О НЕКИМ ПРОБЛЕМИМА СМЈЕШТАВАЊА

ДАНИЛО БЛАНУША (Загреб)

Нека је нека плоха у тродимензионалном еуклидском простору задана једнаџбама

$$x=f_1(u,v),\quad y=f_2(u,v),\quad z=f_3(u,v), \tag{1}$$

гдје су x, y, z Картезијеве правокутне координате у простору, а u и v параметри (Gauss-ове координате) на плохи. Квадрат линијског елемента у простору дан је изразом

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{2}$$

Уврстимо ли за диференцијале изразе

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{\partial f_1}{\partial u}du+\frac{\partial f_1}{\partial v}dv,\\ dy&=\frac{\partial f_2}{\partial u}du+\frac{\partial f_2}{\partial v}dv,\\ dz&=\frac{\partial f_3}{\partial u}du+\frac{\partial f_3}{\partial v}dv, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

добивамо за квадрат линијског елемента на плохи диференцијалну форму

$$ds^2=g_{11}du^2+2g_{12}du\,dv+g_{22}dv^2, \tag{3}$$

гдје величине g_{11}, g_{12}, g_{22} значе

$$\left.\begin{aligned} g_{11}&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\right)^2,\\ g_{12}&=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}+\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v},\\ g_{22}&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Овом је диференцијалном формом одређена геометрија на плохи, па кажемо, да је тиме дана метрика плохе, индуцирана метриком (2) смјештајног (амбијентног) простора.

Но може се на неком ограниченом дијелу плохе умјетно дефинирати и било која друга метрика тиме, да се по вољи одаберу неке функције $\bar{g}_{11}$, $\bar{g}_{12}$, $\bar{g}_{22}$ варијабла u, v и сматра, да је квадрат линијског елемента

$$ds^2 = \bar{g}_{11}\, du^2 + 2\, \bar{g}_{12}\, du\, dv + \bar{g}_{22}\, dv^2 .$$

Тиме онда на тој плохи вриједи и друкчија геометрија, која одговара одабраном изразу за линијски елемент, односно према томе одабраној дефиницији за дуљину $\int ds$ лука било које кривуље. Но диференцијална форма за ds^2 одређује само карактер геометрије у малом, док својства геометрије у великом, на пр. на некој затвореној плохи, могу бити различита. Тако се на пр. у не превеликим дијеловима плохе тзв. елиптичка геометрија (једна од нееуклидских геометрија) не разликује од сферне геометрије, која вриједи на кугли на темељу метрике индуциране од еуклидског смјештајног простора, у којем се кугла налази. Назовемо ли у аналогији с еуклидском геометријом „правцима" геодетске линије на некој плохи, тј. кривуље, које у смислу рачуна варијација задовољавају захтјев $\delta \int ds = 0$, бит ће на кугли главне кружнице „правци". Два различита правца сијеку се онда увијек у двије точке. У елиптичкој геометрији, напротив, два се правца сијеку само у једној точки.

Из функција g_{11}, g_{12}, g_{22} може се саградити израз, који се зове Gauss-ова закривљеност K:

