ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА

РАДИВОЈЕ КАШАНИН (Београд)

При проучавању кретања система материјалних тачака подвргнутих везама редовно се узимају или холономне везе или, ако су везе нехолономне, линеарне по координатама брзина (Декартовим или генералисаним). Изузетно су се проучавале и везе квадратне по координатама брзине, ако те везе резултују једним лимитним процесом из линеарних веза.

Циљ овога рада је:

1. Да се даду диференцијалне једначине свих реалних кретања компатибилних са везама без обзира на то какве су ове везе: холономне, или нехолономне, линеарне по брзинама или не (IV);

2. Да се, између свих могућих реалних кретања, истакну и дефинишу кретања са идеално успостављеним везама (V);

3. Да се дефинише појам виртуелних померања и склерономост и реономост у најопштијем случају веза (VI), и на основи тога изведе т. зв. основна једначина Динамике ма за какве везе (VII);

4. Да се појму кретања са идеално успостављеним везама даде конкретно тумачење (VIII).

I

Кад су дате спољашње и унутрашње силе и почетни услови за систем материјалних тачака, кретање сваке од тих тачака потпуно је одређено основним једначинама Динамике, тј. не могу се дати унапред више никакви услови које би требало да испуњавају вектори положаја и брзина датих тачака. Да би били испуњени још и неки унапред дати услови, потребно је уопште увести и нове силе поред већ датих. Проблем се може овако формулисати: на поједине материјалне тачке неког система дејствују познате спољашње и унутрашње силе; какве силе треба још за поједине материјалне тачке додати и какве почетне услове узети да би, у току кретања, између вектора положаја и брзина тих тачака постојале извесне везе, изражене неким, унапред датим, једначинама или неједначинама? — Разуме се, све се то ради у одређеном систему референције у ком се кретање проучава.

За овакве системе материјалних тачака се каже да су везани. Везе изражене једначинама су билатералне, а везе изражене неједначинама су унилатералне. Силе које треба додати да би везе биле реализоване зову се силе веза. У даљем ћемо се бавити само билатералним везама.

Билатералне везе су изражене једначинама у којима долазе уопште $3n$ координата x_i, y_i, z_i материјалних тачака, $3n$ координата $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ брзина тих тачака и време t. Неке од тих једначина садржаваће само координате тачака, а не и координате брзина, а неке ће, поред координата тачака, садржавати и координате брзина. Првих нека буде μ, а других μ':

$$\begin{gathered} f_j(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0, \quad g_k(x_1, y_1, z_1; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \ldots, \dot{z}_n; t) = 0 \\ (j = 1, 2, \ldots, \mu) \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu'). \end{gathered} \tag{1}$$

Укупан број $\nu = \mu + \mu'$ тих једначина мањи је од $3n$, јер би иначе већ самим тим једначинама кретање било потпуно одређено или онемогућено.

Да не бисмо стално разликовали две врсте једначина, оне које садрже координате брзина и оне које их не садрже, ми ћемо, помоћу диференцирања по t, и првој врсти дати облик друге:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Означимо ли леву страну ове једначине са $g_{\nu+j}$, имаћемо као везе:

$$\begin{gathered} g_k(x_1, y_1, z_1; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0, \\ (k = 1, 2, \ldots, \nu < 3n) \end{gathered} \tag{3}$$

где свака једначина садржи бар једну координату брзине. Интегрирањем из (2) добивамо $f_j = C_j$, где су C_j константе; но, како и почетни услови морају задовољавати једначине $f_j = 0$, то излази $C_j = 0$, па је опет $f_j = 0$. Према томе, систем једначина (3) еквивалентан је са системом једначина (1).

Из система (3) моћи ће се уопште ν координата брзина изразити као функције $3n$ координата датих тачака, преосталих $3n - \nu$ координата брзина и времена t. Ако то није могуће, онда ће се моћи начинити известан број елиминаната, тј. једначина без координата брзина, па ћемо те једначине опет диференцирати по t.

У сваком случају, дакле, ако су једначине (1) независне, можемо претпоставити да систем (3) дефинише ν координата брзинâ као функције $3n$ координата тачака, преосталих $3n-\nu$ координата брзина и времена t. Тих ν координата брзина означићемо са $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$. Онда је:

$$\xi_j = \Theta_j(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \xi_{\nu+1} \ldots, \xi_{3n}), \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{4}$$

где су $\xi_{\nu+1} \ldots, \xi_{3n}$ оне координате брзина које су после $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ преостале. Претпостављамо, дакле, да су везе независне и непротивречне; то значи да мора бити

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_\nu)}{\partial(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \dot{\xi}_\nu)} \neq 0. \tag{4bis}$$

Диференцирањем по t добивамо из (3):

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_k}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial g_k}{\partial \dot{y}_i}\ddot{y}_i + \frac{\partial g_k}{\partial \dot{z}_i}\ddot{z}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial g_k}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial g_k}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0$$

$$(k = 1, 2 \ldots, \nu). \tag{5}$$

Интегрирањем добивамо одавде $g_k = C'_k$, где су C'_k константе. Но, како почетни услови морају задовољавати једначине $g_k = 0$, то је $C_k' = 0$, па је опет $g_k = 0$. Према томе можемо рећи: почетни услови морају задовољавати једначине $f_j = 0$ и $g_k = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, \mu;\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$; ако почетни услови те једначине задовољавају, за систем веза може се узети систем једначина (5). Тако смо решили питање почетних услова и дошли за везе до облика (5).

Да би нам писање у облику (5) било лакше, употребићемо векторски рачун. Увешћемо формалне векторе ∇_i и ∇'_i, т. зв. Хамилтонов оператор, са координатама

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i}, \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i}.$$

Вектор положаја тачке (x_i, y_i, z_i) означићемо са $\mathfrak{r}_i$, а његове изводе по t првог и другог реда са $\dot{\mathfrak{r}}_i$ и $\ddot{\mathfrak{r}}_i$. Онда се систем (5) може писати у облику

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla'_i g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla_i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Испитаћемо прво какве треба да буду спољашње силе $\mathfrak{F}_i$ и унутрашње силе $\mathfrak{F}'_i$, па да везе при кретању буду задовољене ма какви били почетни услови компатибилни са $f_j=0$ и $g_k=0$. У том случају, поред једначина (6), морају бити задовољене и основне једначине Динамике:

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i', \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

где је m_i маса материјалне тачке (x_i, y_i, z_i). Узмемо ли одавде вредност $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ и ставимо је у (6), добићемо за $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ ν услова:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\mathfrak{F}+_i\mathfrak{F}'_i) . \nabla'_i g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i . \nabla_i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

$$(k=1,2,\ldots,\nu).$$

Силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ дате су унапред као функције вектора положаја $\mathfrak{r}_i$, вектора брзина $\mathfrak{r}_i$ и времена t; уврстимо ли те функције у леву страну једначине (7), мора она дати идентички нулу. Тада су постављене везе први интеграли диференцијалних једначина кретања.

