СУКЦЕСИВНА АПРОКСИМАЦИЈА И НУЛЕ ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА*

ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ (Београд)

1. 1° Данас ћу говорити о егзистенцији интеграла нелинеарних диференцијалних једначина другог реда који пролазе кроз две унапред дате тачке x, y равни. При томе ћу се ограничити на оне ставове који се добивају на основу т. зв. методе сукцесивне апроксимације. Као непосредну последицу ових ставова добићу ставове о најмањој удаљености двају узастопних нула нетривијалних интеграла нелинеарне диференцијалне једначине другог реда.

2° Да вам техничке потешкоће не би сметале у уочавању онога што је битно у проблему егзистенције интеграла, ја ћу се ограничити на диференцијалне једначине облика

$$y'' = f(x,y),$$

мада одговарајући ставови важе и за оне диференцијалне једначине у којима се са десне стране појављује $f(x, y, y')$.

Из истог разлога претпоставићу да су $(a, 0)$ и $(b, 0)$ тачке кроз које треба да пролази интеграл посматране диференцијалне једначине, тако да се гранични услови појављују у облику

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Једноставним линеарним сменама може се прећи на општији случај када су задане тачке (a, A) и (b, B).

3° Основни став о егзистенцији интеграла који пролази кроз тачке $(a, 0)$ и $(b, 0)$ је познати Picard-ов став[1]):

*) Предавање одржано на курсу „О неким проблемима у вези са диференцијалним једначинама математичке физике" у Математичком Институту Српске Академије Наука.

[1]) E. Picard, *Leçons sur quelques problémes aux limites de la théorie dse équations différentielles*, *Paris (1930).*

За све x, y области

$$D_P\colon\ a \leqslant x \leqslant b;\ |y| \leqslant K,$$

нека је:

$$f(x, y)\ \textit{непрекидно}$$

$$|f(x, y)| \leqslant M$$

и

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \underline{y})| \leqslant \alpha\,|\overline{y} - v|,$$

Ако бројеви K, M и α задовољавају услове:

I) $$\alpha\,(a-b)^2 < 8$$

и

II) $$M\,(a-b)^2 < 8K,$$

тада диференцијални задатак

$$y'' = f(x, y)\ ;\ y(a) = y(b) = 0$$

има једно једино решење које припада области D_P. Ово решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.

4° Уочимо сада оне функције $f(x, y)$ које задовољавају услов

$$f(x, 0) \equiv 0.$$

Даље претпоставимо да $f(x, y)$ задовољава све услове Picard-ова става сем евентуално услова I) и да су $x = a$ и $x = b$ нуле неког нетривијалног интеграла посматране диференцијалне једначине. Ако је поред тога задовољен још и услов I), тада је овај интеграл једини интеграл који пролази кроз тачке $(a, 0)$ и $(b, 0)$, као што то следи из Picard-ова става. То је међутим противречно с чињеницом да је, с обзиром на $f(x, 0) \equiv 0$, функција $y \equiv 0$ такође решење граничног задатка. Стога мора да је

$$b - a \geqslant \sqrt{\frac{8}{\alpha}}.$$

Ако функција $f(x, y)$ у области у којој је дефинисана има непрекидан парцијалан извод по y, онда је

$$\alpha = \operatorname{Max}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|,$$

јер је

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \underline{y})| = \left|\int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant \operatorname{Max}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\overline{y} - \underline{y}|.$$

У случају линеарне диференцијалне једначине

$$y'' = -\varphi(x)\,y$$

према томе је

$$\alpha = \underset{a \leqslant x \leqslant b}{\mathrm{Max}}\,|\varphi(x)|.$$

Како је

$$M = \mathrm{Max}\,|\varphi(x)|\,\mathrm{Max}\,|y|,$$

то из услова $|y| \leqslant K$ следи

$$M = \alpha K,$$

па услов II) добива облик: $\alpha\,(b-a)^2 < 8$. То значи: ако је линеарна диференцијална једначина таква да је задовољен услов II), онда је задовољен и услов I). Стога се не може закључити да је размак између нула неког нетривијалног интеграла линеарне диференцијалне једначине већи, односно једнак, $\sqrt{\frac{8}{\alpha}}$. Међутим, као што сте у прошлом предавању видели, Sturm-ова теорема казује, између осталога, да за линеарне диференцијалне једначине важи

$$b - a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}.\ [2]$$

Према томе, постављају се ова два питања:

1. Може ли се у неједначини I) константа 8 повећати, односно колика је највећа константа која може да стоји на десној страни неједначине I)?