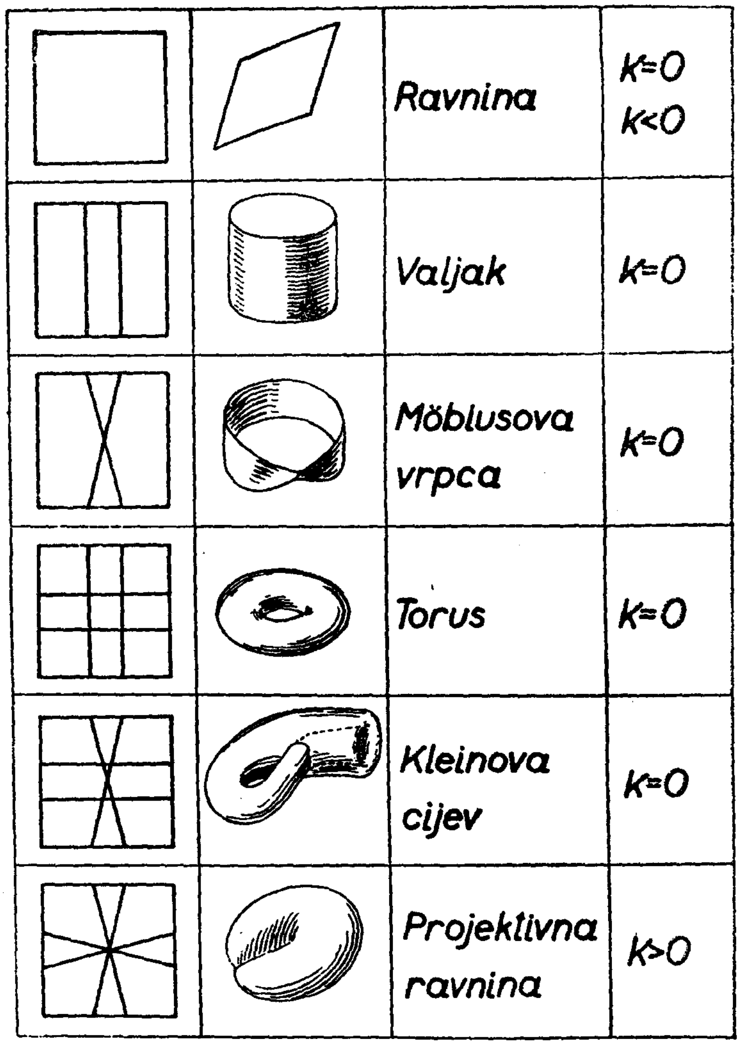
$$\begin{aligned} K = \frac{1}{4\,(g_{11} g_{22} - g^2{}_{12})^2} \Bigg\{ & g_{11} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial v} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - 2\, \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right)^2 \right] + \\ & + g_{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 2\, \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + 4\, \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \right. \\ & \left. - 2\, \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) + g_{22} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - 2\, \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} \right)^2 \right] - \\ & - 2 (g_{11}\, g_{22} - g^2{}_{12}) \left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial v^2} - 2\, \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2} \right) \Bigg\} . \end{aligned} \tag{4}$$

Тај је израз инваријантан с обзиром на било какве трансформације координата на плохи. У тзв. нееуклидским геометријама, тј. у елиптичкој геометрији, у хиперболној геометрији (геометрији Лобачевскога) и у њихову граничном случају, у еуклидској („параболној“) геометрији, K је константан на цијелој плохи, и то $K=0$ у еуклидској, $K>0$ у елиптичкој и $K<0$ у хиперболној геометрији. У сферној геометрији (геометрији на кугли) вриједи $K=\frac{1}{R^2}$, где је R полумјер кугле. Испоредимо ли сферну геометрију с елиптичком, којој је својствен исти K, видимо још једну разлику тих геометрија у великом. „Правац“ је у обје геометрије затворена линија. Но његова је дуљина у сферној геометрији $2R\pi=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$, док је у елиптичкој геометрији само половица тога износа, тј. $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Гледамо ли затворену плоху као цјелину, не можемо на њој дефинирати какву год геометрију. Тако је немогуће, да на читавој кугли дефинирамо ds^2 такав да буде K константан и негативан. А не можемо на њој дефинирати нити елиптичку геометрију, премда се ова од сферне уопће не разликује, ако се ограничимо на не превелик дио куглине плохе (точније: на такав дио, који не садржава ниједан пар дијаметралних точака).

За могућност, да се на некој плохи дефинира метрика с константним K данога предзнака, одлучна је тополошка повезаност те плохе. Тако примјерице кугла има друкчију тополошку повезаност него торус, што се очитује на пр. у томе да на торусу постоје затворене кривуље, које се не дају континуирано стегнути на једну точку, док на кугли не постоје. Двије плохе имају исту тополошку повезаност, ако се могу непрекинутим деформацијама превести једна у другу. Тако, рецимо, елипсоид има исту тополошку повезаност као кугла, и на њему се може дефинирати метрика с константним $K>0$.