Ако силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ задовољавају услове (7), нису то једине силе под чијим ће утицајем бити везе (3) одржане. Додајмо, наиме, датим силама $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$ за сваку тачку још силу $\overline{\mathfrak{F}}_i$, па покушајмо ову одредити тако да буду одржане везе (6). Онда, поред једначина (6), морају бити задовољене и једначине

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i' + \overline{\mathfrak{F}}_i, \quad (i = 1, 2,\ldots, n)$$

Узмемо ли одавде $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ и уврстимо у (6), добићемо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\dot{\mathfrak{F}}_i + \mathfrak{F}_i' + \overline{\mathfrak{F}}_i) . \nabla' g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i . \nabla_i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} = 0$$

што са (7) даје:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \overline{\mathfrak{F}}_i \cdot \nabla_i' g_k = 0, \quad (k=1,2,\ldots\nu). \tag{8}$$

Овде имамо ν једначина за $3n > \nu$ координата вектора $\overline{\mathfrak{F}}_i$, те када узмемо ма какве силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ које задовољавају ових ν једначина, биће везе одржане, само ће кретања, наравно, увек уопште бити друга. Према томе, да би под утицајем датих спољашњих и унутрашњих сила $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ везе $g_k=0$ биле одржане без обзира на почетне услове, потребно је и довољно да те силе задовољавају једначине (7); ако је то случај, те силе нису једине под чијим утицајем су дате везе одржане, већ се за сваку тачку може додати сила $\overline{\mathfrak{F}}_i$, но тако да ове силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ задовољавају једначине (8).

Ако дате спољашње и унутрашње силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ не задовољавају једначине (7), кретање под њиховим утицајем не задовољава дате везе, осим, може бити, под извесним почетним условима. Ми ћемо онда покушати да поред тих сила додамо тачки нову силу $\mathfrak{F}_i^*$, коју ћемо одредити тако да сад везе буду одржане. То значи, треба одредити $\mathfrak{F}_i^*$ тако да поред једначина (6) важе и једначине

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i' + \mathfrak{F}_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Узмемо ли одавде $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ и ставимо у (6), добићемо за $\mathfrak{F}_i^*$ једначине

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \mathfrak{F}_i^* \cdot \nabla_i' g_k = -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') \cdot \nabla_i' g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla^i g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} \right]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Како су $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_i', \nabla_i g_k, \nabla_i' g_k$ и $\frac{\partial g_k}{\partial t}$ познате функције координата материјалних тачака, координата њихових брзина и времена, то на десној страни последње једначине имамо познату функцију тих координата и времена; означићемо је са G_k:

$$G_k = -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') \cdot \nabla_i' g_k + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \nabla_i\, g_k + \frac{\partial g_k}{\partial t} \right]. \tag{9}$$

За $\mathfrak{F}_i^*$ имаћемо тако једначине:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \mathfrak{F}_i^* \cdot \nabla_i' g_k = G_k \tag{10}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Постављени проблем се, дакле, своди на питање имају ли једначине (10) решења по $\mathfrak{F}_i^*$, и ако имају, како ћемо их наћи.

Напред смо у (4^{bis}) претпоставили да је

$$\frac{\partial (g_1, g_2, \ldots, g_\nu)}{\partial (\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \ldots, \dot{\xi}_\nu)} \neq 0.$$

Међутим, једначине (10) линеарне су по координатама векторâ $\frac{1}{m_i} \mathfrak{F}_i^*$, са коефицијентима $\frac{\partial g_k}{\partial \dot{\xi}_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, 3n)$, те ће се моћи решити по онима од тих координата уз које су коефицијенти $\frac{\partial g_k}{\partial \dot{\xi}_j}$ за $j = 1, 2, \ldots, \nu$, јер је детерминанта начињена од тих коефицијената баш наведена функционална детерминанта; осталих $3n-\nu$ координата сила $\mathfrak{F}_i^*$ могу се узети произвољно. Према томе, систем (10) има решења по $\mathfrak{F}_i^*$, и то бесконачно много. Нека буде $\mathfrak{F}_i''$, $(i=1,2,\ldots,n)$ један спрег таквих решења. Ставимо ли $\mathfrak{F}_i^* = \mathfrak{F}_i'' + \overline{\mathfrak{F}}_i$ онда ће, као што је лако уверити се рачуном, а што следује и из раније реченог, вектори $\overline{\mathfrak{F}}_i$ задовољавати једначине (8).

И тако дошли смо до овог резултата: да би се при кретању система од n материјалних тачака са масама m_i, под утицајем датих спољашњих и унутрашњих сила $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$, одржавале унапред дате везе $g_k=0$, $(k=1,2,\ldots,\nu)$, потребно је за сваку од тих тачака додати једну одређену силу везâ $\mathfrak{F}_i''$ која задовољава једначине

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i''\cdot\nabla_i' g_k = G_k,\quad (k=1,2,\ldots\nu) \tag{11}$$

и силе $\overline{\mathfrak{F}}_i$ које задовољавају једначине

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\overline{\mathfrak{F}}_i\cdot\nabla_i' g_k = 0,\quad (k=1,2,\ldots\nu). \tag{11bis}$$

На тај начин, цео проблем се своди на једначине:

$$\left.\begin{array}{l}
m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i+\mathfrak{F}_i'+\mathfrak{F}_i''+\overline{\mathfrak{F}}_i, \quad g_k=0;\\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i''\cdot\nabla_i' g_k = G_k,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\overline{\mathfrak{F}}_i\cdot\nabla_i' g_k = 0;\\
(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,\nu)\\
\text{уз почетне услове}\\
f_j|_0=0,\quad g_k|_0=0;\quad (j=1,2,\ldots,\mu).
\end{array}\right\} \tag{12}$$

У једначинама (12) остали су нам још вектори $\mathfrak{F}_i''$ непрецизирани: они су нека одређена решења једначина (11), но није речено која. Треба се, дакле, определити за нека одређена решења између свих могућих решења тих једначина. Ако се то учини и ако се онда узму и вектори $\overline{\mathfrak{F}}_i$ тако да задовољавају једначине (11bis), проблем се своди на интегрирање $3n$ скаларних диференцијалних једначина другог реда са $3n$ непознатих функција x_i, y_i, z_i времена t; ове једначине су линеарне по $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$.