С обзиром на линеарне једначине очигледно је да ова константа не може бити већа од π^2.

2. Могу ли се остале претпоставке Picard-ова става толико проширити да се став са успехом може применити на линеарне једначине? Специјално, може ли се област D_P смањити, односно, колика је најмања област којом се област D_P може заменити?

Показаћу да се у неједначини I) број 8 може заменити бројем π^2.

---

[2]) Ова неједначина чини само једну половину Sturm-ове теореме; друга половина гласи: ако је $\beta = \mathrm{Min}\,|\varphi(x)|$ тада је

$$b - a \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

У вези с овим види: E. Kamke, *Differentialgleichungen (Lösungsmethoden)*, *Leipzig* (1942), pp. 125-128.

Међутим, не знам како гласи одговор на друго питање. Показаћу једино да се област D_P може смањити, али и овако смањена област је још увек сувише велика да би се из тако пооштреног става могла извести Sturm-ова неједначина за линеарне диференцијалне једначине.

Изгледа ми да ће се овај циљ пре постићи мењањем природе претпоставки о функцији $f(x,y)$, него даљим смањењем области D_P.

5⁰ Став који ћу овде доказати гласи:

Став А. *За све* x, y *области*

$$D(a,b,M): \ a \leqslant x \leqslant b; \quad |y| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

нека је

$$f(x,y) \ \textit{непрекидно},$$

$$|f(x,y)| \leqslant M$$

и

$$|f(x,\overline{y}) - f(x,\underline{y})| \leqslant \alpha |\overline{y} - \underline{y}|.$$

Ако је

$$\alpha(b-a)^2 < \pi^2,$$

онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x,y); \quad y(a) = y(b) = 0$$

има једно једино решење које припада области $D(a,b,M)$. *Ово решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.*

Да су претпоставке овога става испуњене кад год су испуњене претпоставке Picard-ова става, види се сасвим лако ако уочимо да из II), тј, из $M(b-a)^2 < 8K$ следи

$$|y| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2 < K$$

што показује да област $D(a,b,M)$ припада области D_P.

6⁰ На исти начин као што смо у 4⁰ на основу Picard-ова става закључили да је размак између нула неког нетривијалног интеграла увек $\geqslant \sqrt{\frac{8}{\alpha}}$ кад год функција $f(x,y)$ поред осталог задовољава и услов $f(x,0) \equiv 0$, тако сада на основу става А добивамо овај став:

Став В. *За све* x, y *области* $D(a, b, M)$ *нека је*

$$f(x,y) \text{ непрекидно},$$

$$|f(x,y)| \leqslant M,$$

$$|f(x,\overline{y}) - f(x,\underline{y})| \leqslant \alpha\,|\overline{y} - \underline{y}|$$

и

$$f(x,0) \equiv 0.$$

Ако су $x = a$ *и* $x = b$ *узастопне нуле неког нетривијалног интеграла диференцијалне једначине*

$$y'' = f(x,y),$$

онда је

$$b - a \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}.$$

2. 1° Да би доказ става А упростили, ставимо

$$x = a + (b-a)\,t \quad \text{и} \quad y(x) = (b-a)^2 M\,z(t).$$

Тада се диференцијална једначина $y'' = f(x,y)$ своди на диференцијалну једначину

$$z'' = \frac{1}{M} f(a + (b-a)\,t, (b-a)^2 M z) = \wedge(t, z),$$

а гранични услови $y(a) = y(b) = 0$ на услове $z(0) = z(1) = 0$. При овој смени област $D(a, b, M)$ се пресликава на t, z област $0 \leqslant t \leqslant 1$; $|z| \leqslant \frac{1}{2} t(1-t)$, док се услов $|f(x,y)| \leqslant M$ претвара у услов $|\wedge(t,z)| \leqslant 1$. Коначно, $\alpha(b-a)^2$ је Lipschitz-ова константа диференцијалне једначине $z'' = \wedge(t,z)$.

