СФЕРНЕ КРИВЕ

ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ (Београд)

1. Криве

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$$

и површине

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v) = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\}$$

о којима је овде реч регуларне су у смислу диференцијалне геометрије. У погледу кривих то значи да функције $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имају изводе по t произвољно великог реда и да је

$$|\dot{\mathfrak{r}}(t)| \neq 0,$$

а у погледу површина да функције $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ имају парцијалне изводе по u и v произвољно великог реда и да је у свим тачкама посматране површине

$$|\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v| \neq 0,$$

тј. да се мрежа површине састоји искључиво из регуларних тачака.

Затворену криву која нема вишеструких тачака зваћу „затворена крива", а „затворену криву" која лежи на лопти полупречника 1 зваћу „сферна крива".

Сферне индикатрисе тангенте и главне нормале неке криве зваћу, краткоће ради, „сферна слика тангенте" и „сферна слика главне нормале".

У току даљег излагања претпоставља се да затворене криве о којима је овде реч имају особину да су њихове сферне слике (тангенте и главне нормале) сферне криве у смислу напред дате дефиниције.

2. Године 1842 C. G. Jacobi[1]) доказао је ову теорему:

J. *Сферна слика главне нормале неке затворене криве дели површину лопте на два једнака дела.*

---

[1]) Jacobi C. G. J., 1842, Werke, Bd. 7, S. 39.

Године 1934 приметио је W. Fenchel[2]) да је теорема J садржана у овој теореми:

F_1. *Сферна слика тангенте неке сферне криве дели површину лопте на два једнака дела.*

У § 5 показаћу да важи инверзија ове теореме. На тај начин долазимо до ове теореме:

А. *Да би сферна крива $\mathfrak{r}$ била сферна слика тангенте неке сферне криве потребно је и довољно да крива $\mathfrak{r}$ дели површину лопте на два једнака дела.*

Ако криволиниски интеграл торзије τ дуж затворене криве, т ј.

$$T = \oint \tau \, ds,$$

назовемо „тотална торзија", тада важи ова теорема W. Fenchel-a[3]):

F_2. *Тотална торзија дуж затворене линије кривине једнака је нули.*

Као што је W. Fenchel приметио, ова теорема у вези са Gauss-Bonnet-овом теоремом доводи до теореме F_1.

Но и независно од ове примене, теорема F_2 је интересантна из овог разлога: Како је на лопти (и у равни) свака крива — линија кривине, то је дуж сваке сферне (и затворене равне) криве тотална торзија једнака нули. Поставља се питање да ли је ова особина карактеристична за лопту (и раван), тј. да ли су ове површине једине које имају ову особину. У § 6 доказаћу да је заиста тако, тј. да важи ово:

Ако је дуж сваке затворене криве неке површине тотална торзија једнака нули, онда је ова површина или део лопте или део равни.

У вези са напред реченим долазимо до ове теореме:

В. *Да би нека површина била део лопте или део равни, потребно је и довољно да је тотална торзија дуж сваке затворене криве једнака нули.*[4])

3. За разумевање даљег излагања потребно је да читалац познаје следеће класичне теореме, чији се докази налазе у скоро сваком уџбенику диференцијалне геометрије.

1. (Gauss-Bonnet-ова теорема на лопти). Ако са σ обележимо дужину лука сферне криве, са D онај део лопте који лежи са

[2]) Fenchel W., Über einen Jacobischen Satz der Kurventheorie, *Tohoku Math. J.* **39**(1934) p. 95—97.

[3]) Loc. cit. [2])

[4]) Scherrer, *Vierteljahr. Naturforsch. Ges. Zürich* 85 (1940) p. 40—46.

леве стране сферне криве, а са k_g геодезиску кривину сферне криве, онда је

$$\oint k_g \, d\sigma = 2\pi - \iint_D d\,O\,,$$

при чему $d\,O$ обележава површински елемент лопте.