Метрика $K=0$, која одговара еуклидској геометрији могућа је на 5 типова плоха, код чега узимамо у обзир и отворене плохе, не само затворене. Те су плохе: равнина, Möbius-ова врпца, ваљак, торус и Klein-ова цијев. Најлакше их је карактеризирати схематски тако, да пођемо од правокутника (или квадрата) и назначимо, како треба његове рубове спојити. Ако рубове никако не спајамо, правокутник је тополошки еквивалентан неизмјерној равнини. Спојимо ли један пар супротних рубова изравно, тј. тако, да се састану врхови, који су на крајевима исте странице, добивамо ваљак (за који је тополошки свеједно, да ли је коначне или неизмјерне дуљине). Спојимо ли један пар супротних рубова унакрст, тако да се састану врхови, који су на крајевима исте дијагонале, излази Möbius-ова врпца. Све су ово отворене плохе. Спојимо ли оба пара супротних страница изравно, добивамо торус. Један пар супротних страница спојен изравно, а други унакрст даје Klein-ову цијев. На овим се плохама може дефинирати еуклидска метрика.



Сл. 1

Елиптичка метрика (која вриједи у елиптичкој и у сферној геометрији) може се дефинирати на кугли и на затвореној плохи, која се обично зове „пројективна равнина", а добијемо је ако у правокутнику оба супротна руба спојимо унакрст. (Преглед тих плоха види на сл. 1). До исте плохе се долази, ако се на кугли идентифицирају дијаметралне точке. То се лако увиђа, ако од кугле одбацимо половицу. На преосталој полукугли су онда точке одбачене половице већ заступане као њихове дијаметралне точке. Треба само још идентифицирати дијаметралне точке на рубу полукугле. Замислимо ли полукуглу као еластичну мембрану и захватимо 4 точке њезина кружнога руба, па их раширимо тако, да се руб растегне у квадрат, а полукугла развуче у површину тога квадрата, види се одмах, да идентифицирање супротних точака на рубу значи спајање унакрст парова супротних страница квадрата.

Могућност дефинирања хиперболне метрике постоји на неизмјерно много тополошких типова плоха. Један је обична равнина, која се у том случају зове „хиперболна равнина", другу врсту облика добивамо, ако кроз куглу провртамо два или више канала (један канал би дао тополошки тип торуса). А има још и других могућности [в. [1]), стр. 331—348, напосе стр. 343. Тамо споменути „једнострани торус" је индентичан с Klein-овом цијеви].

Треба овдје још истаћи једно занимљиво тополошко својство плоха. Замислимо на плохи малену затворену кривуљу и придајмо јој смисао обилажења. Ако је немогуће ту кривуљу помакнути на плохи тако, да се врати у првотни положај па да јој се смисао обилажења обрнуо, велимо, да је плоха оријентабилна; ако је то напротив могуће, плоха није оријентабилна. Од споменутих плоха нису оријентабилне Möbius-ова врпца, Klein-ова цијев и пројективна равнина. Оријентабилне плохе се још зову и двостране, а неоријентабилне се зову једностране плохе. Ово зато, јер би на неоријентабилној плохи (на пр., на Möbius-овој врпци) животињица плазећи по плохи могла доспјети на противну страну плохе (не прекорачивши руб плохе, ако плоха има руб). Плоха има дакле у неку руку „само једну страну", она је једнострана. Но овај је назив прикладан само онда, ако је плоха смјештена у тродимензионалном простору, а нема више смисла, кад плоху замислимо смјештену у простору од више него три димензије. Да се то схвати, узмимо аналогни појам за творевине, које имају за једну димензију мање. Кривуља на плохи (тј. смјештена у дводимензионалном простору) има двије стране или „обале", ако замислимо, да кривуља назначује ток неке ријеке. Но кривуља у простору више нема никаквих „обала". Исто тако и плоха у простору од 4 или више димензија нема више „страна". Појам оријентабилности је, напротив, независан о смјештању плохе, јер се тиче само унутарњих својстава саме плохе.