Према томе довољно је да докажемо овај став:

Став I. *За све* x, y *области*

$$D:\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad |y| \leqslant \frac{1}{2} x(1-x)$$

нека је

$$f(x,y) \text{ непрекидно},$$

А) $$|f(x,y)| < 1$$

и

$$|f(x,\overline{y}) - f(x,\underline{y})| \leqslant \alpha\,|\overline{y} - \underline{y}|.$$

Ако је

$$\alpha < \pi^2$$

онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x,y); \quad y(0) = y(1) = 0,$$

има једно једино решење које припада области D. Ово решење може се добити методом сукцесивне апроксимације.

2° Као што је познато сукцесивне апроксимације $y_n = y_n(x)$ интеграла $y = y(x)$ диференцијалног задатка

$$y'' = f(x, y)\,; \quad y(0) = y(1) = 0\,,$$

дефинишу се помоћу рекурентног обрасца

$$y_n'' = f(x, y_{n-1})\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

уз захтев да све функције y_n задовољавају гранични услов $y_n(0) = y_n(1) = 0$. Ова дефиниција функције y_n је еквивалентна дефиницији помоћу рекурентног обрасца

$$\text{B)} \qquad y_n = (x-1)\int_0^x t f(t, y_{n-1})\, dt - x\int_x^1 (1-t) f(t, y_{n-1})\, dt.$$

Јер, овако дефинисане функције y_n очито задовољавају граничне услове, а кад овај образац два пута диференцирамо, видећемо да y_n и y_{n-1} задовољавају рекурентни образац $y''_n = f(x, y_{n-1})$.

Ако при формирању функција y_n пођемо од неке функције y_0 која припада области D, тада ће и остале функције y_n припадати области D, тј. биће

$$|y_n| \leqslant \frac{1}{2}\, x(1-x).$$

Заиста, ако претпоставимо да y_{n-1} припада области D биће

$$|y_n| \leqslant (1-x)\int_0^x t\,|f(t, y_{n-1})|\, dt + x\int_x^1 (1-t)\,|f(t, y_{n-1})|\, dt\,,$$

па је због A)

$$|y_n| \leqslant (1-x)\int_0^x t\,dt + x\int_x^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{2}\, x(1-x)\,,$$

одакле, прелазом са $n-1$ на n, следи тврђење, јер y_0 припада области D.

То значи да за сваки пар функција y_n и y_{n+1} важи неједначина

$$\text{C)} \qquad |f(x, y_{n+1}) - f(x, y_n)| \leqslant \alpha\, |y_{n+1} - y_n|\,.$$

Сада се лако може доказати ово: *Ако је за све* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *функција* $p_1(x)$ *непрекидна, а функције* $p_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *у* *истом размаку задовољавају услове*

$$p_{n+1}''(x) = -\alpha\, p_n(x)$$

и

$$p_n(0) = p_n(1) = 0\,,$$

онда из

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant p_n(x)$$

следи

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant p_{n+1}(x).$$

Да бисмо ово доказали, приметимо пре свега да је

D) $$p_{n+1}(x) = \alpha(1-x)\int_0^x t\,p_n(t)\,dt + \alpha x\int_x^1 (1-t)\,p_n(t)\,dt.$$

Ако сада од обрасца B) одузмемо аналогни образац за y_n и тако добивени израз модулирамо, добићемо

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant (1-x)\int_0^x t\,|f(t,y_n) - f(t,y_{n-1})|\,dt$$

$$+\,x\int_x^1 (1-t)\,|f(t,y_n) - f(t,y_{n-1})|\,dt,$$

одакле, с обзиром на C), следи да је

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant \alpha(1-x)\int_0^x t\,|y_n - y_{n-1}|\,dt + \alpha x\int_x^1 (1-t)\,|y_n - y_{n-1}|\,dt.$$

