О НЕКИМ АСИМПТОТСКИМ ИНВЕРСИЈАМА CESÀRO-ВА ПОСТУПКА ЗБИРЉИВОСТИ

БОЖИДАР ПОПОВИЋ (Београд)

1. У једном свом раду [2] показао сам да из ограничености Лапласова интеграла

$$\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} s(t)\, dt, \ \sigma \to 0,$$

и услова конвергенције облика

$$s(x') - s(x) > O(1), \tag{1}$$

испуњеног за свако x' из размака ужег него што је $(x, \lambda x)$, не може да следи ограниченост функције $s(x)$, већ само њена делимична ограниченост —

$$s(x) = O\{\varphi(x)\},$$

где је $\varphi(x)$ функција која испуњава одређене услове и везана је за размак конвергенције. Ако горњу границу тог размака конвергенције напишемо у облику

$$\gamma\{\lambda \Lambda(x)\},$$

где је $\gamma(t)$ инверсна функција извесне функције $\Lambda(t)$ — онда ће бити

$$\varphi(x) = x \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)}.$$

Одмах затим је проф. Карамата [1] показао, за специјални случај $\varphi(x) = x^\theta$, да се за Cesàro-ве поступке збирљивости добија повољнији резултат. Он је наиме показао да из

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t)\, dt = O(1), \ x \to \infty, \tag{2}$$

и услова конвергенције (1) испуњеног за x' у размаку $(x, x + \varepsilon x^{1-\theta})$, $\theta > 0$, следи

$$s(x) = O(x^{\theta/2}).$$

Исто је тако показао да, уз исти услов конвергенције, из ограничености Cesàro-ва збира вишег реда, тј. из

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\,s(t)$$

следи

$$s(x) = O\left(x^{\frac{k}{k+1}\theta}\right) \text{ кад } x \to \infty .$$

Циљ ми је да овде покажем да се ови резултати проф. Караматe могу проширити увођењем општијег размака конвергенције, као у поменутом мом раду за Laplace-ов интеграл [2]. Притом сам размак конвергенције узео у облику који је независан од посредништва функција $\gamma(t)$ и $\Lambda(t)$, у складу са тежњом да се ово учини и у осталим инверсним ставовима ове врсте, коју сам мисао истакао у једном реферату о овом проблему [3]. Овакав размак конвергенције показује непосредно дужину размака конвергенције и углавном — бар асимптотски — има исту вредност као и размак са $\gamma\{\lambda\Lambda(t)\}$, а у добивеним резултатима се експлицитно види повезаност тих резултата са дужином размака конвергенције.

На крају рада даћу неке примедбе о овом проблему.

2. За Cesàro-ву збирљивост првог реда, тј. за аритметичку средину, имали бисмо:

Став 1. *Нека је $s(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека је*

$$s(x') - s(x) \geqslant -w(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \tag{3}$$

$$x \leqslant x' \leqslant x + \varepsilon \cdot \frac{x}{\varphi(x)}$$

при чему монотона функција $\varphi(x)$ задовољава услове:

$$\varphi(x) \geqslant 1, \quad \varphi\left(x + \frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}}\right) \leqslant N \varphi(x), \quad x \to \infty. \tag{4}$$

Тада из

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t)\, dt = O(1), \quad x \to \infty, \tag{2*}$$

следи

$$s(x) = 0\{\sqrt{\varphi(x)}\}. \tag{5}$$

Ради доказа ћемо узети низ тачака $x_0 x_1, x_2, \ldots x_n$, дефинисан рекурентно, и то

$$x_{\nu+1} = x_\nu + \varepsilon \cdot \frac{x_\nu}{\varphi(x_\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0 = x. \tag{6}$$

Тада
$$x_n \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{7}$$
јер је $x_{\nu+1} > x_\nu$ и када би било $x_n \to \xi$, према (6) би било
$$\xi = \xi + \varepsilon \frac{\xi}{\varphi(\xi)} > \xi.$$

