О АСИМПТОТСКОЈ ВРЕДНОСТИ LEGENDRE-ОВИХ ПОЛИНОМА

ЈОВАН КАРАМАТА и МИОДРАГ ТОМИЋ (Београд)

1. Позната Darboux-Stieltjes-ова [1] асимптотска формула за Legendre-ов полином $P_n(\cos\vartheta)$ изводи се из Dirichlet-Mehler-овог обрасца

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+{}^1/_2)\varphi\,d\varphi}{\{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)\}^{1/2}}$$

или сличних интеграла, из којих се добива ред конвергентан за $\pi/6<\vartheta<5\pi/6$, а који се у ствари своди на асимптотски ред који важи за свако $\varepsilon<\vartheta<\pi\,\varepsilon$.

У свом саопштењу од 18-I-1950 М. Томић је показао да се први члан тог асимптотског развитка, тј. Laplace-Stieltjes-ова формула [1], може добити из Fourier-ова реда Legendre-ова полинома, који је дао Heine [2]. На седници од 25-I-1950 J. Карамата је показао да се овим путем могу добити и остали чланови асимптотског развитка. Овде ћемо извести рачун само за други члан, при чему напомињемо да се овим поступком може добити не само цео асимптотски развитак Legendre-ова полинома већ се исти може применити и на класу извесних Fourier-ових редова са тотално монотоним коефицијентима.

Сам поступак употребљава најједноставнија сретства анализе и користи се искључиво Abel-овим делимичним сабирањем, а почива на леми наведеној у тачки 2. Нагласимо и то да се облик овог асимптотског реда добива непосредно преко функције

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu,$$

и њених извода што је у складу са познатим асимптотским редовима. У Darboux-Stieltjes--ову обрасцу треба наиме, поједине чланове поново скупити да би се добио овај образац

$$P_n(\cos\vartheta)=2\,a_n\,R\{z^{n-1}f(z^2)+\frac{z^{n-1}}{4\pi}[z\,f(z^2)]'\}+o\,({}^1/n\sqrt{n})\quad\text{са}\quad z=e^{\vartheta i}.$$

2. Лема *Нека је*

$$a_\nu^{(n)} \geqslant a_{\nu+1}^{(n)} \quad \text{за свако} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

и

$$a_\nu^{(n)} \to a_\nu \quad \text{кад} \quad n \to \infty .$$

Ако

$$a_\nu \to 0 \ \text{кад} \ \nu \to \infty ,$$

шада

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} \, e^{\nu\vartheta i} \to \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, e^{\nu\vartheta i}, \qquad n \to \infty ,$$

униформно йо ϑ *за свако*

$$0 < \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \alpha .$$

Доказ. При доказу користићемо се неједначином (види [3])

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} A_\nu \, e^{\nu\vartheta i} \right| \leqslant \frac{A_n}{\sin \vartheta/2}, \quad 0 < \vartheta < \pi , \tag{1}$$

која важи кадгод низ A_ν опада, тј. кад је

$$A_\nu \geqslant A_{\nu+1} .$$

Како је

$$\Delta_n = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} \, e^{\nu\vartheta i} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, e^{\nu\vartheta i} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \, e^{\nu\vartheta i} + \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \, e^{\nu\vartheta i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) e^{\nu\vartheta i} \right| + \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu^{(n)} \, e^{\nu\vartheta i} \right| + \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu \, e^{\nu\vartheta i} \right| ,$$

то је, према (1),

$$\Delta_n \leqslant \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \, e^{\nu\vartheta i} \right| + \frac{a_k^{(n)}}{\sin \vartheta/2} + \frac{a_k}{\sin \vartheta/2} .$$

Према томе је

$$\limsup_{n=\infty} \Delta_n \leqq 2 \, \frac{a_k}{\sin \vartheta/2} .$$

Како је

$$\frac{2 \, a_k}{\sin \vartheta/2} < \varepsilon_\alpha \quad \text{за свако} \quad 0 < \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \alpha ,$$

ако само изаберемо довољно велико k, то мора $\Delta_n \to 0$ кад $n \to \infty$, чиме је горња лема доказана.