Како је по претпоставци $|y_n - y_{n-1}| \leqslant p_n(x)$, то је

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant \alpha(1-x)\int_0^x t\,p_n(t)\,dt + \alpha x\int_x^1 (1-t)\,p_n(t)\,dt,$$

дакле, с обзиром на D),

$$|y_{n+1} - y_n| \leqslant p_{n+1}(x).$$

Због $|y_n| \leqslant \frac{1}{2}x(1-x)$ биће

$$|y_1 - y_0| \leqslant |y_1| + |y_0| \leqslant x(1-x).$$

Стога можемо узети да је

$$p_1(x) = x(1-x).$$

Тада су и $p_n(x)$ полиноми по x.

3° Сада је јасно на шта се своди доказ става I. Да би доказали егзистенцију најмање једног решења $y = \lim\limits_{n=\infty} y_n$, довољно је, с обзиром на

$$|y_n - y_0| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu - y_{\nu-1}| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x)$$

доказати да

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} p_\nu(x)$$

конвергира за све $0 \leqslant \alpha < \pi^2$. Јер, тада је конвергенција низа y_n униформна за све $0 \leqslant x \leqslant 1$, па се у обрасцу B) прелаз $n \to \infty$ испред знака интеграције може заменити прелазом иза знака интеграције. На тај би начин добили да је

$$y = (x-1)\int_0^x t f(t,y)\,dt - x\int_x^1 (1-t) f(t,y)\,dt,$$

одакле диференцирањем следи да је $y'' = f(x,y)$.

Ако је егзистенција најмање једне граничне функције y већ осигурана, онда се јединственост овога решења може овако доказати: Нека је Y неко решење диференцијалног задатка које није идентички једнако решењу y. Функција

$$\psi = (x-1)\int_0^x t f(t,Y)\,dt - x\int_x^1 (1-t) f(t,Y)\,dt$$

је једно решење диференцијалног задатка. Јер, ако овај израз два пута диференцирамо по x добићемо

$$\psi'' = f(x,Y),$$

тј.

$$\psi'' \equiv Y'',$$

одакле закључујемо да је $\psi - Y$ линеарна функција. Но како ова функција пролази кроз тачке (0,0) и (1,0), то њени коефицијенти морају бити једнаки нули па је

$$\psi \equiv Y,$$

тј.

$$Y=(x-1)\int_0^x t\,f(t,\,Y)\,dt\;-x\int_x^1 (1-t)\,f(t,Y)\,dt.$$

Дакле,

$$Y-y_n=(x-1)\int_0^x t\{f(t,Y)-f(t,y_{n-1})\}\,dt$$

$$-x\int_x^1 (1-t)\{f(t,Y)-f(t,y_{n-1})\}\,dt.$$

Полазећи од овог обрасца добићемо, на исти начин као и напред да је за све $0\leqslant x\leqslant 1$

$$|Y-y_n|\leqslant p_{n+1}(x).$$

Према томе је $Y\equiv y$ кадгод $p_{n+1}(x)\to 0, n\to\infty$, што је свакако случај ако

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1} p_\nu(x)$$

конвергира за све $0\leqslant\alpha<\pi^2$.

4^0 Полиноми $p_n(x)=p_n(x,\alpha)$, с којим ћемо одсад имати посла, су полиноми по промењљивој x чији коефициенти зависе од параметра α, који може да буде ма какав комплексан број. За реалне позитивне α полиноми $p_n(x,\alpha)$ су идентични са напред употребљаваним полиномима.

Дефиниција полинома $p_n(x)$:

(1) $$p_1(x)=x(1-x);$$

За свако комплексно α и $n=1,2,\ldots$ је

(2) $$p''_{n+1}(x)=-\alpha\,p_n(x)$$

и

(3) $$p_n(0)=p_n(1)=0.$$

Ставимо

$$m_{n+1}(\alpha)=\alpha\int_0^{\frac{1}{2}} t\,p_n(t)\,dt,\quad n=1,2,\ldots$$

Тада важи овај став:

Став II. *За* $|\alpha| < \pi^2$ *je*

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} m_{\mu}(\alpha) = -\frac{2}{\alpha} \frac{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}} - 1}{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}} - \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Овим ставом је доказ става I завршен, јер је за реалне позитивне α

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} p_n(x) = m_n(\alpha),$$

(што ћемо доказати у помоћном ставу 1), а (према ставу II) $\sum m_{\mu}(\alpha)$ конвергира за све $0 \leqslant \alpha < \pi^2$.