Када рекурентну везу (6) напишемо у облику
$$(x_{\nu+1} - x_\nu)\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu} = \varepsilon,$$
сабирањем добивамо
$$n\varepsilon = (x_1 - x)\frac{\varphi(x)}{x} + (x_2 - x_1)\frac{\varphi(x_1)}{x_1} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{\varphi(x_{n-1})}{x_{n-1}} =$$
$$= \frac{\varphi(x)}{x}\left[(x_1 - x) + (x_2 - x_1)\frac{x}{x_1}\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{x}{x_{n-1}}\frac{\varphi(x_{n-1})}{x_{n-1}}\right];$$
отуда, ако је
$$x_{n-1} \leqslant x + \frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}}, \tag{8}$$
биће према (4)
$$n\varepsilon \leqslant N\frac{\varphi(x)}{x}\left[(x_1 - x) + (x_2 - x_1)\frac{x}{x_1} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\frac{x}{x_{n-1}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant N\frac{\varphi(x)}{x}\left[(x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\right],$$
дакле
$$n\varepsilon \leqslant N\frac{\varphi(x)}{x}(x_n - x). \tag{9}$$

Овај ћемо однос касније искористити, а сада да приступимо услову (2). Из њега следи
$$\int_x^{x_n} s(t)\,dt = \int_0^{x_n} s(t)\,dt - \int_0^x s(t)\,dt \leqslant M(x_n + x),$$
где је M неки сталан број, те је
$$M(x + x_n) \geqslant \int_x^{x_n} [s(t) - s(x)]\,dt + s(x)(x_n - x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} [s(t) - s(x)]\,dt + s(x)(x_n - x).$$

Овде ћемо у сваком интегралу $\nu+1$ пута применити услов конвергенције (3), што ће дати

$$(x_n - x)\, s(x) - M(x_n + x) \leqslant w(\varepsilon) \sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1) \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} dt.$$

За $\nu+1$ се може искористити однос (9), узевши притом у обзир да је $x_{\nu+1} \leqslant x_n$, па ће се добити

$$(x_n - x)\, s(x) \leqslant M(x_n + x) + \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} N \frac{\varphi(x)}{x} (x_n - x) \sum (x_{\nu+1} - x_\nu),$$

тј.

$$s(x) \leqslant M + M \cdot \frac{2x}{x_n - x} + N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} \varphi(x) \cdot \frac{x_n - x}{x}.$$

С обзиром на (7) и (8) можемо узети

$$x_n = x + \frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \text{тј.} \quad \frac{x_n - x}{x} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}, \tag{10}$$

чиме успостављамо најбољу равнотежу у брзини рашћења двају израза с десне стране последње неједначине. Тиме ће та неједначина дати први део тврђења става 1, наиме

$$s(x) \leqslant M + \left[2M + N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \sqrt{\varphi(x)}. \tag{11}$$

Да бисмо добили другу страну неједначине, поћи ћемо на исти начин од услова (2), односно од

$$\int_x^{x_n} s(t)\, dt \geqslant -M(x + x_n)$$

или

$$\int_x^{x_n} [s(t_n) - s(t)]\, dt \leqslant s(x_n)(x_n - x) + M(x_n + x).$$

Овде ћемо, исто као и горе, више пута применити услов (3), а затим на $n-\nu+1$ применити (9), па ћемо сличним путем добити

$$s(x_n) \geqslant -M \cdot \frac{2x}{x_n - x} - M - N \cdot \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} \varphi(x) \cdot \frac{x_n - x}{x}$$

или, с обзиром на вредност (10),

$$-s(x_n) \leqslant M + \left[2M + N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] \sqrt{\varphi(x)}, \tag{12}$$

што нам — узевши у обзир и монотонију функције φ — заједно са (11) потврђује став 1.

3. Одговарајући став за збирљивост (C, k) гласи

Став 2. *Нека је $s(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека испуњава услов (3) са*

$$\varphi(x) \geqslant 1, \quad \varphi\left(x + x \cdot [\varphi(x)]^{\frac{-1}{k+1}}\right) \leqslant N\varphi(x), \quad x \to \infty. \tag{13}$$

Тада из

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} s(t)\, dt = O(1), \quad x \to \infty, \tag{14}$$

(где је k цео број) следи

$$s(x) = O\{[\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}}\}. \tag{15}$$

Ради доказа овог става послужићемо се обрасцем

$$\bar{S}_k(x) = \int_0^h \int_0^h \cdots \int_0^h s(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_k)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{k-\nu} S_k(x + \nu h), \tag{16}$$

који се за цело k лако доказује индукцијом ([1], стр. 23).