Поставља се даље питање, да ли се споменуте плохе могу смјестити у тродимензионалном простору као плохе без сингуларитета и самопродирања. Ограничимо се при том на затворене плохе. Јасно је, да је могуће смјестити куглу и торус. Но није могуће овако смјестити пројективну равнину и Klein-ову цијев. (У сл. 1 се види, да те плохе саме себе продиру). Но повећамо ли број димензија смјештајног простора, те се могућности побољшавају. Тако се све наведене плохе могу смјестити у четверодимензионалном простору без сингуларитета и самопродирања. Показат ћемо за неке случајеве, како се то може.

Пројективна равнина може се предочити у облику

$$x_1 = \cos 2u \sin^2 v, \quad x_2 = \frac{1}{2} \sin 2u \sin^2 v, \quad x_3 = \frac{1}{2} \cos u \sin 2v,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \sin u \sin 2v.$$

Може се показати [\б.[2]), стр. 300], да та плоха има тополошку повезаност пројективне равнине и да нема сингуларитета ни самопродирања. Елиминација параметара даје једнаџбе

$$x_2 (x_3^2 - x_4^2) = x_1 x_3 x_4, \quad x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_3^2 x_4^2 = x_2 x_3 x_4.$$

Плоха је дакле алгебарска. Но метрика, коју у њу индуцира смјештајни еуклидски простор, није метрика елиптичке геометрије, јер рачун [према (2), (2а), (3) и (3а), гдје само треба додати чланове за f_4] показује, да Gauss-ова закривљеност K плохе није константна. Плоха је дакле тополошки дводимензионални елиптички простор (тј. простор, у којем вриједи елиптичка геометрија), али није „изометрички“ смјештен, јер се индуцирана метрика не подудара с елиптичком метриком, коју на тој плохи желимо дефинирати.

Промотримо даље торус, на којем се може дефинирати еуклидска метрика. Јасно је, да се торус може смјестити већ у тродимензионални простор без сингуларитета и самопродирања, али се у њему не може смјестити изометрички, дакле тако, да индуцирана метрика буде еуклидска. Но то се може у четверодимензионалном простору. Ево како:

$$x_1 = \cos u, \quad x_2 = \sin u, \quad x_3 = \cos v, \quad x_4 = \sin v. \tag{5}$$

Лако се докаже [в.[2]), стр. 301 – 302], да се точке плохе могу узајамно једнозначно и непрекинуто придружити точкама квадрата с врховима $A(0, 0)$, $B(2\pi, 0)$, $C(2\pi. 2\pi)$, $D(0, 2\pi)$, ако u, v интерпретирамо као правокутне координате његових точака у равнини. Треба при томе само идентифицирати изравно парове супротних страница. Да је метрика еуклидска, види се лако, јер рачун даје

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = du^2 + dv^2.$$

Како се Klein-ова цијев може смјестити без сингуларитета и самопродирања у четверодимензионални простор, нећемо овдје расправити [в. о томе[2]), стр. 285]. Но навест ћемо занимљив примјер изометричкога смјештавања те плохе[3]). Једнацбе

$$x_1 = \cos u \cos v, \quad x_2 = \sin u \cos v,$$
$$x_3 = 2 \cos \frac{u}{2} \sin v, \quad x_4 = 2 \sin \frac{u}{2} \sin v \tag{6}$$

