СИСТЕМ ПОСТУЛАТА ЕУКЛИДОВЕ *n*-ДИМЕНЗИОНАЛНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ (Београд)

Уводна реч

У редовима који следују писац је покушао да формулише постулате Еуклидове *n*-димензионалне геометрије. Тај се покушај разликује од ранијих покушаја те врсте (од стране Euklid-а, Hilbert-а и Thieme-а) углавном овим трима новинама:

1° одвајањем геометрије једнодимензионалне праве (*ректометрије*) од геометрије дводимензионалне равни (*планиметрије*);

2° проглашавањем појма дужи за основни појам ректометрије, и

3° увођењем постулата везе за просторе са више од три димензије.

А. Ректометрија

1. ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1. *Ван дате тачке постоји бар још једна тачка.*

Постулат 2. *Те две тачке спаја једна и само једна дуж.*

Дефиниција. Тачке, које спаја дуж, називају се њеним *крајњим тачкама.*

2. ПОСТУЛАТИ РЕДА.

Постулат 1. *Између крајњих тачака дужи постоји бар још једна тачка.*

Став 1. Између крајњих тачака дужи постоји бесконачно много тачака.

Дефиниција 1. Ако се са C означи трећа тачка на дужи AB‘ дужи AC и CB називају се *делимичним дужима* дужи AB.

Постулат 2. *Ван сваке крајње тачке дужи постоји бар још једна тачка.*

Дефиниција 2. Дуж, која спаја крајњу тачку дужи са тачком ван ње, назива се *продужење* дате дужи.

Став 2. Дуж има два продужења.

Постулат 3. *Продужење дужи изван једне крајње тачке њене поклапа се са продужењем делимичне дужи са истом крајњом тачком.*

3. ПОСТУЛАТИ КОНГРУЕНЦИЈЕ.

Постулат 1. *На продужењу дужи AB постоји једна и само једна тачка C тако да је дуж $BC \cong AB$.*

Став 1. На сваком од своја два продужења дуж се да продужити *произвољно много* пута.

Дефиниција 1. Дуж заједно са своја два неодређено велика продужења назива се *правом линијом.*

Дефиниција 2. За сваку тачку праве линије каже се да дели праву на две *полуправе.*

Постулат 2. *Дата дуж да се* (тачкама за које се претпоставља да постоје између њених крајњих тачака) *поделити на n конгруентних делимичних дужи, при чему је n редом равно сваком од простих бројева,* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 *итд.*

Став 2. Дата дуж да се (тачкама које постоје између њених крајњих тачака) поделити на n конгруентних делимичних дужи, при чему је n редом равно сваком целом позитивном броју почев са 2.

4. ПОСТУЛАТ БЕСКРАЈНЕ ПРАВЕ.

Дефиниција. Бескрајном називамо праву чије полуправе имају *померљиве* крајње тачке.

Постулат. *Неодређено велике полуправе бескрајне праве, маколико их продужили, немају заједничке тачке.*

Напомена. Поред горње (Еуклид-ове) дефиниције бескрајне праве постоји у Еуклидовој геометрији још једна дефиниција бескрајне праве: Бескрајном називамо праву чије полуправе *немају крајњих тачака.* Ова друга дефиниција одговара претпоставци, да једна полуправа може реализовати *цео* бесконачан низ коначних целих бројева, док прва дефиниција почива на претпоставци, да једна полуправа може реализирати само један *коначни* (иако неодређено велики) *део* тог низа.

В. Планиметрија

1. ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1. *Ван праве постоји бар још једна тачка.*

Став 1. Ван праве постоји бесконачно много дужи, правих и тачака.

Постулат 2. *Права и тачка ван ње одређују раван.*

Став 2. Положај праве у равни одређен је са две тачке равни.

Став 3. Две праве у равни или се секу у једној тачци или немају ниједне заједничке тачке.

Дефиниција 1. За две полуправе равни, које полазе од исте тачке, каже се да заклапају међу собом *угао.*

Дефиниција 2. За полуправу, која са обе полуправе једне праве заклапа једнаке углове, каже се да је *управна* на датој правој, а за углове да су *прави.*

Став 4. Ако је једна полуправа једне праве управна на другој правој, онда је и друга полуправа њена управна на овој другој правој.

Став 5. Две су праве управне једна на другој, ако је свака полуправа једне праве управна на другој правој.

Став 6. Сви су прави углови једнаки.

2. ПОСТУЛАТ РЕДА.

Постулат. *Ако су A, B и C три тачке, које не леже на истој правој, и a једна права која у равни троугла ABC не пролази ни кроз једну од тачака A, B, C, тада ће, ако та права пролази кроз једну од тачака дужи AB, она морати пролазити или кроз једну од тачака дужи BC или кроз једну од тачака дужи AC.* (Pasch-ов постулат).

3. ПОСТУЛАТИ КОНГРУЕНЦИЈЕ.

Постулат 1: *Ако су A и B две тачке на правој a, а A' тачка на правој a', постојаће, на са A', почињућој полуправој праве a' једна и само једна тачка B' тако, да дуж $A' B'$ буде конгруентна са дужи $A B$ ($A' B' \cong AB$).*

Постулат 2. *Ако је дат угао BAC и ван њега права a са полуправом која почиње тачком A' тада ће постојати један и само један $\sphericalangle B'A'C'$ тако да буде $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle BAC$.*

Постулат 3. *Ако за два троугла ABC и $A'B'C'$ постоје конгруенције:*

$$AB \cong A'B',\ AC \cong A'C' \text{ и } \sphericalangle A \cong \sphericalangle A',$$

постојаће и конгруенције:

$$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C' \text{ и } ACB \cong \sphericalangle A'C'B'.$$

Став 1. Ако су у два троугла конгруентне две стране и захваћени угао, биће конгруентни и остала два угла и трећа страна.

