једноставним почетним комадима* (одсуство нутрашњих понора у S).

Дефиниција 4. 1. Вели се да је посве уређен скуп S без нутрашњих понора (lacune intérieure), ако код сваког Дедекиндског резања скупа S ($\equiv$ растављање скупа S на два пуна дисјунктна комада, од којих је један почетан, а други завршан), не може се десити, да нити прва компонента реза нема завршног нити друга компонента почетног елемента.

Дефиниција 4. 2. Вели се, да посве уређен скуп S има Борел-Хинчин-ово својство, ако за S вриједи овај начин исцрпљивања:

Претпоставка. Нека је $M \subseteq S$; нека надаље скуп M задовољава овим двама условима;

4. I M садржи бар један *елементаран* почетан комад скупа S;

4. II Ако M садржи *елементаран* почетни комад K скупа, па ако је $K \neq S$, постоји *елементаран* почетан комад K_0 скупа S са својством

$$K \subset K_0 \subseteq M.$$

Закључак: Тада је $M = S$.

Теорема 4. 1. *Да посве уређен скуп S буде без нутрашњих понора, треба, а и доста је да скуп S посједује* Борел-Хинчин-*ово својство* (исп. Курепа [1] п. 23. théor. 3).

И овога пута доказ је сличан са доказом теорема 2. 1., као што ћемо се одмах увјерити.

Услов теорема 4. 1. је нуждан: нека је S било какав потпуно уређен скуп са бар два елемента и без нутрашњих рупа; тврдимо, да скуп S посједује Борел-Хинчиново својство тј. да из $M \subseteq S$, 4. I, 4. II слиједи $M = S$.

Нека је наиме Y спој свих елем. поч. комада K скупа S за које је $K \subseteq M$; наравно Y је почетан комад скупа S, а садржан је у M:

$$Y \subseteq M.$$

Ако је $Y = S$, ствар је готова, јер из $S = Y \subseteq M \subseteq S$ слиједи $M = Y$. Но, мора бити $Y = S$.

Иначе би било $Y \subset S$; проматрајући тада рез којему је Y прва компонента, означујући са A скуп састављен од завршне тачке скупа Y и почетне тачке преостатка $S \setminus Y$, скуп A није празан (одсуство рупа у скупу S), па се свакако Y може окарактерисати помоћу једне тачке из A; другим ријечима, Y је елементаран почетни комад од S. Како је према претпоставци $Y \neq S$, то би на основу услова 4.II произлазило да постоји још већи поч. комад $Y_0 \supset Y$ за којега је $Y_0 \subseteq M$. А то је немогуће, јер је $K \subseteq Y$ за ***сваки*** поч. ел. комад K скупа S за који је $K \subseteq M$, па би зато било $Y_0 \subseteq Y$, што је апсурд.

Услов теорема је довољан. У обрнутом случају, постојао би растав скупа S на поч. комад

$$P \supset \nu \tag{4.1}$$

без завршног члана и преостатак

$$S \setminus P \supset \nu \tag{4.2}$$

без почетног елемента. Према томе, P би био почетан комад скупа S, али не једноставан. Ставимо ли

$$P = M, \tag{4.3}$$

тада видимо, да је $M \subseteq S$ и да је задовољен услов 4.I јер из (4.1) слиједи да постоји $x \in P$ дакле $x \in M$ са својством $(-\infty, x]_S \subseteq P$. Но, задовољен је и услов 4.II; нека је наиме K произвољан поч. елем. комад од S са својством $K \subseteq M$ дакле $K \subset M$ (јер, како видјесмо, M није елементаран). Како је K једноставан, постоји тачка $z \in S$ дакле и $z \in M$ тако да све тачке из K буду $\leqslant z$; но како, по хипотези, P нема завршне тачке, нека је $z_0 \in P$ и $z < z_0$; тада је довољно ставити

$$K_0 = (-\infty, z_0]_S$$

па да се види, да је испуњен и услов 4.II.