дају плоху, која је топoлошки Klein-ова цијев. Овдје су странице AB и CD квадрата спојене изравно, а странице BC и DA унакрст. За индуцирану метрику добивамо израз

$$ds^2 = du^2 + (1 + 3\cos^2 v)\, dv^2,$$

и ако уведемо нови параметар

$$t = \int \sqrt{1 + 3\cos^2 v}\, dv,$$

излази еуклидска диференцијална форма

$$ds^2 = du^2 + dt^2.$$

И ова је плоха алгебарска. Но она сама себе продире уздуж кружнице

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Није тешко од овога резултата пријећи на изометричко смјештење без самопродирања, ако се повиси број димензија смјештајног простора за један. Треба само додати на пр. једнацбу

$$x_5 = \sqrt{3} \cos v. \tag{7}$$

Лако се увиђа, да се тополошка повезаност не мијења, а израз за ds^2 постаје

$$ds^2 = du^2 + 4\, dv^2.$$

Сада трансформација

$$t = 2v$$

показује, да се ради о еуклидској метрици. Овдје дакле не треба ни трансформација помоћу елиптичкога интеграла. Самопродирање, које се код горњег примјера очитује тиме, да вриједностима $u = u_1$, $v = 0$ и $u_1 = \pm\pi$, $v = \pi$ одговарају исте точке плохе, наиме $x_1 = \cos u_1$, $x_2 = \sin u_1$, $x_3 = x_4 = 0$, сада је нестало, јер је у једном случају $x_5 = 1$, а у другом $x_5 = -1$.

Тиме је дакле еуклидска Klein-ова цијев смјештена изометрички и без сингуларитета и самопродирања у петеродимензионални еуклидски простор. Ова могућност у расправи цитираној под[3]) није спменута.

Прелазимо сада на питање, не би ли се дводимензионални елиптички простор (пројективна равнина) могао изометрички смјестити у еуклидски простор. То успијева, ако га смјестимо у петеродимензионални простор[4]). Једнаџбе су ове:

$$x_1 = \frac{R}{2}\sin^2 u \sin 2v, \quad x_2 = \frac{R}{2}\sin^2 u \cos 2v, \quad x_3 = \frac{R}{2}\sin 2u \cos v,$$

$$x_4 = \frac{R}{2}\sin 2u \cos v, \quad x_5 = \frac{\sqrt{3}}{4}R\left(\frac{1}{3}+\cos 2u\right). \tag{8}$$

При том је $R=\frac{1}{\sqrt{K}}$, тј. то је полумјер кугле, на којој би вриједила иста метрика. Елиминација параметара даје

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=\frac{R^2}{3}, \quad x_1^2+x_2^2=\frac{1}{3}\left(x_5-\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$x_1\,(x_4^2-x_3^2)=2\,x_2\,x_3\,x_4. \tag{9}$$

Из прве једнаџбе се види, да се плоха налази на хиперсфери с полумјером $\frac{R}{\sqrt{3}}$. Смјештена је дакле уједно у четверодимензионални сферни простор. Плоха је таква, да су све њезине точке равноправне, тј. она са сваке своје точке гледана има исти облик. Она се може у себи помицати, слично као кугла, а ти се помаци добивају извјесним ротацијама хиперсфере, на којој плоха лежи.

Као даљи занимљив примјер изометричког смјештавања наведимо резултат, да се хиперболна равнина може изометрички и без сингуларитета и самопродирања смјестити у Hilbert-ов простор, дакле у еуклидски простор од неизмјерно много димензија[5]).

Дотичне формуле гласе:

$$x_{2n-1}+i\,x_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}(u+iv)^n \quad (n\geqslant 1). \tag{10}$$

Растављање у реални и имагинарни дио даје параметарски облик једнаџби. Плоха се може помицати у себи без деформације. E. Schmidt је доказао, да у еуклидском простору коначног броја димензија нема плохе без сингуларитета и с константном негативном Gauss-овом закривљеношћу, која допушта једночлану групу еуклидских помака у себи. Да ли има таквих плоха, за које не вриједи тај увјет, изгледа, да још није познато.

Досад је било говора само о смјештавању плоха, тј. дводимензионалних простора, на којима треба да вриједи еуклидска или једна од нееуклидских метрика. Но може се то питање поставити и за просторе од више димензија. И овдје зависи од тополошке повезаности дотичнога простора, да ли се може на њему дефинирати једна од речених геометрија. Ево неколико података[6]).