2 (Bonnet). Торзија τ, геодезиска торзија τ_g и угао ϑ између главне нормале криве и нормале на површину у којој крива лежи везани су једначином

$$\tau = \tau_g - \frac{d\,\vartheta}{d\,s} \tag{1}$$

при чему s означава дужину лука уочене криве.

3 (Bonnet). Ако са E, F и G обележимо Gauss-ове елементе прве врсте, а са L, M и N Gauss-ове елементе друге врсте, онда је

$$\tau_g = \frac{\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & L\,du + M\,dv \\ F\,du + G\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix}}{d\,s^2 \sqrt{EG - F^2}}\,. \tag{2}$$

4. Пре него што пређем на доказ ставова A и B, показаћу целине ради: ad 1^0, да је теорема J садржана у теореми F_1; ad 2^0, да је теорема F_2 последица Bonnet-ових теорема 2 и 3; ad 3^0, да је теорема F_1 последица (али не непосредна) теорема F_2.

1^0 Обележимо са $\mathfrak{t} = \mathfrak{r}'(s)$ орт тангенте уочене затворене криве $\mathfrak{r}(s)$. а са σ дужину лука орта $\mathfrak{t}$. На основу теореме F_1 сферна слика тангенте криве $\mathfrak{t}$ тј. орт $\dfrac{d\,\mathfrak{t}}{d\sigma}$ дели површину лопте на два једнака дела. Међутим, орт $\dfrac{d\mathfrak{t}}{d\sigma}$ је орт главне нормале криве $\mathfrak{r}(s)$.

2^0 Дуж линије кривине геодезиска торзија је једнака нули (јер је по дефиницији дуж линије кривине бројитељ десне стране обрасца (2) једнак нули). Због (1) је, дакле, дуж затворене линије кривине

$$T = \oint \frac{d\vartheta}{d\,s} d\,s = \vartheta_1 - \vartheta_0$$

при чему је ϑ_0 угао између главне нормале и нормале на површину, а ϑ_1 угао између истих правих након обиласка затворене линије кривине. Дакле,

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \pm 2\,k\,\pi$$

где је k неки цео број.

Дуж линије кривине центри кривина нормалних пресека (у смеру тангенте) леже с једне стране површине. Осим тога у свакој тачки исте криве центри кривина равних пресека (у смеру тангенте) леже у унутрашњости лопте која пролази кроз уочену тачку криве, а центар јој се поклапа са центром кривине нормалног пресека (Meusnier-ова теорема). То значи да центри кривине линије кривине леже стално с једне стране површине. Стога је дуж линије кривине стално или $-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Отуда следи да је $k=0$.

3^0 Ако је $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ нека сферна крива, а $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}(\sigma)$ сферна слика њене тангенте (при чему s обележава дужину лука криве $\mathfrak{r}$ а σ дужину лука криве $\mathfrak{t}$), тада постоји таква функција $\alpha(\sigma)$ да се крива $\mathfrak{r}$ може написати у облику

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{t}(\sigma)\, \alpha'(\sigma)\, d\sigma, \tag{3}$$

при чему је $\mathfrak{r}_0$ неки стални орт.

Заиста, ако је веза између s и σ дата једначином $s=\alpha(\sigma)$, тада је

$$\frac{ds}{d\sigma}=\alpha'(\sigma),$$

па је

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma}=\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=\mathfrak{t}(\sigma)\, \alpha'(\sigma), \tag{4}$$

одакле се интеграцијом добива образац (3).

Како је у нашем случају орт $\mathfrak{t}$ уједно орт нормале лопте на којој лежи крива $\mathfrak{t}$, то је геодезиска кривина криве $\mathfrak{t}$ дата једначином

$$k_g=(\mathfrak{t}_\sigma\, \mathfrak{t}_{\sigma\sigma}\, \mathfrak{t}),$$

јер је, као што је познато, геодезиска кривина мешовити производ вектора $\mathfrak{t}_\sigma, \mathfrak{t}_{\sigma\sigma}$ и орта нормале на површину.