Став 2. Ако су у два троугла конгруентни једна страна и два угла на њој, биће и остале две стране и трећи угао конгруентни.

4. ПОСТУЛАТ ПАРАЛЕЛНИХ.

Дефиниција. За праву кроз дату тачку ван дате праве у равни каже се да је *паралелна* са овом правом ако се не сече са њом.

Став 1. Ако две праве имају *заједничку управну*, оне су паралелне.

Став 2. Кроз дату тачку ван дате праве пролази *бар једна* права која је паралелна са њом.

Став 3. Ако су две праве пресечене трећом тако да унутрашњи наизменични углови буду једнаки, те две праве имаће заједничку управну и бити паралелне.

Постулат. *Кроз дату тачку ван дате праве може пролазити само једна паралелна* (Еуклид-ов постулат).

Став 4. Ако су две паралелне праве пресечене трећом правом биће унутрашњи наизменични углови једнаки.

5. ПОСТУЛАТИ НЕПРЕКИДНОСТИ.

Постулат 1. *Ако су дате две дужи a и b тако да је $a > b$, постојаће увек коначан цео број n тако велики да ће се, ако се њим помножи мања дуж, добити дуж која ће бити већа од веће дужи, тј. $a.n$ биће $> b$* (Архимед-ов постулат).

Постулат 2: *Ако су на једној дужи дата два бескрајна низа тачака, који се у супротнои правцу један другом приближују, а од којих први 'нема последњег а други првог члана, мораће између та два низа постојати једна гранична тачка, која ће се моћи придати или првом низу као горња или другом низу као доња граница* (Dedekind-ов постулат).

С. Стереометрија

ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1: *Ван равни постоји бар још једна тачка.*

Став 1. Ван равни постоји *бесконачно много* правих, равни и тачака.

Постулат 2. *Раван и тачка ван равни одређују простор.*

Став 2. Положај равни у простору одређен је са *три тачке* простора, које не леже на једној правој.

Став 3. Две равни у простору или немају ниједне заједничке тачке или је њихов пресек права.

Став 4. Раван и права ван ње или немају ниједне заједничке тачке, или им је само једна тачка заједничка.

Став 5. Две праве које се секу одређују у простору само једну раван.

Дефиниција. Једна полуправа *управна* је на једној равни, ако је управна на свима правима те равни које пролазе кроз њено подножје.

D. Хиперстереометрија

ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Постулат 1. *Ван простора постоји бар још једна тачка.*

Постулат 2. *Простор и тачка ван њега одређују хиперпростор.*

Став 1. Положај простора у хиперпростору одређен је са *четири* тачке хиперпростора, које не леже ни у једној равни ни на једној правој.

Став 2. Две равни у хиперпростору, које припадају двама тродимензионалним просторима, ако се секу, секу се у *једној тачки.*

Дефиниција. Једна полуправа *управна* је на једном простору ако је управна на свима правима тога простора, које пролазе кроз њено подножје.

E. Геометрија n-димензионалног простора

ПОСТУЛАТИ ВЕЗЕ.

Дефиниција. Под n-димензионалним простором разумемо простор са *више од четири* димензије.

Постулат 1: *Ван $n-1$ димензионалног простора постоји бар још једна тачка.*

Постулат 2: *$n-1$ димензионални простор и тачка ван њега одређују n-димензионални простор.*

Завршна примедба

Истинитост одвајања ректометрије од планиметрије потврђује општа Ајлер-ова теорема Еуклид-ове n-димензионалне геометрије. А ево како.

Ајлер-ова теорема за конвексне полиедре гласи (ако се са e означи број темена, са k број ивица, са f број површина, одн. страна):

$$e-k+f=2.$$

Одговарајућа Ајлер-ова теорема за конвексне политопе биће (ако се број страна политопа означи са v):

$$e-k+f-v=0,$$

а одговавајућа Ајлер-ова теорема за петодимензионални простор биће (ако се са h означи број четиридимензионалних страна):

$$e-k+f-v+h=2.$$

Те три Ајлер-ове теореме могу се написати и овако:

$$(e+f)-k=2,$$
$$(e+f)-(k+v)=0,$$
$$(e+f+h)-(k+v)=2.$$

Овако написане оне показују, да ће лева страна Ајлер-ове теореме за простор непарног броја димензија бити $=2$, а парног броја $=0$. Према томе Ајлер-ова теорема за дводимензионални простор била би:

$$e-k=0,$$

а за једнодимензионални

$$e=2.$$

Доиста број темена конвексних полигона у равни исти је са бројем њихових страна, а 2 у изразу $e=2$ је број крајњих тачака дужи.

POSTULATENSYSTEM DER n-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN GEOMETRIE

Von Branislav Petronijević (Beograd)

Versuch eines Postulatensystems der n-dimensionalen Euklidischen Geometrie. Zum Unterschied von früheren Versuchen dieser Art (Euklid, Hilbert, Thieme) werden vom Verfasser folgende drei Neuigkeiten eingeführt: 1. Abtrennung der Geometrie der eindimensionalen Geraden (Rectometrie) von derjenigen der zweidimensionalen Ebene (Planimetrie). 2. Erhebung des Begriffes der Strecke zu dem Grundbegriffe der Rectometrie. 3. Einführund der Verknüpfungspostulate in die n-dimensionale ($n \geqslant 3$) Geometrie.