Доказ става II који ћу вам овде изнети није елементаран, будући да на једном месту употребљавам познати став теорије функција комплексне промењиве, по коме потенцијални ред неке аналитичке функције конвергира у унутрашњости највећег круга унутар кога функција нема сингуларитета.

Међутим, доказ Picard-ова става је елементаран. Наиме, да би доказали Picard-ов став, довољно је да покажемо да $\sum m_{\mu}(\alpha)$ конвергира за све $0 \leqslant \alpha < 8$, а то се, као што ћете видети из доказа неједначине (e) помоћног става 1, доказује потпуно елементарно.

Лема 1. *За реалне позитивне* α, $0 \leqslant x \leqslant 1$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *je*

(a) $$p_n(x) \geqslant 0,$$

(b) $$p_{n+1}(x) = (1-x)\int_0^x t\, p_n(t)\, dt + x \int_x^1 (1-t)\, p_n(t)\, dt,$$

(c) $$p_n(x) = p_n(1-x),$$

(d) $$\max p_n(x) = p_n\left(\frac{1}{2}\right) = m_n(\alpha).$$

и

(e) $$m_n(\alpha) = O(\alpha^{n-1}),\ n \to \infty.$$

Доказ:

(a) и (b). Како су за реалне позитивне α полиноми, $p_n(x)$ идентични са полиномима које смо посматрали у тачки **2.** 2°, то су тврђења (a) и (b) већ доказана.

(c) Ово тврђење је тачно за $n=1$, јер је $p_1(x)=x(1-x)$. Претпоставимо да је оно тачно за неко $n \geqslant 1$. Тада је, с обзиром на (b),

$$p_{n+1}(1-x) = \alpha x \int_0^{1-x} t\, p_n(1-t)\, dt + \alpha (1-x) \int_{1-x}^{1} (1-t)\, p_n(1-t)\, dt$$

$$= \alpha x \int_x^1 (1-t)\, p_n(t)\, dt + \alpha (1-x) \int_0^x t\, p_n(t)\, dt = p_{n+1}(x).$$

(d) Због $p_n(x) \geqslant 0$ и $p''_{n+1}(x) = -\alpha p_n(x)$ је $p_{n+1}(x)$ конкавна функција. Због (c) је $p_{n+1}(x)$ симетрично с обзиром на праву $x=\frac{1}{2}$. Стога је

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} p_{n+1}(x) = p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Због (b) и (c) је

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} t\, p_n(t)\, dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\, p_n(1-t)\, dt$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{1}{2}} t\, p_n(t)\, dt = m_{n+1}(\alpha).$$

(e) Због (d) је за свако $\nu = 1, 2, \ldots$

$$m_\nu(\alpha) \leqslant m_{\nu-1}(\alpha)\, \alpha \int_0^{\frac{1}{2}} t\, dt = m_{\nu-1}(\alpha) \frac{\alpha}{8},$$

па је

$$\frac{m_n(\alpha)}{m_1(\alpha)} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{m_{\nu+1}(\alpha)}{m_\nu(\alpha)} \leqslant \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{n-1},$$

дакле, шта више $m_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{8}\right)^{n-1}$ јер је $m_1(\alpha) = \frac{1}{4}$.

Лема 2. *За све* (комплексне) α *и* $n = 1, 2, \ldots$ *је*:

$$(f) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} (1-)^{\nu} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\nu}}{2\nu!}\, m_{n-\nu+1}(\alpha) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^n}{2n!} \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)}$$

и

(g) $$m_n(\alpha) = \alpha^{n-1}\lambda_n,$$

при чему бројеви λ_n *не зависе* од α.