Због (4) је

$$\mathfrak{r}_{\sigma\sigma}=\mathfrak{t}_\sigma\, \alpha'+\mathfrak{t}\alpha''$$

и

$$\mathfrak{r}_{\sigma\sigma\sigma}=\mathfrak{t}_{\sigma\sigma}\, \alpha'+2\, \mathfrak{t}_\sigma\, \alpha'+\mathfrak{t}\alpha'''.$$

Дакле

$$(\mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma\sigma})=(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_\sigma\, \mathfrak{t}_{\sigma\sigma})\, \alpha'^3$$

и

$$(\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}_{\sigma\sigma})^2=(\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}_\sigma)^2\, \alpha'^4=\alpha'^4,$$

јер је $\mathfrak{t}_\sigma$ орт тангенте орта $\mathfrak{t}$, па је $\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}_\sigma$ јединичан вектор.

Према томе, ако са τ обележимо торзију криве $\mathfrak{r}$, биће (с обзиром да је $\alpha'(\sigma)\neq 0$)

$$\tau=\frac{(\mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma\sigma})}{(\mathfrak{r}_\sigma\times\mathfrak{r}_{\sigma\sigma})^2}$$

$$=\frac{(\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_\sigma\, \mathfrak{t}_{\sigma\sigma})}{\alpha'(\sigma)}.$$

Дакле

$$k_g\, d\sigma = -\tau\, ds,$$

па према томе и

$$\oint k_g\, d\sigma = -\oint \tau\, ds.$$

При томе је леви криволиниски интеграл узет дуж сферне криве $\mathfrak{t}$, а десни дуж сферне криве $\mathfrak{r}$. Како је на лопти, као што смо већ рекли, дуж сваке затворене криве тотална торзија једнака нули, то је десни интеграл једнак нули. Стога је, на основу Gauss-Bonnet-ове теореме

$$\int\limits_D d\omega = 2\pi,$$

при чему D означава онај део лопте који лежи са десне стране сферне криве $\mathfrak{t}$. То значи, сферна крива $\mathfrak{t}$ дели површину лопте на два једнака дела, што је и требало доказати.

5. Доказ теореме А. Доказаћу прво: *Нека је* $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma)$ *нека сферна крива при чему је* σ *дужина њеног лука; ако са* $\alpha = \alpha(\sigma)$ *обележимо неку произвољну функцију* („произвољну" у смислу диференцијалне геометрије) *и ставимо*

$$\beta = \beta(\sigma) = \int_0^\sigma (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma})\, d\sigma, \tag{5}$$

онда је сферна крива $\mathfrak{r}$ *сферна слика главне нормале криве*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\sigma) = -\int_0^\sigma (\mathfrak{r}_\sigma \cos\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta)\, \alpha\, d\sigma. \tag{6}$$

(Важи и обратно, тј, ако је крива $\mathfrak{r}$ сферна слика главне нормале неке криве $\mathfrak{R}$, тада постоји таква функција $\alpha = \alpha(\sigma)$ да се крива $\mathfrak{R}$ може написати у облику (5). Међутим, за доказ става А ово нам није потребно.)

Ако диференцијал дужине лука криве $\mathfrak{R}$ обележимо са ds, имаћемо, с обзиром на (6),

$$\begin{aligned} ds &= \pm |\mathfrak{R}_\sigma(\sigma)|\, d\sigma \\ &= \pm \sqrt{(\mathfrak{r}_\sigma \cos\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta)^2}\, |\alpha|\, d\sigma \\ &= \pm |\alpha(\sigma)|\, d\sigma, \end{aligned}$$

па је

$$\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \pm(-\mathfrak{r}_\sigma \cos\beta - (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta).$$

Због $\mathfrak{r}_\sigma^2 = 1$ је $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{r}_\sigma \cdot \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} = 0$; дакле

$$\mathfrak{r}_\sigma = \lambda\, (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}), \tag{7}$$