За сваки број димензија n има коначан број отворених и коначан број затворених еуклидских просторних облика.

Постоје тродимензионални затворени просторни облици, а за $n>1$ неизмјерно много отворених.

За так (паран) број димензија постоје само два елиптичка облика, сферни и елиптички простор. (Елиптички простор се најједноставније дефинира тако, да се у сферном простору [вишедимензионалном аналогону кугле] идентифицирају дијаметралне точке). За лих (непаран) број димензија има осим речених још неизмјерно много тополошки различитих облика с могућношћу елиптичке метрике.

И овдје се може поставити питање изометричког смјештавања без сингуларитета у виши еуклидски простор. Навест ћемо резултате за елиптичке просторе[4]).

Елиптички простор од n димензија може се смјестити изометрички и без сингуларитета и самопродирања у еуклидски простор од $\frac{n(n+3)}{2}$ димензија и то тако, да се налази на хиперсфери, да је дакле уједно смјештен у сферни простор од $\frac{n(n+3)}{3}-1$ димензија. Дајемо формуле само за специјални случај $n=3$ [за опћи случај в. [4])]:

$$x_1=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin^2 v\sin 2w. \qquad x_2=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin^2 v\cos 2w,$$

$$x_3=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin 2v\sin w, \qquad x_4=\frac{R}{2}\sin^2 u\sin 2v\cos w,$$

$$x_5=\frac{\sqrt{3}}{4}R\sin^2 u\left(\frac{1}{3}+\cos 2v\right), \qquad x_6=\frac{R}{2}\sin 2u\sin v\sin w,$$

$$x_7=\frac{R}{2}\sin 2u\sin v\cos w, \qquad x_8=\frac{R}{2}\sin 2u\cos v,$$

$$x_9=\frac{R}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}+\cos 2u\right), \tag{11}$$

И овдје вриједи, да су све точке равноправне, и да се помаци простора у себи добивају ротацијама хиперсфере, у којој је простор смјештен. Полумјер те хиперсфере је овдје $\sqrt{\frac{3}{8}}R$, а у опћем случају n - димензионалног елиптичког простора $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}R$.

На ове резултате могу се надовезати многа питања, напосе, да ли је $\frac{n(n+3)}{2}$ минимални број димензија, за који је такво смјештавање могуће, и да ли дане формуле представљају у битности (тј. без обзира на гибања и зрцаљења) једину могућност.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Јефимов, Виша геометрија, Београд 1949.

[2] D. Hilbert u. R. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Berlin 1932.

[3] C. Tompkins, A flat Klein bottle isometrically embedded in euclidean 4-space. *Bull. Amer. Math. Soc. 47*, 208 (1941).

[4] D. Blanuša, Le plongement isométrique des espaces elliptiques dans des espaces euclidiens, *Гласник мат. - физ. - и астр., Т. 2*, Загреб 1947, стр. 248—249.

[5] L. Bieberbach, Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. *Comment. math. helv. 4*, 248—255 (1932).

Аутор је имао увид само у реферат у Zentralblatt *5*, 82 (1933).

[6] H. Hopf, Differentialgeometrie u. topologische Gestalt, *Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung 41*, 209—229 (1932).

ÜBER EINIGE EINBETTUNGSPROBLEME

von D. Blanuša, (Zagreb)

Nach einer allgemeinen Einleitung werden einige bekannte Resultate über isometrische Einbettung euklidischer und nichteuklidischer Flächenformen in euklidische Räume besprochen. Insbesondere wird in Zusammenhang mit dem Tompkinsschen Beispiel[3]) einer isometrischen Einbettung des euklidischen Kleinschen Schlauches im R_4, die eine Selbstdurchdringung hat, darauf hingewiesen, dass man durch eine leichte Erweiterung (7) seiner Formeln (6) eine isometrische Einbettung ohne Selbstdurchdringung im R_5 erhält. Schliesslich werden die Resultate des Autors[4]) [(8), (9), (11)] betreffend die Einbettung elliptischer Räume in euklidische besprochen.