ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ LEGENDRE-ових ПОЛИНОМА

МИОДРАГ ТОМИЋ (Београд)

1. Више аутора (S. Bernstein [1], G. Szegö [2], H. Rau [3], Н. Обрешков {4}) употребљавају при доказу многих ставова из теорије Legendre-ових полинома чињеницу да за два узастопна Legendre-ова полинома важи

$$|P_n(\cos\vartheta) - P_{n+1}(\cos\vartheta)| \leqslant A\sqrt{\frac{\vartheta}{n}}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

где је A једна позитивна апсолутна константа. Неједначина (1) уопштава Stieltjes-ову {5} неједначину, где на десној страни место члана $A\sqrt{\vartheta/n}$ стоји $A/\sqrt{n}$.

У овом раду дајем за израз

$$\Delta P_n = P_n(\cos\vartheta) - P_{n+1}(\cos\vartheta) \tag{2}$$

један експлицитан облик из ког се може извести неједначина (1). Тај поступак се може применити и за нешто општије класе полинома, посматраних у тачки 2.

Поред тога, користећи познати идентитет

$$s_n(x) = (n+1)\frac{P_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x} = P'_n(x) + P'_{n+1}(x) \tag{3}$$

који потиче од Christoffel-a [6], извешћу Gronwall-ов [7] став о асимптотској вредности Lebesgue-ове константе редова уређених по Legendre-овим полиномима. Ова константа је дата изразом

$$\rho_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |s_n(x)|\, dx,$$

где је $s_n(x)$ дато са (3), а Gronwall-ов став казује да

$$\frac{\rho_n}{\sqrt{n}} \to 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \text{ кад } n \to \infty. \tag{4}$$

Доказ ове чињенице дат је у тачки **4** и претставља извесно упрошћење Szegö-ова [2] обрасца (*4*). У тачки **4** показаћу да је шта више

$$\frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ кад } n \to \infty .$$

2. Legendre-ови полиноми припадају класи полинома $P_n(\cos\vartheta)$ дефинисаних функцијом генератрисом облика

$$f(re^{\vartheta i})\, f(re^{-\vartheta i}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\, r^n,$$

где је

$$f(re^{\vartheta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, r^\nu e^{\nu\vartheta i},$$

а c_ν произвољан низ такав да ред конвергира у кругу $r < 1$.

Отуда је

$$\begin{aligned} P_n(\cos\vartheta) = 2\,c_0\,c_n \cos n\,\vartheta + 2\,c_1\,c_{n-1} \cos(n-2)\,\vartheta + \\ + 2\,c_2\,c_{n-2} \cos(n-4)\,\vartheta + \ldots + \\ + 2\,c_{m-1}\,c_{m-n-1} \cos(n-2\,m+2)\,\vartheta + r_m, \end{aligned} \tag{5}$$

где је

$$m = \left[\frac{n}{2}\right] \text{ и } r_m = \begin{cases} c_m^2 \text{ за } n = 2\,m \\ 2\,c_m\,c_{m+1} \cos\vartheta \text{ за } n = 2\,m+1. \end{cases} \tag{6}$$

Специјално за

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2\nu} z^\nu$$

добивамо обичан Legendre-ов полином.

За класу полинома датих са (5) и (6) претпоставићемо још да је

$$P_n(0) = 1 \text{ за свако } n, \tag{7}$$

што је испуњено код Legendre-ових полинома.

Због (7) разлика (2) се може написати као

$$\begin{aligned} \Delta P_n &= P_n(\cos\vartheta) - P_n(0) - \{P_{n+1}(\cos\vartheta) - P_{n+1}(0)\} = \\ &= 4\left\{\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu\, c_{n+1-\nu} \sin^2\frac{n+1-2\nu}{2}\vartheta - \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu' c_{n-\nu} \sin^2\frac{n-2\nu}{2}\vartheta\right\} = \\ &= 4\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu(c_{n+1-\nu} - c_{n-\nu})\left\{\sin^2\frac{n+1-2\nu}{2}\vartheta - \sin^2\frac{n-2\nu}{2}\vartheta\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

или на основу идентитета

$$\sin^2\frac{n\vartheta}{2} = \left[\sin\frac{\vartheta}{2}+\sin\frac{3\vartheta}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\vartheta}{2}\right]\sin\frac{\vartheta}{2},\quad n=1,2,\ldots$$

у облику

$$\frac{\Delta P_n}{4\sin\vartheta/2} = -\sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\mu=0}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\right)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta +$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m} c_{m-\nu}\,c_{m+\nu}\sin\frac{4\nu+1}{2}\vartheta. \tag{9}$$