Како скуп S посједује, по хипотези, Борел-Хинчин-ово својство, одатле би морао слиједити и закључак: $M = S$ тј. $P = S$, у противности са претпоставком (4.2). Другим ријечима претпоставка о унутрашњој провалији скупа S није исправна. Тиме је теорем 4.1 доказан.

Примједба 4.1. Из теорема 4.1. произлази исправна изрека читајући у њему свуда „завршан" мјесто „почетан".

5. *Аналогон потпуне индукције.* У § 4 исцрпљивали смо скуп S тако да смо с произвољна елем. почетног комада K скупа S коракнули на један шири поч. ел. комад K_0, истог скупа S; но у опћем случају, скуп

$$K_0 \setminus K \tag{5.1}$$

тако придошлих елемената је многобројан. Шта ће бити, ако претпоставимо да је скуп (5.1) вазда једночлан одн. пуст? Сличан је случај код тоталне индукције, јер код ње за сваки $n \in N$ са поч. комада $(-\infty, n]_N$ прелазимо на $(-\infty, n+1]_N$ довлачењем једино $n+1$ као новог елемента у први поч. комад.

Теорем 5.1. *За потпуно уређен скуп S слиједећа два својства су међусобно равноправна:*[1])

[1]) Добро је споменути да је свако од тих двају својстава равноправно са овим својством:

Скуп S је сличан дијелу уређена скупа цијелих бројева.

Прво својство. Сваки Дедекиндов рез скупа S показује ***скок*** тј. прва компонента реза има завршан члан, а друга компонента почетан члан (према томе у скупу S нема нити нутрашњих провалија нити граничних тачака).[2])

Друго својство Важи слиједеће закључивање:

Претпоставка. Ако је $M \subseteq S$ па ако M задовољава ова два услова:

5.I M садржи бар један елем. поч. комад скупа S;

5.II. Ако M садржи почетан ел. комад K скупа S, па ако је $K \neq S$, тада постоји поч. елементаран комад K_0 скупа S са својством $K \subset K_0 \subseteq M$ и да $K_0 \setminus K$ буде једночлан.

Закључак: Тада је $M = S$.

Доказ се води као код теорема 4.1.

Примједба 5.1. Из теорема 5.1 произлази исправна чињеница надомјештавајући свуда „почетан" са „завршан".

6. ***Принцип трансфинитне индукције (испрпљивање посве добро уређених скупова).*** Једно од основних својстава скупа N природних бројева јесте, да је он ***посве добро уређен*** у смислу, да сваки дио X скупа N, уколико није празан, посједује ***свој властити почетни елемент.***

Уистини, ако је $1 \in X$, ствар је очигледна; ако пак није $1 \in X$, поставимо

$$X' = U_n [n, \infty)_N, (n \in X).$$

Очигледно, X' је завршан комад скупа N. Претпоставимо да X нема почетног члана, тада га не би имао нити X'; но то би значило да из $m \in X'$ нужно слиједи и $m-1 \in X'$ (иначе би m био поч. елемент у X' дакле и у X). Проматрајмо скуп

$$N \setminus X'; \tag{6.2}$$

према претпоставци, он садржи број 1:

$$1 \in (6.2); \tag{6.3}$$

надаље, докажимо да би из

$$n \in (6.2) \text{ слиједило } n+1 \in (6.2). \tag{6.4}$$

У обрнутом наиме случају постојао би извјестан $n \in (6.2)$ тако да не буде $n+1 \in (6.2)$ него дакле $n+1 \in X'$; одатле би даље произлазило, да је $n+1$ почетан члан у X' дакле и у X, противно хипотези да X нема поч. члана.

Но, из односа (6.2) - (6.4) произлазило би на основу принципа тоталне индукције да је $(6.2) = N$, што је апсурд, јер скуп X' није празан.

[2]) Свака тачка a скупа S са својством, да сваки интервал скупа S садржи бар једну тачку из $S \setminus \{a\}$ чим у својој нутрини садржи тачку a зове се гранична тачка или гомилиште скупа S.