II

Везе се могу дати у много општијем облику него што смо досад радили. Нека буду, наиме, $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$ α параметара — функција од t — и нека координате x_i, y_i, z_i буду функције тих параметара:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha),\ y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha),\ z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha), \quad (13)$$

или у векторском облику:

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha). \quad (14)$$

Између тих α параметара q_j нека постоји β веза:

$$\gamma_k(q_1, q_2, \ldots, q_\alpha;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta), \quad (15)$$

$\left(\text{где је } \dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}\right)$, од којих свака садржи бар по један извод, и то тако да систем једначина (15) дефинише β тих извода као функције осталих извода и параметара q_j, на пример

$$\dot{q}_j = \vartheta_j(q_1, \ldots, q_\alpha;\ \dot{q}_{\beta+1},\ \dot{q}_{\beta+1}, \ldots, \dot{q}_\alpha) \quad (16)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \beta.$$

Претпостављамо да су везе независне и непротивречне; то значи да мора бити

$$\frac{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\beta)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\beta)} \neq 0. \quad (16^{bis})$$

Ако везе између параметра q_j не садрже изводе, може се, као и у I, диференцирањем по t постићи да садрже; претпостављамо да је то учињено и да су то једначине (15). Кретање тачака (x_i, y_i, z_i) биће познато ако знамо параметре q_j као функције времена.

Да би наш проблем имао смисла, морамо претпоставити $0 < \alpha - \beta \leqq 3n$. Јер, за $\alpha - \beta < 0$ био би број једначина (15) већи од броја параметара, а за $\alpha - \beta > 3n$ био би број независних параметара већи од броја координата, што ни једно ни друго нема за постављени проблем смисла; за $\alpha - \beta = 0$ био би број параметара једнак броју једначина (15), те би се из (15) могли ти параметри одредити као функције од t, тј. било би, на основи (13), кретање потпуно одређено.

У I посматране везе су специјалан случај ових. Треба, наиме, узети $\alpha = 3n + 1$, $\beta = \nu$, $x_i = q_i$, $y_i = q_{n+i}$, $z_i = q_{2n+i}$, $t = q_{3n+1}$, па ће (13) и (15) прећи у (3). На овај облик веза (13) и

(15) могу се лако свести још компликованије везе. Узмимо да су координате x_i, y_i, z_i функције не само параметара q_j, већ и њихових извода по t до извесног реда. Нека, на пример, од параметра q_1 долазе и изводи вишег реда, и највиши ред нека буде h. Ставићемо

$$\frac{dq_1}{dt}=r_1,\ \frac{d^2q_1}{dt^2}=r_2,\ldots,\ \frac{d^hq_1}{dt^h}=r_h.$$

Тако смо увели нових h параметара $r_1, r_2, \ldots, r_h$, али и нових h веза:

$$\dot{q}_1=r_1,\ \dot{r}_1=r_2,\ldots,\ \dot{r}_{h-1}=r_h.$$

Урадимо ли то за све параметре који долазе са изводима вишег реда у (13), имаћемо коначно опет облик (13) и (15), само ће број параметара бити повећан, а за исто толико и број веза; број $\alpha-\beta$ остаје непромењен. Слично ћемо урадити ако у једначинама (15) долазе изводи реда већег од један. Ако функције на десној страни у (13) и једначине (15) садрже време t, ставићемо $t=q_{\alpha+1}$; тиме смо увели нов параметар $q_{\alpha+1}$, али и нову везу $\dot{q}_{\alpha+1}-1=0$, па опет имамо облик (13) и (15). Сличним путем може се на овај облик свести и случај кад су дате везе између правоуглих координата и њихових извода ма до ког реда, а не само првог као у I.

Параметри q_j су генералисане координате, њихови изводи првог реда по t, $\dot{q}_j=\dfrac{dq_j}{dt}$, су генералисане брзине, а изводи другог реда по t, $\ddot{q}_j=\dfrac{d^2q_j}{dt^2}$ генералисана убрзања.

У случају веза (13) и (15) може се наш задатак овако формулисати: кад су дате спољашње и унутрашње силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}'_i$, какве силе веза $\mathfrak{F}_i^*$ треба додати, па да приликом кретања те везе буду одржане? Другим речима, наш задатак је у овоме: решити $6n+\beta$ скаларних једначина:

$$m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i=\mathfrak{F}_i+\mathfrak{F}'_i+\mathfrak{F}_i^*,\quad \mathfrak{r}_i=\mathfrak{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_\alpha),\ \gamma_k=0 \qquad (17)$$
$$(i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,\beta)$$

по α скалара $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$, по $3n$ скалара x_i, y_i, z_i и $3n$ координата вектора $\mathfrak{F}_i^*$, тј. одредити генералисане координате као функције времена и одредити силе веза̂. Кад су генералисане координате одређене као функције времена, биће, помоћу (13) или (14), познато и кретање сваке поједине материјалне тачке.

Према (13), брзине и убрзања материјалних тачака, силе итд., — све се то може изразити помоћу генералисаних координата и њихових извода по t. На пример, за вектор брзине $\dot{\mathfrak{r}}_i$ имаћемо из (14):

$$\dot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \dot{q}_\iota , \tag{18}$$

а одавде за вектор убрзања

$$\ddot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \ddot{q}_\iota + \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s . \tag{19}$$

Силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ су познате функције координата материјалних тачака, координата брзина тих тачака и времена; према томе, треба их, на основи (14) и (18), сматрати као познате функције генералисаних координата и генералисаних брзина и тако с њима оперисати. На пример, укупан елементарни рад свих спољашњих сила биће:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cdot d\mathfrak{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathfrak{F}_i \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] dt = \sum_{j=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j .$$

Скалари

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} , \; (j = 1,2,\ldots,\alpha) \tag{20}$$

зову се генералисане спољашње силе. Слично овоме имамо генералисане унутрашње силе:

$$Q'_j = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} , \; (j = 1,2,\ldots,\alpha) \tag{21}$$

и генералисане силе веза:

$$Q_j^* = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}^*_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} , \; (j = 1,2,\ldots,\alpha) \tag{22}$$

Генералисане силе су, тако, познате функције генералисаних координата и генералисаних брзина, ако су саме силе дате. Укупан елементарни рад свих спољашњих сила биће онда

$$\sum_{j=1}^{\alpha} Q_j \, dq_j ,$$

и слично за унутрашње силе и силе веза.

Скаларним множењем прве једначине из (17) са $\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$ добивамо

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \mathfrak{F}'_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \mathfrak{F}_i^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j},$$

па је, према (20), (21) и (22),

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = Q_j + Q'_j + Q_j^* \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha). \tag{23}$$

Како су $\mathfrak{r}_i$ познате функције генералисаних координата, то ћемо на левој страни ове једначине имати познату функцију генералисаних координата и њихових извода првог и другог реда; треба је само израчунати. Онда ће нам (23) дати α једначина по непознатих α генералисаних координата и непознатих α генералисаних сила веза. Но, уз то постоји још и β једначина $\gamma_k = 0$, укупно, дакле, $\alpha+\beta$ једначина по 2α непознатих, $2\alpha > \alpha+\beta$. Помножимо ли једначину (19) скаларно са $\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$, добићемо сабирањем од $i=1$ до $i=n$, у вези са (23),

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \right) \ddot{q}_\iota + \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s = Q_j + Q_j + Q_j^* . \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{24}$$

Левој страни ове једначине може се дати сажетији облик. Величина T одређена са

$$2\,T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \dot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) \tag{25}$$