2. Heine-ов {2} ред за Legendre-ов полином $P_n(\cos\vartheta)$ има облик

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{a_{n+\nu}}\,\frac{\sin(n+2\nu+1)\vartheta}{2n+2\nu+1}, \tag{2}$$

где су бројеви a_ν, $\nu=0,1,2,\ldots$ Taylor-ови коефициенти функције

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu, \tag{3}$$

тј. где је

$$a_0 = 1,\quad a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{2n-1}{2n}a_{n-1},\quad n=1,2,3,\ldots . \tag{3'}$$

Према томе можемо ставити

$$P_n(\cos\vartheta) = 2\,a_n\,R\{e^{(n+1)\vartheta i}\,f(e^{2\vartheta i})\} - R\{e^{(n+1)\vartheta i}\,\delta_n(\vartheta)\}, \tag{4}$$

где је

$$\delta_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)}\, e^{2\nu\vartheta i}, \tag{5}$$

а

$$c_\nu^{(n)} = 2\,a_\nu\left(a_n - \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{a_{n+\nu}(2n+2\nu+1)}\right). \tag{6}$$

Како је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{7}$$

то образац (4) даје први члан асимптотског развитка за $P_n(\cos\vartheta)$. Да бисмо добили и други члан, потребно је да још оценимо $\delta_n(\vartheta)$ кад $n\to\infty$.

Из асимптотског израза (7) за a_n следи, према (6), да је

$$c_\nu^{(n)} = \frac{2\,a_\nu}{a_{n+\nu}}\left\{a_n\,a_{n+\nu} - \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2n+2\nu+1}\right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{\pi\,a_{n+\nu}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+\nu}}\left[1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left[1 - \frac{1}{8(n+\nu)} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{2}{2n+2\nu+1}\right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{\pi\, n a_{n+\nu}} \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+\nu}} \left[1 - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \frac{2\,n}{2n+2\nu+1} \right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{\pi\, n/\sqrt{n\pi}} \left\{ \left[1 - \frac{2\nu+1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[1 - \frac{2\nu+1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{\sqrt{\pi}\, n \sqrt{n}} \left[\frac{2\nu+1}{4} + o(1) \right] = \frac{(2\nu+1)\, a_\nu}{2\sqrt{n}\sqrt{n}\,\pi} + o(1/n\sqrt{n}). \qquad (8)$$

Отуда видимо да је

$$n\sqrt{n}\, c_\nu^{(n)} = c_\nu + o(1).$$

где је

$$c_\nu = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (2\nu+1)\, a_\nu.$$

Како c_ν не само да не тежи нули са $1/\nu$, већ тежи монотоно бесконачности, то да бисмо на израз за $\delta_n(\vartheta)$ могли применити наведену лему, морамо га претходно трансформисати, тј. свести на изразе на које ту лему можемо применити. Ако у реду за $\delta_n(\vartheta)$ извршимо делимично сабирање, добићемо

$$\delta_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} = \frac{1}{1 - e^{2\vartheta i}} \left\{ c_0^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)}\right) e^{2\nu\vartheta i} \right\}.$$

Показаћемо да се ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)}\right) e^{2\nu\vartheta i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}$$

може написати у облику

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} - \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i},$$

тј. ставити

$$d_\nu^{(n)} = e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)},$$

где низови

$$n\sqrt{n}\, e_\nu^{(n)} \quad \text{и} \quad n\sqrt{n}\, f_\nu^{(n)}$$

задовољавају услове леме, тако да се она може применити на сваки од редова

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}.$$

4. У ту сврху пођимо од Wallis-ова обрасца

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2\nu)^2}\right)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu-1}{2\nu}\,\frac{2\nu+1}{2\nu}.$$

Како је

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}=\frac{2n-1}{2n}a_{n-1},\tag{9}$$

то је

$$(2n+1)a_n^2=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2\nu)^2}\right).$$