Врло је важан разред посве добро уређених скупова, јер је њихово изучавање непосредно проширење изучавања самих природних бројева. За њих постоји карактеристичан начин исцрпљења, као што то показује.

Теорем 6.1. *Нека* је S *било какав посве уређен скуп с почетним чланом; тада су слиједећа два својства еквивалентна*:

Прво својство: *Скуп* S *је посве уређен;*

Друго својство: *За скуп* S *важи слиједеће закључивање* (принцип трансфинитне индукције):

Претпоставка. *Нека је* $M \subseteq S$ *и к томе:*

6.I. *Скуп* M *садржи почетну тачку скупа* S.

6.II. *Из* $x \in S$ *и* $(-\infty, x)_S \subseteq M$ *слиједи* $x \in M$.

Закључак: $M = S$.

Према томе, код трансфинитне индукције закључујемо на чињеницу да ли нека тачка $x \in S$ лежи или не лежи у M из сличног питања за *скуп свих претходника* дотичног елемента x.

Услов теорема је нуждан: сваки посве добро уређени скуп допушта принцип тоталне индукције тј. ако $M \subseteq S$ задовољава 6.I и 6.II, тада је $M = S$.

Стварно, ставимо

$$P = U\,(-\infty, x]_S, \tag{6.1}$$

при чему x пролази свима елементима скупа S за које је

$$(-\infty, x]_S \subseteq M; \tag{6.2}$$

свакако је P почетан комад скупа S; тврдимо, да је $P = S$. У обрнутом случају било би $P \subset S$, па би скуп $S \setminus P$ као непразан дио посве уређена скупа S посједовао свој почетни члан, рецимо p. Но, како је P поч. комад, било би

$$(-\infty, p]_S = P, \ p \text{ non} \in P; \tag{6.3}$$

према услову 6.II, одатле би закључили, да је и $p \in M$, што значи, да је и скуп $(-\infty, p]_S$ поч. комад од S садржан у M, одакле и $p \in M$, противно другој релацији у (6.3).

Услов теорема 6.1 је довољан: ако S има први елемент и допушта принцип транфинитне индукције, S је посве добро уређен.

У обрнутом случају, S не би био добро уређен. То значи да би постојао један непразан скуп $X \subseteq S$ без својега почетног елемента. Наравно, $X \subset S$, јер по претпоставци S има свој први елемент. Проматрајмо множину M свих тачака $t \in S$ са својством да је t испред читава скупа X дакле

$$(t, \infty)_S \supseteq X. \tag{6.4}$$

Докажимо, да би скуп M задовољавао 6.I и 6.II. Да је поч. тачка од S садржана у M, то је очигледно, јер би иначе та поч.

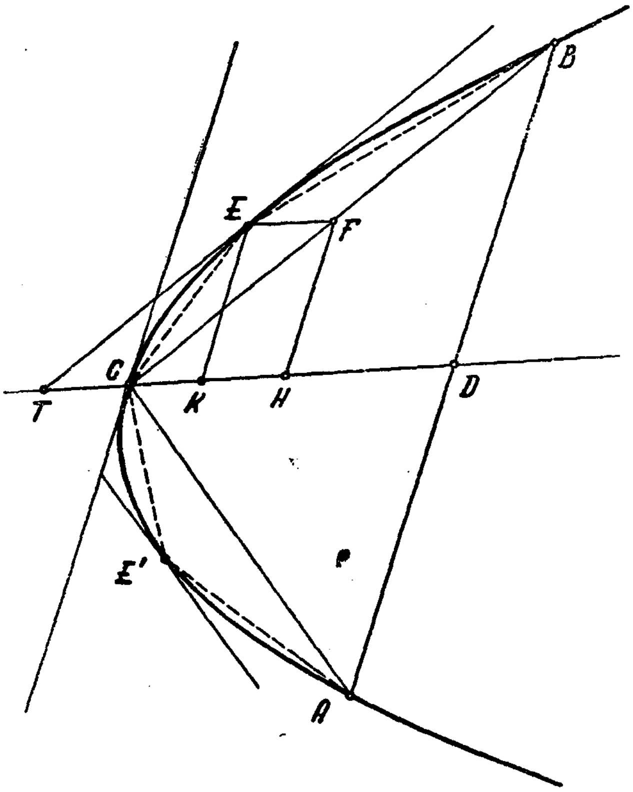
тачка била поч. тачком и у X. Докажимо, да M задовољава и 6.II. Најприје, M је очигледно почетан комад скупа S; па нека је дакле