зове се кинетичка енергија система материјалних тачака. Диференцирањем добивамо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} .$$

Но, из (18) добивамо, како у $\mathfrak{r}_i$ не улазе генералисане брзине,

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j},$$

па је

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} .$$

Диференцирање по времену t даје:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$$

С друге стране, из (25) добивамо

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d \mathfrak{r}_i}{dt} .$$

Према томе је

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d \mathfrak{r}_i}{dt} \right).$$

Лако се, међутим , уверити да је

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d \mathfrak{r}_i}{dt} .$$

И тако, с обзиром на (23), имамо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + Q_j' + Q_j^* . \tag{26}$$

Величина S одређена са

$$2\,S = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \ddot{\mathfrak{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \,(\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) \tag{27}$$

зове се енергија убрзања система материјалних тачака. Диференцирањем добивамо:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} .$$

Међутим, из (19) излази

$$\frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} ,$$

па је, на основи (23),

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q_j + Q_j' + Q_j^*. \tag{28}$$

Тако смо изнели четири начина за формирање потребних нам диференцијалних једначина: (23), (24), (26) и (28). Који ће се од ова четири начина у неком конкретном случају употребити, зависи од тога шта је лакше из (13) израчунати. За писање је најзгоднији облик (28). Скалар на левој страни тих једначина означићемо са $-J_j$, и звaћемо J_j генерализана сила инерције:

$$-J_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} =$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota}\cdot\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}\right)\ddot{q}_\iota + \sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{s=1}^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_r \dot{q}_s. \tag{29}$$

Наш задатак је тако сведен на овај: из $\alpha+\beta$ једначина

$$J_j + Q_j + Q'_j + Q_j^* = 0, \quad \gamma_k = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,\alpha;\ k = 1,2,\ldots,\beta) \tag{30}$$

где су Q_j, Q'_j, γ_k познате функције од $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$, а J_j још и од $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_\alpha$, одредити 2α величина q_j и Q_j^* као функције од t. Непознатих има, дакле, више него једначина, јер је $\alpha - \beta > 0$. Према томе, рачунски би требало постављени задатак овако решавати: 1° из познатих функција x_i, y_i, z_i у (13) треба формирати J_j, по једном од начина датих у (29), и Q_j и Q'_j, по (20) и (21); 2° наћи решења система једначина (30) по q_j и Q_j^*; 3° нађене функције q_j ставити у (13), чиме ће се и координате x_i, y_i, z_i добити као функције времена; 4° из $m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}'_i + \mathfrak{F}_i^*$ одредити силе веза $\mathfrak{F}_i^*$. Сви су ови послови врло прости и елементарни, осим 2°, тј. решавања система диференцијалних једначина (30).

У специјалном случају који смо третирали у I прва група једначина из (30) постаје $3n$ скаларних једначина изведених из n векторских једначина $m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}'_i + \mathfrak{F}_i^*$, а друга група је ν веза $g_k = 0$.

III

Ради лакшег писања ставићемо:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = a_{j\iota}, \tag{31}$$

$$Q_j + Q'_j - \sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{s=1}^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_r \dot{q}_s = b_j, \tag{32}$$

Једначине (30) могу се тада писати

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \ddot{q}_\iota = b_j + Q_j^*.$$

Може се лако показати да величине $a_{j\iota}$ долазе при израчунавању кинетичке енергије:

$$2\,T = \sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\, \dot{q}_j \dot{q}_\iota,$$

и да је

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r\, \partial q_s} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jr}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{js}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_j}\right) = \begin{bmatrix} s & r \\ & j \end{bmatrix}$$

(Христофелов симбол са три индекса).

Диференцирањем једначине (15) по t добивамо:

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota + \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \dot{\gamma}_k}{\partial q_\iota} \dot{q}_\iota = 0.$$

Ставимо ли

$$-\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \dot{\gamma}_k}{\partial q_\iota} \dot{q}_\iota = c_k, \tag{33}$$

имаћемо

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota = c_k. \tag{33bis}$$

На тај начин, дошли смо до система од $\alpha+\beta$ једначина

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\ddot{q}_\iota = b_j + Q_j^*, \quad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\ddot{q}_\iota = c_k, \tag{34}$$

из којих треба одредити 2α величина $\ddot{q}_\iota$ и Q_j^* као функције генералисаних координата и генералисаних брзина. Имамо, дакле, за $\alpha-\beta$ више непознатих него једначина. При том су $a_{j\iota}$, b_j и c_k, према (31), (32) и (33), познате функције генералисаних координата и генералисаних брзина. Из тих једначина (34) могу се $\ddot{q}_\iota$ и Q_j^* на бесконачно много начина одредити као функције генералисаних координата и генералисаних брзина, јер је $2\alpha > \alpha+\beta$.

Како је, наиме, по претпоставци (16^{bis})

$$\frac{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\beta)}{\partial(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\beta)} \neq 0,$$

то се из друге групе једначина могу $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_\beta$ израчунати као линеарне функције од $\ddot{q}_{\beta+1}, \ldots, \ddot{q}_\alpha$. Ставимо ли то у прву групу једначина (34), добићемо и Q_j^* као линеарне функције од $\ddot{q}_{\beta+1}, \ldots, \ddot{q}_\alpha$, а ових $\alpha-\beta$ величина остају произвољне. Према томе, систем (34) сигурно има решења по $\ddot{q}_\iota$ и Q_j^*, и то бесконачно много. Нека буде $q_1'', q_2'', \ldots, q_\alpha'', Q_1'', Q_2'', \ldots, Q''_\alpha$ један спрег таквих решења:

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} q_\iota'' = b_j + Q_j'', \quad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} q_\iota'' = c_k. \tag{35}$$

Ставићемо

$$\ddot{q}_\iota = q_\iota'' + \mu_\iota, \quad Q_j^* = Q_j'' + \overline{Q}. \tag{36}$$

Тада из (34), с обзиром на (35), излази:

$$\overline{Q}_j = \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\mu_\iota, \quad (j = 1, 2, \ldots, \alpha) \tag{37}$$

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota}\mu_\iota = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta). \tag{38}$$

Из једначина (38) могу се $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\beta$ одредити помоћу $\mu_{\beta+1}, \mu_{\beta+2}, \ldots, \mu_\alpha$, а ове величине остају слободне; једначине (37) дају онда $\overline{Q}_j$.

На тај начин, једначине (30) постале су

$$J_j + Q_j + Q'_j + Q_j'' + \overline{Q}_j = 0, \quad \gamma_k = 0, \quad (j = 1, \ldots, \alpha; \ k = 1, \ldots, \beta). \tag{39}$$

При том, Q_j'' су одређена решења система (34), а $\overline{Q}_j$ су дати са (37) и (38). $\overline{Q}_j$ зависе од $\alpha - \beta$ неодређених величина. Што се тиче величина Q_j'', оне још нису прецизиране: то су нека одређена решења једначина (34), но није речено која. Треба се, дакле, определити за нека одређена решења између свих могућих решења тих једначина. Дошли смо, тако, до сличног резултата као у I. Уосталом, једначине (37), (38) и (39) могу се у том специјалном случају свести на једначине (11) и (11^{bis}).