Други од ових збирова можемо трансформисати овако:

$$\sum_{\nu=0}^{m} c_{m-\nu}\,c_{m+\nu}\sin\frac{4\nu+1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\cos\frac{\vartheta}{2}J_n(\sin\vartheta)\right\}$$

где је $P_n(\cos\vartheta)$ дефинисано са (5), а $J_n(\sin\vartheta)$ дато са

$$J_n(\sin\vartheta)=2\,c_0\,c_n\sin n\vartheta+2\,c_1\,c_{n-1}\sin(n-2)\vartheta+\ldots+$$

$$+2\,c_{m-1}\,c_{n-m-1}\sin(n-2m+2)\vartheta+$$

$$+2\,c_m\,c_{n-m}\sin(n-2m)\vartheta.$$

На тај начин разлика (8) постаје

$$\frac{\Delta P_n}{4\sin\vartheta/2} = -\sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\right)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\vartheta}{2}P_n(\cos\vartheta)+\cos\frac{1}{2}J_n(\sin\vartheta)\right\}, \tag{9'}$$

где у случају парног $n=2m$ у првом двоструком збиру место члана

$$c_m^2\sin\frac{\vartheta}{2}\ \text{долази}\ \frac{c_m^2}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Напоменимо да је у (9′) синусни полином

$$\delta_n(\vartheta) = \sum_{\mu=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\right)\sin\frac{2\mu+1}{2}\vartheta, \tag{10}$$

стално позитиван ако је

$$c_s > c_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

јер су тада његови коефициенти

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{m-[(\mu+1)/2]} c_\nu (c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})$$

позитивни и опадају кад μ расте, тј.

$$A_\mu > A_{\mu+1}, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

на основу Fejér-ова [7] става о синусном полиному

$$\sum_{\mu=0}^{n} A_\mu \sin \frac{2\mu+1}{2} \vartheta$$

са коефицијентима који монотоно опадају

3. Да бисмо из обрасца (9′) извели неједначину (1) за Legendre-ов полином, користићемо познате неједначине за $P_n(\cos\vartheta)$ и $J_n(\sin\vartheta)$ [7]

$$\begin{array}{l} |P_n(\cos\vartheta)| \\ |J_n(\sin\vartheta)| \end{array} < \frac{C_0}{\sqrt{n\sin\vartheta}}, \quad 0 < \vartheta < \pi. \tag{11}$$

Израз

$$Q_n(\vartheta) = 2\sin\frac{\vartheta}{2} \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right|$$

можемо, према (11), оценити за

$$Q_n(\vartheta) \leqslant 2\sin\frac{\vartheta}{2} \frac{C_0}{\sqrt{n\pi\sin\vartheta}} \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right) \leqslant$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}} = C\sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}}, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Остаје нам да оценимо синусни полином $4\sin\vartheta/2\,\delta_n(\vartheta)$ где је $\delta_n(\vartheta)$ дато са (10). Ради овога користићемо две неједначине за коефициенте

$$c_\nu = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2\nu},$$

наиме

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu+1/2}} < c_\nu < \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu+1/2}}\left(1 + \frac{1}{2\nu}\right). \tag{13}$$

Обе ове неједначине следе из чињенице да је (Wallis-ов образац)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu\cdot 2\nu}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)(2\nu+1)}\,\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx}$$

и

$$1\leqslant\frac{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx}\leqslant 1+\frac{1}{2\nu}.$$

Показаћемо да постоји једна апсолутна константа C_1 тако да је

$$C_1\sqrt{\frac{\sin\vartheta/2}{n}}>4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta),\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi. \tag{14}$$

Из (14) и (12) следи тада (1).

a) Нека је $\vartheta\leqslant 1/n$.

Пре свега, $\delta_n(\vartheta)<C_2$ за свако ϑ. Према (10) је

$$\delta_n(\vartheta)\leqslant\sum_{\mu=0}^{n}\Bigg(\sum_{\nu=0}^{m-[(\mu+1)/2]}c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})\Bigg)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu\,(c_{n-\nu}-c_{n+1-\nu})<$$

$$<(c_{n-m}-c_{n+1-m})\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu. \tag{15}$$

С обзиром на (13) и $m=[n/2[$ имамо

$$c_{n-m}-c_{n+1-m}<\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{C_3}{n\sqrt{n}}. \tag{16}$$

С друге стране, према (13), је

$$c_\nu<C_4\frac{1}{\sqrt{\nu}},\quad \nu=0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