Доказ:

(f) Из дефиниције полинома $p_n(x,\alpha)$ и функције $m_n(\alpha)$ следи да је $m_n(\alpha)$ цела функција променљиве α. С тога је довољно да докажемо да је образац f тачан за реалне позитивне α. Према томе, нека је $\alpha \geqslant 0$.

Из обрасца

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \int_0^{\frac{1}{2}} t p_n(t)\, dt$$

делимичном интеграцијом добивамо

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2^3} p_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 p'_n(t)\, dt.$$

Ако интеграл с десне стране још једном делимично интегришемо, добићемо

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2^3} p_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{2.3}\int_0^{\frac{1}{2}} t\, p''_{n-1}(t)\, dt.$$

јер је $p'_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Због $p''_n(x) = -\alpha p_{n-1}(x)$ и (d) је, дакле,

$$m_{n+1}(\alpha) - \frac{\frac{\alpha}{4}}{2\,!} m_n(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{3\,!}\int_0^{\frac{1}{2}} t^3 p_{n-1}(t)\, dt.$$

Ако овај поступак применимо μ пута на интеграл са десне стране, добићемо

$$m_{n+1}(\alpha) - \sum_{\nu=1}^{\mu} (-1)^{\nu} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\nu}}{2\nu\,!} m_{n-\nu+1}(\alpha)$$

$$= -(-1)^{\mu+1}\frac{\alpha^{\mu+1}}{(2\mu+1)\,!}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2\mu-1} p_{n-\mu}(t)\, dt.$$

Ставимо ли овде $\mu = n-1$, добићемо образац (f), јер је

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2n-1} p_1(t)\, dt = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{2n+3}{(2n+1)(2n+2)} \,.$$

(g) је тачно за $n=1$ јер је $m_1(\alpha) = \frac{1}{4}$. Претпоставимо да је (g) тачно за неко $n \geqslant 1$. Због (f) је тада

$$m_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\nu}}{2\,\nu!} \alpha^{n-\nu} \lambda_{n-\nu+1} - \frac{(-1)^n}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n}}{2\,n!} \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \alpha^n \lambda_{n+1} .$$

5⁰ Доказ става II. Краткоће ради ставимо

$$\varepsilon_{\nu} = -\frac{(-1)^{\nu}}{2} \frac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\nu}}{2\,\nu!} \frac{\nu(2\nu+3)}{(2\nu+1)(2\nu+2)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Тада првих $2n-2$ једначина (f) изгледају опширно написане овако:

$$\begin{array}{rcl}
 & + m_2(\alpha) & = \varepsilon_1 \\
 & + m_3(\alpha) - \dfrac{\frac{\alpha}{4}}{2!} m_2(\alpha) & = \varepsilon_2 \\
 & \cdots & \\
+ m_{n+1}(\alpha) + \ldots & \ldots \pm (-1)^{n-1} \dfrac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n-1}}{2(n-1)!} m_2(\alpha) & = \varepsilon_n \\
 & \cdots & \\
\ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n-1}}{2(n-1)!} m_{n+1}(\alpha) + \ldots & \ldots + (-1)^{2n-2} \dfrac{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{2n-2}}{4(n-1)!} m_2(\alpha) & = \varepsilon_{2n}
\end{array}$$

Ако ове једначине саберемо и на левој страни задржимо само уоквирене чланове, добићемо:

$$\sum_{\mu=2}^{n+1} m_\mu(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{2\nu\,!}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^{2\nu}=\sum_{\mu=2}^{2n}\varepsilon_\mu$$
$$-\sum_{\mu=2}^{n-1} m_{n+\mu}(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{2\nu\,!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^\nu$$
$$-\sum_{\mu=2}^{n-1} m_\mu(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-\mu}\frac{(-1)^{n+\nu}}{2(n+\nu)\,!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{n+\nu}$$
$$=\sum_{\mu=2}^{2n}\varepsilon_\mu-J_1-J_2\,.$$