Ако одаберемо генералисане силе Q_j'' и ако међу величинама μ_ι изаберемо, на пример, $\mu_{\beta+1}, \mu_{\beta+2}, \ldots, \mu_\alpha$ по вољи, онда нам једначине (39) решавају проблем кретања: из њих се могу генералисане координате $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$ одредити као функције времена, па онда из (13) координате x_i, y_i, z_i као функције времена, тј. и вектори положаја биће одређени као функције времена. Кад је то постигнуто, биће одређене и силе веза $\mathfrak{F}_i^*$:

$$\mathfrak{F}_i^* = m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_i'. \tag{39^{bis}}$$

Испитиваћемо ове силе веза̂.

На основи (19) имамо:

$$\mathfrak{F}_i^* = m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \ddot{q}_\iota + m_i \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s - \mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_i'. \tag{40}$$

Како је, према (36), $\ddot{q}_\iota = q_\iota'' + \mu_\iota$, то можемо писати

$$\mathfrak{F}_i^* = \mathfrak{F}_i'' + \overline{\mathfrak{F}}_i, \tag{41}$$

где је

$$\mathfrak{F}_i'' = m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} q_\iota'' + m_i \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{s=1}^{\alpha} \frac{\partial^2 \mathfrak{r}_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s - \mathfrak{F}_i - \mathfrak{F}_i', \tag{42}$$

$$\overline{\mathfrak{F}}_i = m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \mu_\iota. \tag{43}$$

Кад су једном Q_ι'' и q_ι'' одабрани, компонента $\mathfrak{F}_i''$ је потпуно одређена. Компонента $\overline{\mathfrak{F}}_i$ зависи од величина μ_i.

Генералисане силе које произилазе из сила $\bar{\mathfrak{F}}_i$ јесу

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\mathfrak{F}}_i \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \mu_\iota \right) \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j}$$

$$= \sum_{\iota=1}^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial q_\iota} \right) \mu_\iota = \sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \mu_\iota = \bar{Q}_j$$

Како из $\mathfrak{F}_i^*$ произилази генералисана сила Q_j^*, то из силе $\mathfrak{F}_i'$ произилази генералисана сила Q_j''. Компоненте $\bar{\mathfrak{F}}_i$ и генералисане силе $\bar{Q}_j$ зависе само од веза̂, а компоненте $\mathfrak{F}_i''$ и генералисане силе Q_j'' и од веза и од датих спољашњих и унутрашњих сила.

Услов (38) биће задовољен ако су сви $\mu_\iota = 0$. Онда ће бити, према (37), сви $\bar{Q}_j = 0$, а према (43) и све компоненте $\bar{\mathfrak{F}}_i = 0$. Ако је могуће изабрати Q_j'' тако да и ови сви буду нуле без обзира на то какви су почетни услови, то ће значити да су већ саме спољашње и унутрашње силе $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$ такве да су дате везе у сваком случају одржане. Према (35) за то је потребно и довољно да систем од $\alpha+\beta$ једначина

$$\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota} \ddot{q}_\iota = b_j, \quad \sum_{\iota=1}^{\alpha} \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota} \ddot{q}_\iota = c_k$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \alpha; \quad k = 1, 2, \ldots, \beta),$$

има одређена решења по α величина $\ddot{q}_\iota$, а за то је потребно и довољно да матрице

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha 1} & \ldots & a_{\alpha\alpha} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{matrix} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1\alpha} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha 1} & \ldots & a_{\alpha\alpha} & b_\alpha \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \dot{q}_\alpha} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_1} & \ldots & \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} & c_\alpha \end{matrix} \right.$$

имају обе ранг α. То уопште неће бити случај, те се зато неће моћи, осим по изузетку, узети $Q_j'' = 0$ за свако j. Другим речима, $\bar{Q}_j$ можемо узети једнако нули за свако j, а Q_j'' не. Према томе, све компоненте $\bar{\mathfrak{F}}_i$ сила веза можемо узети за нуле, но компоненте $\mathfrak{F}_i$ не. Ако и њих можемо узети за нуле, то значи, да већ

Он, дакле, уопште није нула. Биће сигурно нула ако је систем веза склероном.

Код идеално успостављених веза једначине (53) гласе:

$$J_j + Q_j + Q_j' + \sum_{k=1}^{\beta} \lambda_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad \gamma_k = 0, \tag{65}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \alpha; \; k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Како је за виртуелна померања $\sum_{j=1}^{\alpha} Q_j'' \delta q_j = 0$, то ће код идеално успостављених веза бити

$$\sum_{j=1}^{\alpha} (J_j + Q_j + Q_j') \, \delta q_j = 0 \tag{66}$$

за сва виртуелна померања. Обрнуто, ако једначина (66) важи за све δq_j који задовољавају једначину (63^{bis}), онда из ње излазе, као последице, једначине (65) за кретања са идеално успостављеним везама. Наиме, из (66) и (63^{bis}) може се, апсолутно истим начином као у IV за Q_j'', извести да мора бити

$$J_j + Q_j + Q_j' = \sum_{\iota=1}^{\alpha} \lambda_k' \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\iota};$$

ставимо ли $\lambda_k' = -\lambda_k$, добићемо једначине (65).

С обзиром на значење скалара J_j, Q_j, Q_j' и δq_j, једначине (66) могу се писати у облику

$$\sum_{i=1}^{m} (-m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i + \mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}_i') \, . \, \delta \mathfrak{r}_i = 0 . \tag{67}$$

Ова једначина, дакле, уз дате везе потпуно одређује кретање при идеално успостављеним везама; то је т.зв. основна једначина Динамике система материјалних тачака са идеално успостављеним везама. За $\ddot{\mathfrak{r}}_i = 0$ за свако i добива се из (67) основна једначина Статике система материјалних тачака са идеално успостављеним везама.

Из (38), (43) и (58) излази да је

$$\overline{\mathfrak{F}}_i = c\, m_i \mathfrak{B}_i = c\, m_i \frac{\delta \mathfrak{r}_i}{dt}, \tag{68}$$

где је фактор c исти за свако i. Према томе, ако везе нису идеално успостављене, место једначине (67) имаћемо једначину

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i+\mathfrak{F}_i+\mathfrak{F}_i'+c\,m_i\frac{\delta\,\mathfrak{r}_i}{dt}\right).\,\delta\,\mathfrak{r}_i=0,$$

Ако са E означимо кинетичку енергију при виртуелном кретању, биће

$$2E=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathfrak{V}_i\cdot\mathfrak{V}_i=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\delta\,\mathfrak{r}_i}{dt}\cdot\frac{\delta\,\mathfrak{r}_i}{dt}=\frac{1}{dt^2}\sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{\iota=1}^{\alpha} a_{j\iota}\,\delta\,q_j\,\delta\,q_\iota,$$

па ћемо последњу једначину моћи писати у облику

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i+\mathfrak{F}_i+\mathfrak{F}_i').\,\delta\,\mathfrak{r}_i+2\,c\,E\,dt=0. \tag{69}$$

За $c=0$ добива се одавде једначина (67).