Према томе, низ $(2n+1)a_n^2$ монотоно опада и тежи $2/\pi$; дакле,

$$\frac{2}{\pi}<(2n+1)a_n^2.\tag{10}$$

Ако још ставимо

$$b_n=\frac{2}{\pi(2n+1)a_n},$$

биће, према (9),

$$b_n=\frac{2n}{2n+1}b_{n-1}<b_{n-1},\tag{11}$$

а сам низ $c_\nu^{(n)}$ можемо тада написати у облику

$$c_\nu^{(n)}=2a_\nu(a_n-b_{n+\nu}).$$

Како је, према (9),

$$c_\nu^{(n)}=\frac{2\nu-1}{\nu}a_{\nu-1}(a_n-b_{n+\nu}),$$

а, према (11),

$$\begin{aligned}c_{\nu-1}^{(n)}&=2a_{\nu-1}(a_n-b_{n+\nu-1})=\\&=2a_{\nu-1}(a_n-\frac{2n+2\nu+1}{2n+2\nu}b_{n+\nu}),\end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned}d_\nu^{(n)}&=c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)}=\\&=2a_{\nu-1}\left\{(\frac{2\nu-1}{2\nu}-1)a_n-\left(\frac{2\nu-1}{2\nu}-\frac{2n+2\nu+1}{2n+\nu}\right)b_{n+\nu}\right\}=\\&=\frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{\frac{n+2\nu}{n+\nu}b_{n+\nu}-a_n\right\}=\\&=2\frac{a_{\nu-1}b_{n+\nu}}{n+\nu}-\frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{a_n-\frac{n}{n+\nu}b_{n-\nu}\right\}=\\&=e_\nu^{(n)}-f_\nu^{(n)}.\end{aligned}$$

Јасно је да низ

$$e_\nu^{(n)} = 2\,\frac{a_{\nu-1}\,b_{n+\nu}}{n+\nu}$$

опада с обзиром на ν за свако n, јер, према (9) и (11), низови a_ν и $b_{n+\nu}$ опадају кад ν расте. Да бисмо показали да и низ

$$f_\nu^{(n)} = \frac{a_{\nu-2}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\}$$

опада, посматрајмо разлику

$$f_\nu^{(n)} - f_{\nu+1}^{(n)}.$$

Како је, према (9)

$$f_\nu^{(n)} = \frac{a_{\nu-1}}{\nu}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{2\,a_\nu}{2\nu-1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu}\,b_{n+\nu}\right\},$$

а, према (10)

$$f_{\nu+1}^{(n)} = \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu+1}\,b_{n+\nu+1}\right\} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{n}{n+\nu+1}\,\frac{2\,n+2\,\nu+2}{2\,n+2\,\nu+3}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu+1}\left\{a_n - \frac{2\,n}{2\,n+2\,\nu+3}\,b_{n+\nu}\right\},$$

то је

$$f_\nu^{(n)} - f_{\nu+1}^{(n)} =$$

$$= \frac{a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{\left[(2\,\nu+2) - (2\,\nu-1)\right]a_n - \left[\frac{\nu+1}{n+\nu} - \frac{2\,\nu-1}{2n+2\nu+3}\right]2\,n\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{3\,a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{a_n - \frac{2\,n\,(n+2\,\nu+3)}{(n+\nu)\,(2\,n+2\nu+3)}\,b_{n+\nu}\right\} =$$

$$= \frac{3\,a_\nu}{\nu\,(2\,\nu-1)}\left\{a_n - \frac{2\,(n+\nu)^2+2\,(n-\nu^2)}{2\,(n+\nu)^2+3\,(n+\nu)}\,b_{n+\nu}\right\}.$$

А како је

$$\frac{2\,(n+\nu)^2+2\,(n-\nu^2)}{2\,(n+\nu)^2+3\,(n+\nu)} < 1,$$

и, према (11),

$$b_{n+\nu} < b_n,$$

а

$$b_n < a_n ,$$

јер је, према (10),

$$b_n = \frac{2}{\pi(2n+1)a_n} < a_n,$$

то је израз у витичастој загради позитиван, тј.

$$f_\nu^{(n)} > f_{\nu+1}^{(n)}.$$

Најзад, је, према (7),

$$b_n = \frac{1}{\pi n \sqrt{n}}\left(1 - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$e_\nu^{(n)} \sim \frac{2a_\nu}{\sqrt{\pi n \sqrt{n}}},$$

$$f_\nu^{(n)} \sim \frac{3a_\nu}{2\sqrt{\pi n \sqrt{n}}}.$$

а

$$d_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} \sim \frac{a_\nu}{2\sqrt{\pi n \sqrt{n}}}, \quad n \to \infty .$$

Према томе

$$e_\nu^{(n)} > e_{\nu-1}^{(n)}, \quad \text{за свако } n,$$

и

$$\sqrt{\pi n \sqrt{n}}\, e_\nu^{(n)} \to 2a_\nu \quad \text{кад } n \to \infty, \tag{12}$$

а

$$f_\nu^{(n)} > f_{\nu+1}^{(n)} \quad \text{за свако } n,$$

и

$$\sqrt{\pi n \sqrt{n}}\, f_\nu^{(n)} \to \frac{3}{2} a_\nu \quad \text{кад } n \to \infty , \tag{13}$$

Како $a_\nu \to 0$, то можемо на редове

$$\Sigma e_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i} \text{ и } \Sigma f_\nu^{(n)} e^{2\nu\vartheta i}$$

применити лему из тачке **2**.