где је λ неки скалар. Како је, због (5),

$$\beta' = (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}),$$

то скаларним множењем једначине (7) са $\mathfrak{r}_\sigma$ добивамо $\lambda = -1/\beta'$ па је $\beta' \mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} \times \mathfrak{r}$. Дакле

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_\sigma &= \pm \{ -\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} \cos\beta - (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} \times \mathfrak{r}) \sin\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \sin\beta - (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \cos\beta) \beta' \} \\ &= \mp \{ \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \beta' \} \cos\beta . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Због $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_\sigma = 0$ и $\mathfrak{r}_\sigma^2 = 1$ је $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} = -1$, дакле

$$\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r} = \lambda (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}) \times \mathfrak{r} = \lambda (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} - \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}) \mathfrak{r}) = \lambda (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + \mathfrak{r}),$$

што заједно са (8) и $\lambda\beta' = -1$ даје

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}_\sigma &= \{ \mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + \lambda (\mathfrak{r}_{\sigma\sigma} + \mathfrak{r}) \beta' \} \cos\beta \\ &= -\mathfrak{r} \cos\beta . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ако се $\mathfrak{n}$ обележимо орт главне нормале криве $\mathfrak{R}$, онда је по дефиницији

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{t}_s / |\mathfrak{t}_s| = \pm \mathfrak{t}_\sigma / |\mathfrak{t}_\sigma| ,$$

па је, с обзиром на (9), $\mathfrak{n} = \pm \mathfrak{r}$, што је и требало доказати.

Како је $\mathfrak{r}$ орт тангенте орта $\dfrac{d\,\mathfrak{R}}{d\,s}$, то да бисмо доказали теорему A, треба доказати још ово:

Ако сферна крива $\mathfrak{r}$ дели површину лопте на два једнака дела, онда је сферна слика тангенте криве $\mathfrak{R}$, која је дефинисана обрасцима (5) и (6), затворена крива.

Како по претпоставци сферна крива $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma)$ дели површину лопте на два једнака дела, то је

$$\int_D d\,O = 2\pi ,$$

При томе смо са D обележили онај део лопте који лежи с десне стране сферне криве $\mathfrak{r}$. Отуда следи на основу Gauss-Bonnet-ове теореме да је

$$\oint k_g \, d\sigma = 0. \tag{10}$$

Како је орт $\mathfrak{r}$ уједно и орт нормале на лопту на којој крива лежи, то је

$$k_g = (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}).$$

Према томе, ако са σ_0 обележимо дужину сферне криве $\mathfrak{r}$, онда (10) добива овај облик:

$$\int_0^{\sigma_0} (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_\sigma\, \mathfrak{r}_{\sigma\sigma}) \, d\sigma = 0 .$$

С обзиром на (5) то значи да функција $\beta(\sigma)$ задовољава услов

$$\beta(0) = \beta(\sigma_0),$$

Према томе $\beta(\sigma)$ је периодична функција са периодом σ_0. Отуда следи да је орт тангенте криве $\mathfrak{R}$, тј. орт

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \mp \{ \mathfrak{r}_\sigma \cos\beta + (\mathfrak{r}_\sigma \times \mathfrak{r}) \sin\beta \}$$

периодичан орт, тј. сферна слика тангенте криве $\mathfrak{R}$ је затворена крива.

6. Доказ теореме В. Свака затворена крива посматране површине може се написати у облику

$$u = u(t; \eta), \quad v = v(t; \eta)$$

При томе је η параметар породице кривих. Параметар t се може тако изабрати да за свако η буде

$$u(0; \eta) = u(1; \eta) \quad \text{и} \quad v(0; \eta) = v(1; \eta)$$

и

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \neq 0$$

При томе s обележава дужину лука уочене криве. На тај начин Bonnet-ов образац (2) добива облик:

$$\begin{aligned}
\tau_g\, ds &= \{ (EM - FL)\dot{u}^2 + (EN - LG)\dot{u}\dot{v} + (FN - MG)\dot{v}^2 \} \frac{ds}{\dot{s}^2 \sqrt{EG - F^2}} \\
&= \{ A\dot{u}^2 + 2B\dot{u}\dot{v} + C\dot{v}^2 \} \frac{dt}{\dot{s}} \\
&= F(u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dot{s})\, dt.
\end{aligned}$$