VIII

Сва кретања материјалних тачака (x_i, y_i, z_i) под дејством познатих спољашњих и унутрашњих сила $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_i'$, а компатибилна с везама (13) и (15), дата су једначинама (30), односно (39). Које од свих тих кретања да се истакне, да се сматра за идеално?

Гаус захтева да то буде оно код којег енергија убрзања сила веза има минимум, тј. код којег је укупна енергија убрзања изгубљених сила минимална. Овај захтев спада у т.зв. принципе минимума, принципе економије, и томе сличне телеолошке принципе.

Принцип виртуелних померања захтева да то буде оно кретање код којег је укупан елементаран виртуелни рад сила веза нула. Међутим, виртуелна кретања била су дефинисана само за холономне везе и за оне нехоломне које су линеарне по брзинама, а за остале нехолономне не; према томе, тај принцип је дефектан. У VI смо дефинисали виртуелна кретања за сваки облик веза, те тиме уклонили дефектност принципа, но увек остаје отворено питање зашто баш тај принцип да се узме: виртуелна кретања су она којима се материјалне тачке не само не крећу, него уопште и не могу да се крећу (осим код склерономних система).

Ми смо у IV захтевали да кретање са идеално успостављеним везама буде оно за које је увек $J''=0$. Математички, тај захтев нам изгледа више логичан и образложен него прва два:

наишли смо на једну инваријанту силе, па захтевамо да та инваријанта буде нула. И са гледишта Механике био би тај захтев потпуно образложен и врло плаузибилан кад би та инваријанта нешто механички значила. Она и значи, но опет се своди на виртуелан рад. Тиме је, истина, проширен појам виртуелног рада на све везе, но принципска тешкоћа није уклоњена. Као год што нам Ґаусов захтев изгледа метафизички, а принцип виртуелног рада необразложен, тако нам захтев који смо поставили у IV изгледа натегнут. Зато ћемо покушати да подухватимо проблем и с друге стране.

Да би после било опште излагање јасније, изложићемо идеју прво на неколико простих примера.

Узећемо, прво, кретање по косој равни под утицајем силе теже. Ако поред силе теже додамо још ма какве силе које се налазе у косој равни, оне неће утицати да материјална тачка изађе из косе равни, него могу утицати само на кретање у тој равни. Сила теже је та која вуче тачку из косе равни, и ту силу треба парирати. Међутим, и сила теже има компоненту у косој равни, па ова не вуче тачку из равни. Из равни тачку вуче само компонента ортогонална на косу раван и само ову компоненту треба силом везе парирати. Другим речима, дата је сила у простору од три димензије, а кретање треба да се врши у две димензије. Свако додавање сила које се налазе у те две димензије могуће је, али није потребно. Оно што је неопходно додати то је нека сила везе која нема ортогоналну компоненту у косој равни. Учинивши то, из Механике у тродимензионалном простору прелазимо у Механику у једној одређеној равни, у којој можемо додавати силе како хоћемо.

Узмимо, друго, кретање по непокретној површини $f(x, y, z) = 0$. Дате силе вуку тачку са те површине. У неком одређеном тренутку све силе које леже у тангенцијалној равни положеној кроз материјалну тачку на површину не вуку тачку са површине; могу вући оне које не леже у тој равни. Да би веза била одржана, неопходно је додати неку силу везе која нема ортогоналну компоненту у тој тангенцијалној равни, тј. која је ортогонална на њу. Учинивши то, из Механике у тродимензионалном простору прелазимо у Механику на површини, тј. на једном дводимензионалном варијетету, у којем можемо додавати силе какве хоћемо, остајући са њима у тангенцијалној равни.

Узмимо, напослетку, кретање из примера 6^0 у V: $\dot{x}^2+\dot{y}^2=a^2$. Ако сила везе (X'', Y'') уз дату силу (X, Y) већ одржава ову везу, па додамо силу $(\overline{X}, \overline{Y})$, мора бити задовољена једначина

I 1

$\dot{x}\,\overline{X}+\dot{y}\,\overline{Y}=0$, тј. додата сила мора бити управна на брзину. Према томе, овде силе управне на брзину не кваре везу. Да би, дакле, веза била одржана, неопходно је парирати кварење везе од стране дате силе (X, Y) силом везе у правцу брзине. То се, истина, може постићи и другом неком силом, но ова се онда може разложити у две компоненте: једна у правцу брзине, друга управно на њу; прва је потребна, друга спада у оне силе које су у складу са везама и које се могу додавати како год хоћемо.

После ових примера прећи ћемо на опште разматрање.

У једначинама (37) и (38) узећемо $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha$ као координате вектора $\vec{\mu}$ у простору од α димензија. Исто тако ћемо $\frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_2}, \ldots, \frac{\partial \gamma_k}{\partial \dot{q}_\alpha}$ узети као координате вектора у истом простору; тај вектор се може означити са $\nabla' g_k$, где је ∇' Хамилтонов оператор у простору од α димензија по величинама $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$. Слично ће бити:

$\mathfrak{q}$	вектор са	координатама		$q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$;
$\ddot{\mathfrak{q}}$	»	»	»	$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_\alpha$;
$\mathfrak{Q}$	»	»	»	$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\alpha$;
$\mathfrak{Q}'$	»	»	»	$Q_1', Q_2', \ldots, Q_\alpha'$;
$\mathfrak{Q}''$	»	»	»	$Q_1'', Q_2'', \ldots, Q_\alpha''$;
$\mathfrak{Q}^*$	»	»	»	$Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_\alpha^*$;
$\mathfrak{a}$	»	»	»	$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$;

где је

$$a_j=\sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{s=1}^{\alpha}\begin{bmatrix} s & r \\ & j \end{bmatrix}\dot{q}_r\,\dot{q}_s.$$

Осим тога, са $\mathcal{A}$ означићемо тензор

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}\ldots a_{1\alpha} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\alpha 1}\ldots a_{\alpha\alpha}. \end{matrix}\right.$$

Тада се опште једначине кретања (37), (38) и (39) могу писати овако:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}\ddot{\mathfrak{q}}+\mathfrak{a}&=\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'+\mathfrak{Q}''+\mathcal{A}\vec{\mu} \\ \gamma_k=0,\quad &\vec{\mu}\cdot\nabla'\gamma_k=0, \\ (k=1,&\,2,\ldots,\beta). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Вектор $\bar{\mathfrak{Q}} = A \vec{\mu}$ не дира у везе. Према томе, кварење веза од стране вектора $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$ треба парирати вектором $\mathfrak{Q}''$. То ће се моћи учинити ако је вектор $\mathfrak{Q}''$ управан на сваки вектор $\vec{\mu}$ који задовољава трећу једначину у (70), тј. ако је $\mathfrak{Q}'' \cdot \vec{\mu} = 0$ за свако $\vec{\mu}$. Ово се, истина, може постићи и другим неким вектором $\mathfrak{Q}''$, но он ће имати компоненту која није потребна, него спада у оне векторе који су у складу са везама и који се могу додавати како год хоћемо. Услов $\mathfrak{Q}'' \cdot \vec{\mu} = 0$ у скаларном облику гласи $\sum_{\iota=1}^{\alpha} Q_\iota'' \mu_\iota = 0$, па смо дошли до резултата као и у IV, тј.

$$\mathfrak{Q}'' = \sum_{k=1}^{\beta} \lambda_k \nabla' \gamma_k. \tag{71}$$

Што смо употребили векторе у простору од α димензија, било је само ради лакшег изражавања. До истог резултата може се доћи и помоћу скалара и скаларних једначина.