$$x \in S \text{ и } (-\infty, x)_S \subseteq M;$$

тврдимо да је $x \in M$; у обрнутом случају, била би тачка x почетном у скупу $S \setminus M$, дакле и почетном тачком скупа X, противно хипотези да X нема поч. тачке.

По принципу транфинитне индукције, закључили би, да је $M = S$, што је немогуће, јер скуп $S \setminus M$ садржи читав пуни скуп X.

Тиме је теорем 6.1 потпуно доказан.



Сл. 1

7. *Ексхаустија као принцип индукције.* Већ су се стари Грци служили једном врстом исцрпљивања извесних једноставнијих скупова. У том погледу, класичан је примјер одређивање површине параболиног сегмента. Ту се посматра дирка (тангента) паралелна са међашњом тетивом AB сегмента; споји ли се тако добивена тачка додира C са крајевима дужи AB, распада се сегмент на два нова сегмента и један трокут. Тиме што смо добили ABC сматраћемо да је учињен први корак исцрпљивања.

Други корак исцрпљивања састојаће се у посматрању суме S_1 површинâ оних двају трокутова, што их добијемо примијењујући почетни процес на сваком од оба преостала сегмента; зна се да је $S_1 = \frac{1}{4} ABC$; трећи ће нас корак довести до суме S_2 површина од 4 нова трокута; опет је $S_2 = \frac{1}{4} S_1$ итд. итд. На тај начин за површину P параболиног сегмента имамо

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s}{4^n} = \frac{4}{3} s$$

где је s површина трокута ABC.

Додуше, тако добивени трокутови не исцрпљују сваку тачку заданог одреска параболе; но исцрпљују они читаву *нутрину* одреска, а то је довољно, кад проматрамо саму површину одреска.

Уосталом, примијетимо да се читав одрезак параболе (лук укључен) ни не може исцрпсти помоћу трокутова који се не преклапају, јер овакових трокутова има највише пребројиво много, сваки од њих садржи највише три тачке лука, а самих тачака на луку има континум много дакле непребројиво много.

Математички Институт
Природословно-математичког факултета.
Загреб

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kurepa G. Ensembles ordonnés et ramifiés; Thèse, Paris, 1935 (*Publ. Math. Univ. Beograd*, *4* (1935), 1—138).

[2] Kurepa G. Démonstration du principe de l'induction totale (*Comptes rendus Ac, Sci, Paris, 230* (1950), 703—705).

[3] Курепа Ђ. Појам бинарне релације. Однос равноправности. Уређајни односи (*Весник Друштва маш. физ. Н. П. Србије I 3—4* (1949), 53—58).

[4] Б. Петронијевић. Les lois fondamentales de l'addition arithmétique et le principe de l'induction mathématique (*Revue de métaphysique et de Morale*, 192, 1—8).

[5] Попадић М. Математичка индукција (*Посебна издања Фил. фак. Скопље, књ. 2* (1950), стр. 50).

ÜBER DIE PRINZIPIEN DER INDUKTION

Von Đuro Kurepa (Zagreb)

Verfasser befasst sich mit der Frage wann aus $\pi \subseteq S$ auf die Identität der Mengen π und S geschlossen werden kann. Folgende Fälle werden betrachtet: 1) S ist eine beliebige Menge; 2) S ist telweise geordnet; 3) S ist geordnet und lückenlos; 4) S ist wohlgeordnet (transfinite Induktion) und schliesslich 5) S ist die Menge der natürlichen Zahlen (totale Induktion).