Када је x дефинисано помоћу (6), закључно са

$$x_n = x + x \cdot [\varphi(x)]^{-1/k+1}, \tag{17}$$

и када узмемо

$$h = \frac{x_n - x}{k}, \tag{18}$$

биће (услед $\varphi \geqslant 1$)

$$h = O(x).$$

Узмемо ли затим у обзир да је према (14)

$$S_k(x) = O(x^k),$$

биће и

$$S_k(x + \nu h) = O(x^k),$$

па према томе и

$$-M x^k \leqslant \bar{S}_k(x) \leqslant M x^k, \tag{19}$$

где је M неки коначан број.

Како је $t_1 \leqslant h,\ t_2 \leqslant h \ldots, t_k \leqslant h$, тј. $x + t_1 + \cdots + t_k \leqslant x + kh = x_n$ то ћемо од x до x_n моћи употребити услов конвергенције (3) мање од n пута, због чега ћемо добити

$$\left\{\begin{array}{l} s(x + t_1 + \cdots + t_k) - s(x) \geqslant -n\, w(\varepsilon), \\ s(x_n) - s(x + t_1 + \cdots + t_k) \geqslant -n\, w(\varepsilon). \end{array}\right. \tag{20}$$

Интегришући k пута у границама $(0, h)$, прва ће неједначина, према ознаци (16), дати

$$\bar{S}_k(x) \geqslant -n\, w(\varepsilon)\, h^k + s(x) h^k$$

што заједно са (9) и (19) даје

$$s(x) \leqslant \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} N \frac{\varphi(x)}{x}(x_n - x) + \left(\frac{x}{h}\right)^k M.$$

Ставимо ли за x_n и h вредности (17) и (18), ова ће неједначина постати

$$s(x) \leqslant N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} [\varphi(x)]^{1-\frac{k}{k+1}} + M k^k [\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}}$$

или

$$s(x) \leqslant \left[N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} + M k^k\right] [\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}} \tag{21}$$

Интегришући затим другу неједначину (20) k пута у границама $(0, h)$, на сличан начин ћемо створити неједначину

$$s(x_n) \geqslant -N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}(x_n - x) - M\left(\frac{x}{h}\right)^k,$$

тј.

$$-s(x_n) \leqslant \left[N \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon} + M k^k\right] [\varphi(x)]^{\frac{k}{k+1}}, \tag{22}$$

што заједно са (21) и с обзиром на монотонију функције φ потврђује став 2.

4. Ова два става, заједно са поменутим [2] ставом о Лапласовом интегралу, потврђују у општијем облику закључке проф. Карамате ([1], стр. 18) да резултати овакве врсте могу да послуже као мерило јачине конваргенције одговарајућих поступака збирљивости. Познато је наиме да као прво мерило за упоређивање различитих поступака збирљивости служи њихов нормални (или „карактеристични", [3]) размак конвергенције, тј. размак у коме мора бити задовољен услов конвергенције, па да се из ограничености (или конвергенције) збира добивеног тим поступком закључи на ограниченост (или конвергенцију) саме функције. Али ово мерило је врло слабо, јер многи врло различити поступци имају исти нормални размак конвергенције. Напр. за Cesàro-ве поступке првог, другог.... и маког реда, као и за Abel-ов поступак, постоји исти нормални размак конвергенције $(x, x+\varepsilon x)$.

Горњи ставови нам пружају друго, прецизније, мерило. Довољно је само упоредити добивене резултате, односно степене код $\varphi(x)$, па да се то види, наиме

Cesàr-ов збир првог реда (C_1).....$[\varphi(x)]^{1/2}$

Cesàr-ов збир k-тог реда (C_k).....$[\varphi(x)]^{k/k+1}$

Abel-ов збир $(C\infty, A)$.....$[\varphi(x)]^1$

Уколико је овај степен већи утолико је функција $s(x)$ слободнија у осциловању, те утолико тај поступак збирљивости обухвата шири круг функција, дакле јачи је. Према томе, горње збирљивости по јачини иду редом (почев од најслабије) .....: C_1, C_2, ...C_k, ...A.

Да би горње мерило било реално, потребно је показати и да су добивени резултати најпрецизнији могући, тј. да има функција које су збирљиве одговарајућим поступком, задовољавају све потребне услове. а понашају се местимично као граничне функције из горњих ставова. Проф. Карамата је дао такав пример за Cesàro-ву збирљивост првог реда ([1], стр. 22), а у мом раду ([2], стр. 41) дат је пример за Abel-ову збирљивост.

Општије решење проблема — наиме оно што се може закључити о функцији збирљивој одређеним поступком, кад се зна да она задовољава услов конвергенције у размаку ужем од нормалног — служило би за упоређење других поступака збирљивости, нарочито кад они имају исти нормални размак конвергенције.