Кад укупан елементаран виртуелни рад сила веза није нула, обично се каже да постоји трење. Према изложеном, то није сасвим тачно. Ако тај рад није нула, то значи да поред сила веза $\mathfrak{F}_i''$ постоје још и силе $\bar{\mathfrak{F}}_i$ које не морају бити баш трење.

IX

Једначине (53), тј. у векторском облику једначине (70) и (71), извео сам у чланку Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels aux liaisons données (*Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des sciences*, T. II, 1948; p. 116—130). То њихово извођење може се сад кратко овако репродуковати.

Полазне једначине (34) могу се помоћу вектора $\mathfrak{q}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}^*$ и $\mathfrak{a}$ и тензора A писати у облику

$$\begin{aligned} A\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{a} &= \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}^*, \\ \ddot{\mathfrak{q}} \cdot \nabla' \gamma_k &= c_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, \beta). \end{aligned} \tag{72}$$

Узмимо да је квадратна форма $2T$ дефинитна, тј. да детерминанта начињена од њених коефицијената није идентички једнака нули.

Ако са $\mathcal{A}^{-1}$ означићемо реципрочни тензор тензора $\mathcal{A}$, добићемо из (72)

$$\ddot{q} = \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a})+\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*.$$

Према томе је

$$\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}^* \cdot \nabla'\gamma_k = c_k - \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a}) . \nabla'\gamma_k, \quad (k=1,2,\ldots,\beta) \tag{73}$$

тј.:

(А) Ортогоналне алгебарске пројекције вектора $\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}^*$ на векторе $\nabla'\gamma_k$ потпуно су одређене функције од $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\alpha$.

У (73) имамо β скаларних једначина по $\alpha > \beta$ непознатих координата вектора $\mathfrak{Q}^*$. Нека буде $\mathfrak{Q}_*$ једно решење једначина (73):

$$\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{Q}_* \cdot \nabla'\gamma_k = c_k - \mathcal{A}^{-1}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'-\mathfrak{a}) . \nabla'\gamma_k .$$

Ставимо ли $\mathfrak{Q}^* - \mathfrak{Q}_* = \mathfrak{A}$, имаћемо онда за $\mathfrak{A}$ једначине

$$\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{A} . \nabla'\gamma_k = 0.$$

Означимо ли вектор $\mathcal{A}^{-1}\mathfrak{A}$ са $\vec{\mu}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\alpha$, можемо рећи:

(B) Ако вектор $\mathfrak{Q}_*$ успоставља везе, сваки други вектор $\mathfrak{Q}^*$ који успоставља везе јесте $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}_* + \mathcal{A}\vec{\mu}$ где је $\vec{\mu}$ вектор који задовољава једначине

$$\vec{\mu} \cdot \nabla'\gamma_k = 0, \quad (k=1,2,\ldots,\beta). \tag{74}$$

На основи тога:

(C) Ма како узели вектор $\vec{\mu}$ који задовољава једначине (74), вектор $\mathcal{A}\vec{\mu}$ не дира у везе, него је с њима у сагласности; овакве векторе $\mathcal{A}\vec{\mu}$ можемо по вољи додавати, – везе, једном успостављене, биће и надаље очуване, само ће кретање бити друго.

Пошто смо тако увели вектор $\vec{\mu}$, лако је доказати:

(D) Међу векторима $\mathfrak{Q}^*$ којима су успостављене везе, налази се један и само један вектор $\mathfrak{Q}''$ који је управан на све векторе $\vec{\mu}$ који задовољавају једначине (74), $\vec{\mu} \cdot \mathfrak{Q}'' = 0$. Како, наиме, вектор $\mathfrak{Q}''$ треба да буде управан на све векторе $\vec{\mu}$, а ови су управни на све векторе $\nabla'\gamma_k$, мора бити

$$\mathfrak{Q}'' = \lambda_1 \nabla'\gamma_1 + \lambda_2 \nabla'\gamma_2 + \ldots + \lambda_\beta \nabla'\gamma_\beta,$$

где су λ_r скалари. Ставимо ли ово у (73), добићемо β једначина

$$\sum_{r=1}^{\beta} \lambda_r \mathcal{A}^{-1} \nabla' \gamma_r \cdot \nabla' \gamma_k = c_k - \mathcal{A}^{-1} (\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' - \mathfrak{a})$$

из којих ће се одредити β скалара λ_r као функције од $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, q_\alpha$.

На основи тога:

(E) Вектор $\mathfrak{Q}''$ је потпуно одређен везама и спољашњим и унутрашњим силама.

Из (B) излази:

(F) Сваки вектор $\mathfrak{Q}^*$ који успоставља везе има облик $\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Q}'' + \mathcal{A}\vec{\mu}$, где је $\mathfrak{Q}''$ вектор наведен у (B), а $\vec{\mu}$ вектор који задовољава једначине (74).

На основи тога, једначине (72) и (74) могу се писати овако:

$$\mathcal{A}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{a} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' + \sum_{r=1}^{\beta} \lambda_r \nabla' \gamma_r + \mathcal{A}\vec{\mu},$$

$$\ddot{\mathfrak{q}} \cdot \nabla' \gamma_k = c_k, \quad \vec{\mu} \cdot \nabla' \gamma_k = 0;$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Место друге групе једначина можемо писати једначине $\gamma_k = 0$ од којих смо их добили диференцирањем. Тако ћемо доћи до векторских једначина (70) и (71), тј. до скаларних једначина (53)

X

Узмимо, на пример, да систем од n материјалних тачака приликом кретања има особине чврстог тела, тј. да отстојање сваког пара материјалних тачака остане приликом кретања константно. Тада ће бити за тачке P_1, P_2, P_3;

$$f_1 \equiv \mathfrak{r}_{32} . \mathfrak{r}_{32} = C_1, \quad f_2 \equiv \mathfrak{r}_{13} . \mathfrak{r}_{13} = C_2, \quad f_3 \equiv \mathfrak{r}_{21} . \mathfrak{r}_{21} = C_3;$$

са $\mathfrak{r}_i$ означили смо вектор положаја тачке P_i, а са $\mathfrak{r}_{ij}$ разлику $\mathfrak{r}_j - \mathfrak{r}_i$. Да би и сва друга отстојања била константна, потребно је и довољно да буду константе отстојања $P_1 P_k, P_2 P_k, P_3 P_k$ за $k = 4, 5, \ldots, n$. То даје још $3(n-3)$ веза

$$f_k^{(1)} \equiv \mathfrak{r}_{1k} . \mathfrak{r}_{1k} = C_k^{(1)}, \quad f_k^{(2)} \equiv \mathfrak{r}_{2k} . \mathfrak{r}_{2k} = C_k^{(2)}, \quad f_k^{(3)} \equiv \mathfrak{r}_{3k} . \mathfrak{r}_{3k} = C_k^{(3)}.$$

Укупно, дакле, имамо

$$3 + 3(n-3) = 3n - 6$$

независних веза.