тако да сви чланови $(n+1-4\nu)\,c_\nu$, у збиру (15), монотоно опадају па је

$$\sum_{\nu=0}^{m}(n+1-2\nu)\,c_\nu < C_5\int_1^m (n+1-2x)\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = C_6\, n\sqrt{n}\,. \tag{18}$$

Због (16) и (18) је

$$\delta_n(\vartheta) < \frac{C_3}{n\sqrt{n}}\, C_6 n\sqrt{n} = C_7. \tag{19}$$

Према томе, у случају $\vartheta \leqslant 1/n$ константу C_1 из (14) ћемо одредити тако да буде

$$C_1 \geqslant 2\sqrt{2}\, C_7,$$

јер је тада, због (19),

$$C_1\frac{1}{\sqrt{n}} > 4\,C_7\sqrt{\frac{1}{2n}} > 4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta).$$

b) Нека је $\vartheta > 1/n$.

Тада је (види {8. 2}) за све $\vartheta \neq 0$

$$4\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta_n(\vartheta) < 4\sin\frac{\vartheta}{2}\frac{A_0}{\sin\vartheta/2} = 4\,A_0\,, \tag{20}$$

где је

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu})\,,\quad m = [n/2].$$

Сада је због (16), (17) и $m=[n/2]$,

$$A_0 = \sum_{\nu=0}^{m} c_n\,(c_{n-\nu} - c_{n+1-\nu}) < (c_{n-m} - c_{n+1-m})\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu <$$

$$< \frac{C_2}{n\sqrt{n}}\, C_4 \sum_{\nu=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{\nu}} = C_8\frac{1}{n}\,. \tag{21}$$

Да бисмо, прем$\hat{\text{а}}$ (14), нашли у овом случају (тј. када је $\vartheta > 1/n$), константу C_1, довољно је да одредимо C_1 тако да буде

$$C_1 > 8\sqrt{2}\,C_8\,,$$

јер је тада, према (20) и (21), због

$$\sin\frac{\vartheta}{2} > \frac{1}{2n} - \frac{1}{48\,n^3}\quad \text{за}\ \vartheta > \frac{1}{n}\,,$$

$$C_1 \sqrt{\frac{\sin \vartheta/2}{n}} > 4\, C_8 \frac{1}{n}.$$

4. Из (3) добивамо

$$\rho_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |s_n(x)|\, dx = \frac{n+1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{|P_n(x) - P_{n+1}(x)|}{1-x}\, dx,$$

тј.

$$\rho_n = \frac{n+1}{2} \int_0^{\pi} |\Delta P_n(\cos \vartheta)| \frac{\sin \vartheta}{1 - \cos\vartheta}\, d\vartheta. \tag{22}$$

Како сада имамо за $P_n(\cos\vartheta)$ и $J_n(\sin\vartheta)$ (види {9}) асимптотске релације

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\vartheta}} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right] + O(c_{m-1}^2)$$

$$J_n(\sin\vartheta) = -\sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\vartheta}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right] + O(c_{m-1}^2),$$

то израз

$$4 \sin\frac{\vartheta}{2} \frac{1}{2} \left\{ \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right\}$$

има асимптотску вредност

$$2 \sin\frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\vartheta}} \sin\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2}\right\} + O(c_{m-1}^2) =$$

$$= 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\vartheta}} \cos(n+1)\,\vartheta + O(c_{m-1}^2). \tag{23}$$

С друге стране, према обрасцу (20), за све $\vartheta \neq 0$ је

$$4 \sin\frac{\vartheta}{2} \delta_n(\vartheta) < 4 A_0 \sim \frac{C'}{n}. \tag{24}$$

Према (9′) и (22) биће

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right| \cos\frac{\vartheta}{2} d\vartheta + \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{2\sqrt{n}} \int_0^{\pi} 4 \sin\frac{\vartheta}{2} \delta_n(\vartheta)\, d\vartheta,$$

као и

$$\lim_{n=\infty} \inf \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{2\sqrt{n}} \int_0^\pi \left| \sin\frac{\vartheta}{2} P_n(\cos\vartheta) + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\vartheta}{2} J_n(\sin\vartheta) \right| \cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta - \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} \int_0^\pi 4\sin\frac{\vartheta}{2}\, \delta_n(\vartheta)\, d\vartheta .$$

Због (24) последњи лимеси у оба горња израза теже нули као $1/\sqrt{n}$, а из (23) следи да је први лимес једнак са