Како је

$$c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} = d_\nu^{(n)} = e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)},$$

то, према (12) и (13),

$$\sqrt{\pi n \sqrt{n}}\,(e_\nu^{(n)} - f_\nu^{(n)}) \to \frac{1}{2} a_\nu = \frac{1}{2}\{(2\nu+1)a_\nu - (2\nu-1)a_{\nu-1}\},$$

па је

$$c_\nu^{(n)} - c_{\nu-1}^{(n)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n \sqrt{n}}}\{(2\nu+1)a_\nu - (2\nu-1)a_{\nu-1}\}.$$

Отуда следи да је

$$\delta_n(\vartheta)=\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{c_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(c_\nu^{(n)}-c_{\nu-1}^{(n)}\right)e^{2\nu\vartheta i}\right\}+o\left(1/n\sqrt{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi n}\sqrt{n}}\,\frac{1}{1-e^{2\vartheta i}}\left\{a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(2\nu+1)a_\nu-(2\nu-1)a_{\nu-1}\right]e^{2\nu\vartheta i}\right\}+$$

$$+o\left(1/n\sqrt{n}\right).\quad(14)$$

За $|z|<1$ је

$$\frac{1}{1-z^2}\left\{a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(2\nu+1)-(2\nu-1)a_{\nu-1}\right]z^{2\nu}\right\}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)a_\nu z^{2\nu}=$$

$$=\{zf(z^2)\}',$$

па је, према (14), и

$$\delta_n(\vartheta)=[zf(z^2)]'+o\left(1/n\sqrt{n}\right),\quad \text{за } z=e^{\vartheta i}.$$

Ако ову вредност за $\delta_n(\vartheta)$ уврстимо у образац (4), добивамо коначно прва два члана асимптотског развитка за $P_n(\cos\vartheta)$, који можемо написати овако

$$P_n(\cos\vartheta)=2a_nR\{z^{n+1}f(z^2)\}-\frac{1}{2\sqrt{\pi n}\sqrt{n}}R\{z^{n+1}[zf(z^2)]'\}+$$

$$+o\left(1/n\sqrt{n}\right).$$

са $z=e^{\vartheta i}$; или, према (7),

$$P_n(\cos\vartheta)=2a_n\left\{\varphi_0(\vartheta)-\frac{1}{4n}\varphi_1(\vartheta)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\},$$

где је

$$\varphi_0(\vartheta)=R\{z^{n+1}f(z^2)\},$$

а

$$\varphi_1(\vartheta)=R\{z^{n+1}[zf(z^2)]'\},\quad \text{са } z=e^{\vartheta i}.$$

Тиме је образац наведен у тачки 1 доказан.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Darboux G. — *Journ, de math.* (3), *4* (1878), str. 5 i 377. За Laplace—Stieltjes-ов као и Darboux-Stieltjes образац види још: Whittaker E. T. and Watson G. N. — A course of modern analysis. Cambridge1946, стр.315, као и Copson E. T. — Theory of functions, Oxford 1935, стр. 282.

[2] Heine E. — Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, 2-te Aufl. Berlin 1878.

[3] Karamata J. et Tomić M. — Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences, 2* (1948) стр. 160.

ÜBER DIE ASSYMPTOTISCHE FORMEL FÜR DIE LEGENDRESCHE POLYNOME

Von J. Karamata und M. Tomić (Beograd)

Die Verfasser leiten die bekannte Darboux-Stieltjessche Assymptotische Formel aus der Fourierschen Reihe dieser Polynome ab. Als wesentlich erweist sich dabei die Vollmonotonie der Koeffizienten der Fourierschen Reichen. Dem ersten der Verfasser ist es inzwischen gelungen einen allgemeinen Satz über die assymptotische Entwiclyng Fourierschen Reihen mit vollmonotonen Koeffizienten zu beweisen. (*Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe*, IV, in Druck).