Дакле

$$T = \int_0^1 F(u, v, \dot{u}, \dot{v}, \dot{s})\, dt.$$

По претпоставци сваки од ових интеграла биће једнак нули, тј. свака затворена крива даваће интегралу T „екстремну вредност“ једнаку нули. Стога ће Euler-ове једначине

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{u}} - F_u = 0, \quad \frac{d}{dt} F_{\dot{v}} - F_v = 0, \quad \frac{d}{dt} F_{\dot{s}} - F_s = 0$$

овог „вариационог проблема“ (са граничним условима $u(0) = u(1)$ и $v(0) = v(1)$) бити индентички задовољене за све „дозвољене“ функције u и v (тј. затворене криве које леже на површини).

Прве две Euler-ове једначине изгледају овако:

$$A_v \dot{u}\dot{v}\dot{s} + (B_v - C_u)\dot{u}^2 \dot{s} + A\ddot{u}\dot{s} + B\ddot{v}\dot{s} - A\dot{u}\ddot{s} - B\dot{v}\ddot{s} = 0$$

и

$$(B_u - A_v)\dot{u}^2 \dot{s} + C_u \dot{u}\dot{v} + B\ddot{u}\dot{s} + C\ddot{v}\dot{s} - B\dot{u}\ddot{s} - C\dot{v}\ddot{s} = 0.$$

Како функције u и v можемо бирати по вољи, то горње једначине могу бити задовољене само онда ако су сви њихови коефицијенти идентички једнаки нули. Понаособ мора бити

$$A \equiv B \equiv C \equiv 0,$$

тј.

$$E M - F L \equiv E N - L G \equiv F N - M G \equiv 0.$$

Отуда следи да је дискриминанта једначине

$$(E G - F^2)\frac{1}{R^2} - (E N - 2F M + L G)\frac{1}{R} + (L N - M^2) = 0 \tag{11}$$

идентички једнака нули. Наиме

$$(E N - 2 F M + L G)^2 - 4 (E G - F^2)(L N - M^2)$$
$$\equiv (E N - L G)^2 - 4 (E M - F L)(F N - M G) \equiv 0.$$

Једначина (11) је једначина главних полупречника кривине. Према томе су на целој површини оба главна полупречника кривине између себе једнака, тј. посматрана површина се састоји искључиво из кружних тачака. Како су као што је познато, лопта и раван једине површине које имају ову особину, то је наша површина или део лопте или део равни.

ÜBER GESCHLOSSENE KURVEN AUF DER KUGEL

Von Vojislav G. Avakumović (Beograd)

Bemerkungen über die W. Fenchelsche Fassung des Jacobischen Satzes über das Hauptnormalenbild einer geschlossenen und doppelpunktlosen Kurve. Der Fenchelsche Satz F_1: *Das Tangentenbild einer geschlossenen sphärischen Kurve begrenzt zwei flächengleiche Teile der Einheitskugel*, wird folgendermassen ergänzt (Satzt A): *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass die sphärische Kurve* $\mathfrak{x}$ *das Tangentenbild einer geschlossenen und doppelpunktlosen sphärischen Kurve sei — ist, dass* $\mathfrak{x}$ *zwei flächengleiche Teile der Einheitskugel begrenzt.*

Anschliessend an den Fenchelschen Satz F_2: *Das Integral der Windung einer geschlossenen Krümmungslinie über die Bogenlänge ist gleich Null*, wird bewiesen (Satz B): *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass eine Fläche ein Stück einer Kugel bzw. Ebene sei — ist, dass das Integral der Windung längs jeder geschlossenen Flächenkurve gleich Null ist.* (Satz von Scherrer).