Диференцирањем одавде добивамо:

$$g_1 \equiv \mathfrak{r}_{32} . (\dot{\mathfrak{r}}_2 - \dot{\mathfrak{r}}_3) = 0, \quad g_2 \equiv \mathfrak{r}_{13} . (\dot{\mathfrak{r}}_3 - \dot{\mathfrak{r}}_1) = 0, \quad g_3 \equiv \mathfrak{r}_{21} . (\dot{\mathfrak{r}}_1 - \dot{\mathfrak{r}}_2) = 0 ;$$

$$g_k^{(1)} \equiv \mathfrak{r}_{1k} . (\dot{\mathfrak{r}}_k - \dot{\mathfrak{r}}_1) = 0, \quad g_k^{(2)} \equiv \mathfrak{r}_{2k} . (\dot{\mathfrak{r}}_k - \dot{\mathfrak{r}}_2) = 0, \quad g_k^{(3)} = \mathfrak{r}_{3k} . (\dot{\mathfrak{r}}_k - \dot{\mathfrak{r}}_3) = 0.$$

Идеалне силе веза биће, дакле,

$$\mathfrak{F}_i'' = \lambda_1 \nabla_i' g_1 + \lambda_2 \nabla'_i g_2 + \lambda_3 \nabla'_i g_3$$

$$+ \sum_{k=4}^{n} (\lambda_k^{(1)} \nabla_i' g_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} \nabla_i' g_k^{(2)} + \lambda_k^{(3)} \nabla_i' g_k^{(3)}).$$

Ако је $i \geqslant 4$, онда g_1, g_2, g_3 не садрже $\dot{x}_i, \dot{y}_i \dot{z}_i$, а $g_k^{(1)}, g_k^{(2)}, g_k^{(3)}$ садрже само ако је $k = i$; према томе је

$$\mathfrak{F}_i'' = \lambda_i^{(1)} \nabla_i' g_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)} \nabla_i' g^{(2)} + \lambda_i^{(3)} \nabla_i' g_i^{(3)} \quad \text{за } i \geqslant 4.$$

Међутим је

$$\nabla_i' g_i^{(1)} = \mathfrak{r}_{1i}, \quad \nabla_i' g_i^{(2)} = \mathfrak{r}_{2i}, \quad \nabla_i' g_i^{(3)} = \mathfrak{r}_{3i},$$

па је коначно

$$\mathfrak{F}_i'' = \lambda_i^{(1)} \mathfrak{r}_{1i} + \lambda_i^{(2)} \mathfrak{r}_{2i} + \lambda_i^{(3)} \mathfrak{r}_{3i} \quad \text{за } i \geqslant 4.$$

Ако је $i = 1$, онда g_1, $g_k^{(2)}$, $g_k^{(3)}$ не садрже $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$; према томе је

$$\mathfrak{F}_1'' = \lambda_2 \nabla_1' g_2 + \lambda_3 \nabla_1' g_3 + \sum_{k=4}^{n} \lambda_k^{(1)} \nabla_1' g_k^{(1)},$$

тј.

$$\mathfrak{F}_1'' = -\lambda_2 \mathfrak{r}_{13} + \lambda_3 \mathfrak{r}_{21} - \sum_{k=4}^{n} \lambda_k^{(1)} \mathfrak{r}_{1k}.$$

Слично је

$$\mathfrak{F}_2'' = -\lambda_3 \mathfrak{r}_{21} + \lambda_1 \mathfrak{r}_{32} - \sum_{k=4}^{n} \lambda_k^{(2)} \mathfrak{r}_{2k},$$

$$\mathfrak{F}_3'' = -\lambda_1 \mathfrak{r}_{32} + \lambda_2 \mathfrak{r}_{13} - \sum_{k=4}^{n} \lambda_k^{(3)} \mathfrak{r}_{3k}.$$

На основи тога имамо:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i'' = \mathfrak{F}_1'' + \mathfrak{F}_2'' + \mathfrak{F}_3'' + \sum_{i=4}^{n} \mathfrak{F}_i''$$

$$= - \sum_{k=4}^{n} (\lambda_k^{(1)} \mathfrak{r}_{1k} + \lambda_k^{(2)} \mathfrak{r}_{2k} + \lambda_k^{(2)} \mathfrak{r}_{3k}) +$$

$$+ \quad \sum_{i=4}^{n} \lambda_i^{(1)} \mathfrak{r}_{1i} + \lambda_i^{(2)} \mathfrak{r}_{2i} + \lambda_i^{(3)} \mathfrak{r}_{3i}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{F}_i'' = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{F}_1'' + \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{F}_2'' + \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{F}_3'' + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{F}_i''$$

$$= \lambda_1(\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{32} - \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{32}) + \lambda_2(\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{13} - \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{13}) + \lambda_3(\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{21} - \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{21})$$

$$- \sum_{k=4}^{n} (\lambda_k^{(1)} \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{1k} + \lambda_k^{(2)} \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{2k} + \lambda_k^{(3)} \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{3k})$$

$$+ \sum_{i=4}^{n} (\lambda_i^{(1)} \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_{1i} + \lambda_i^{(2)} \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_{2i} + \lambda_i^{(3)} \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_{3i}) = 0.$$

И тако, код чврстог система материјалних тачака идеалне силе веза имају карактеристичне особине унутрашњих сила. Због тога, оне не утичу ни на налет (количина кретања) ни на замах (момент количине кретања) таквог система.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

Par R. Kašanin

L'auteur soummet à l'analyse mathématique le mouvement d'un système de points matériels aux liaisons quelconques (holonomes ou non - holonomes, linéaires ou non - linéaires). Par cette voie, il parvient aux équations générales (53) (sous forme vectorielle (70) et (71)). En les discutant, on est conduit tout naturellement à la notion des forces idéales. Partant de cette notion, l'auteur interprète les principes des déplacements virtuels et de Gauss.

Les résultats essentiels de cet article ont parus dans les Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des sciences, T. II (1948) p. 116—129.