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\, |\cos(n+1)\vartheta| \cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta + O(\sqrt{n}\, c^2_{m-1}) =$$

$$= \frac{n+1}{n\sqrt{n}} \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}}\, |\cos(n+1)\vartheta|\, d\vartheta + O(\sqrt{n}\, c^2_{m-1}) .$$

На основу једног Fejér-овог {9} става имамо

$$\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}}\, |\cos(n+1)\vartheta|\, d\vartheta \to \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)} = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4} = \frac{8\pi}{2\pi\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Према томе за Lebesgue-ову константу добивамо

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Да бисмо показали да је чак

$$\frac{\rho_\nu}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

довољно је, због чињенице да је $O(\sqrt{n}\, c^2_{m-1}) = O(1/\sqrt{n})$ и због тога што су последњи лимеси у изразима за lim sup, односно lim inf од $\rho_n/\sqrt{n}$ реда $O(1/\sqrt{n})$, да покажемо само да

$$\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}}\, |\cos(n+1)\vartheta|\, d\vartheta \to \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta$$

тежи брзином већом или једнаком $O(1/\sqrt{n})$.

Према наведеном Fejér-ову ставу (види такође [10], стр. 217 је

$$\int_0^{\pi} f(x)\,|\cos(n+1)\,x|\,dx = \sum_{\nu=1}^{n+1} f_{\nu,\,n+1} \int_{(\nu-1)\pi/(n+1)}^{\nu\pi/(n+1)} |\cos(n+1)\,x|\,d\,x,$$

где је $f_{\nu,\,n-1}$ једна вредност између горње и доње границе од $f(x)$ у размаку $(\nu-1)\,\pi/(n+1) \leqslant x < \nu\,\pi/(n+1)$. Како овде $f(x) = \sqrt{\operatorname{cotg} x/2}$ монотоно опада, то је

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\{1-|\cos(n+1)\,x\,|dx\} \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx - \frac{2}{\pi(n+1)}\left[f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + f\left(\frac{(n+1)\,\pi}{n+1}\right)\right],$$

а последњи израз тежи нули као $O(1/n)$ (види [10], стр. 27).

BIBLIOGRAFIJA

[1] Bernstein, S. — Sur les polynomes ortogonaux relatifs à un segment fini. *Journ. d. Math.* (9), **9** (1930), str. 127—177.

[2] Szegö, G. — Über eine von Herrn S. Bernstein herrührende Abschätzung der Legendreschen Polynome. *Math. Annalen*, Bd. **108**/3 (1933), str. 360—369.

[3] Rau, H. — Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* **161** (1929), str. 237—254.

[4] Обрешков, Н — О редовима уређеним по Legendre-овим и Jakobi-јевим полиномима. (на бугарском) *Зборник Универзитета у Софији*, 1932 god.

[5] Christoffel,. — Über die Gaussische Qnadratur und eine Verallgemeinerung derselben. *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* Bd. LV (1858), str. 61—82.

[6] Gronwall, Th. — Über die Laplacesche Reihe, *Math. Annalen*, 14 (1913). str. 213—270.

[7] Fejér, L, — Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koefizientenfolge. *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **39** (1936), str. 53 (образац 23).

[8] Tomić, M. — Sur certaines propriétés des séries de Taylor dont les coefficients sont convexes ou satisfont à d'autres conditions analogues (обрасци 29 и 30). *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe, III* (у штампи).

[9] Fejér, L. — *Journ. f. Math*, **138** (1910). str. 27.

[10] Pólya, G. u. Szegö, G. — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. *I*, str. 37, Berlin 1925.

ZUR THEORIE DER LEGENDRESCHEN POLYNOME

Von M. Tomić (Beograd)

Die Bernsteinsche Ungleichung (1) für die Legendresche Polynome wird für etwas allgemeinere Polynome gegeben. Die Koeffizienten dieser Polynome (5) sind monotone und befriedigen die Bedingung (7). Die Ungleichung (1) folgt aus einer expliziten Darstellung von ΔP_n (9') in der wie üblich $P_n(\cos\theta)$ die Legendreschen Polynome bezeichnet. $J_n(\sin\theta)$ ist das zu konjugierte Polynom. Weiter wird mit Hilfe der bekannten Identität (3) der Gronwallsche Satz über die Lebesguesche Konstante für Legendresche Polynome abgeleitet. Es wird gezeigt dass das zweite Glied dieser assymptotischen Darstellung von der Grössenordnung $O(1/\sqrt{n})$ ist. Die O – Konstante des zweiten Gliedes ist von den zwei ersten Gliedern der assymptotischen Entwicklung von $P_n(\cos\theta)$ und $J_n(\sin\theta)$ abhängig.