5. Примедба 1. Облик (3) за размак конвергенције погодан је зато што експлицитно показује колики је размак конвергенције и колико је ужи од нормалног $(x, x+\varepsilon x)$. За једну одређену класу функција се може показати да је он асимптотски једнак са $(x, \gamma\{\lambda\Lambda(x)\}$, у ком облику се обично размак узима у општијим ставовима. За све функције $\varphi(x)$, које долазе у обзир у вези са функцијама $\Lambda(x)$, треба ову асимптотску једнакост тек доказати, а врло је вероватно да она постоји скоро без икаквог ограничења, јер низ примера (в. [3]) показује да битних противпримера нема.

Друга предност облика (3) за размак конвергенције је у томе што се добивени резултати изражавају у непосредној зависности од дужине размака конвергенције.

Примедба 2. Монотоност функције $\varphi(x)$ може се заменити једним општијим условом, али би то доказ учинило знатно компликованијим, а стварно не би пружило никакву корист, јер су у овим проблемима битне брзина рашћења функције и ширина размака конвергенције (за које је довољна монотоност функције $\varphi(x)$), а нису битна нека специјална понашања.

Примедба 3. Неједначине (11) и (12), као и (21) и (22), показују да се ова два O — става могу претворити у o — ставове, али под претпоставком

$$w(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

што би дакле дало одговарајуће „лакше“ o — ставове. Да би се добили они значајнији, „тежи“ („tiefliegende“) o — ставови потребно је доказ изменити тако да се o — закључак добије чим је $w(\varepsilon) = o(1)$, $\varepsilon \to 0$. Но ова измена доказа би изгледа била битна, тј. цео би доказ добио други облик.

НАВЕДЕНА ЛИТЕРАТУРА

[1]. Карамата Ј.: О неким инверсним ставовима Cesàro-ва поступка збирљивости вишег реда, *Глас Српске акад. наука* стр. 1—37.

[2]. Поповић Б.: Један инверсни став о асимптотским вредностима Лапласова интеграла. *Глас Српске акад. наука* CLXXXV, стр. 33—46. (1940 г.).

[3]. Поповић Б.: Веза између поступака збирљивости и размака конвергенције. *Весник Друштва математичара и физичара НР Србије*, бр. 4 (1950 г.).

SUR CERTAINES THÉORÉMES INVERSES DE SOMMABILITÉ DE CESÀRO

par Božidar Popović (Beograd)

L'auteur poursuit le problème (posé dans les travaux [1] et [2]) sur la croissance assymptotique d'une fonction $s(x)$, qui satisfait la condition (2) ou (14), la condition (1) etant satisfaite dans un intervalle plus étroit que l'intervalle „normale“ de convergence (qui correspond à ce procédé de sommabillité). L'auteur prend cet intervalle sous la forme $\left(x, x+\varepsilon \cdot \frac{x}{\varphi(x)}\right)$; avec $\varphi(x) = x \cdot \frac{\Lambda'(x)}{\Lambda(x)}$ cet intervalle est presque égal à l' intervalle habituel $(x, \gamma\{\lambda \Lambda(x)\})$ (voir [3]). L' intervalle $\left(x, x+\varepsilon \cdot \frac{\varphi(x)}{x}\right)$ montre mieux — et sans l'intermédiaire des fonctions $\Lambda(x)$ et $\gamma(x)$ — de quelle mesure il est plus court que l'intervalle „normale“.

A l'aide de la suite (6), sous la condition (8), l'auteur obtient les relations (11) et (12), ce qui donne le

Théorème 1. *Si une fonction $s(x)$, à variation bornée dans chaque intervalle fini, satisfait la condition* (3), *tandis que la fonction monotone $\varphi(t)$ satisfait les conditions* (4), *alors de* (2) *il s'ensuit* (5). Puis en utilisant (16), où h est déterminé par (18) et (17), l'auteur élargit ce résultat aux sommabillités $(C-k)$, c.àd. il obtient le théorème 2, d'après lequel *de* (14) *il s' ensuit* (15), *lorsque k est un nombre entier positif et $\varphi(t)$ satisfait les conditions* (13).

Avec les théorèmes de cette espèce nous obtenons une mesure pour la capacité de convergence de ceux procédés de sommabillité qui ont un même intervalle „normale“ de convergence — par ex. $(x, \lambda x)$ pour $(C-1)$, $(C-k)$, Abel.