У случају да је $0\leqslant\alpha<1$ биће, с обзиром на (е) тј. $m_n(\alpha)\leqslant C\alpha^{n-1}$

$$|J_1|\leqslant C\sum_{\mu=2}^{n+1}\alpha^{n+\mu}\sum_{\nu=0}^{n-\mu}\frac{1}{\nu\,!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^\nu<C\,n\,\alpha^n\exp\left[\frac{\alpha}{4}\right]$$

$$J_1=O(n\,\alpha^n)\,,\ n\to\infty\,.$$

Исто тако се види да тада и J_2 задовољава исту неједначину Према томе, у случају $0\leqslant\alpha<1$ биће

$$(5)\qquad \sum_{\mu=2}^{n+1} m_\mu(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{2\nu\,!}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^{2\nu}=\sum_{\mu=2}^{2n}\varepsilon_\mu+O(n\,\alpha^n)\,,n\to\infty\,.$$

Због (g) лева страна обрасца (4) је потенцијални ред по промењивој (α); десна страна овог обрасца је регуларна функција за све $|\alpha|<\pi^2$. Водећи рачуна о поменутом ставу теорије функција, видимо да је за доказ става II довољно доказати да образац (4) важи за све α неког лука C који лежи унутар области $|\alpha|<\pi^2$. У ту сврху узећемо да је лук C дуж $0\leqslant x<1$. У том случају можемо у окрасцу (5) извршити прелаз $n\to\infty$; добићемо

$$\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\sum_{\mu=2}^{\infty} m_\mu(\alpha)=-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{2\mu\,!}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^{2\mu}\frac{\mu(\mu+3)}{(2\mu+1)(2\mu+2)}\,.$$

Полазећи од потенцијалног реда функције $\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}$, лако се може проверити да је десна страна горњег израза једнака

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}-1}{\frac{\alpha}{4}}+\frac{\cos\sqrt{\frac{\alpha}{4}}}{2}\right\}.$$

Тиме је став II доказан.

3. 1° Доказ става I има и поред своје дужине ту добру страну да не почива ни на којој теореми диференцијалних једначина другог реда. Међутим, ако претпоставим да су вам познате основне особине линеарних диференцијалних једначина, онда доказ става могу осетно скратити. Овај поступак интересантан је и с тога што пружа могућност да се докажу ставови са уопштеним Lipschitz-овим условом. О овоме ћу вам говорити идући пут. За сада хтео бих да вам изнесем други доказ става I. При томе ћу од онога што сам већ доказао употребити помоћни став 1 и оно што му претходи.

2° Приметимо претходно да је

$$p_n(x) = \alpha^{n-1} q_n(x) \tag{6}$$

при чему је $q_n(x)$ неки полином по x чији коефицијенти не зависе од α.

Заиста, ако је ово тачно за неко $n \geqslant 1$, биће с обзиром на D),

$$p_{n+1}(x) = \alpha^n (1-x)\int_0^x t q_n(t)dt + \alpha^n x \int_x^1 (1-t)\, q_n(t)\, dt = \alpha^n q_{n+1}(x).$$

За $n=1$ је тврђење тачно, јер је $p_1(x) = x(1-x)$.

Ставимо

$$P_n(x) = P_n(x,\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(x).$$

Како је

$$p_1''(x) = -2,$$

то сабирањем ове и n првих једначина $p''_{\nu+1}(x) = -\alpha\, p_\nu(x)$ добивамо

$$P''_{n+1}(x) = -2 - P_n(x).$$

Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада с обзиром на (е), $P_n(x)$ тежи некој граничној функцији $P(x)$. Очито да тада и

$$P_{n+1}''(x) \to P''(x), \quad \text{кад } n \to \infty$$

Стога у горњој једначини можемо учинити прелаз $n \to \infty$. На тај начин добивамо

$$P''(x) + \alpha P(x) = -2.$$

Очито је да $P(x)$ задовољава гранични услов

$$P(0) = P(1) = 0,$$

јер је то случај са сваким од полинома $p_n(x)$. Стога је

$$P(x) = \frac{2}{\alpha}(\cos\sqrt{\alpha}\, x - 1) + \frac{2}{\alpha}\frac{1-\cos\sqrt{\alpha}}{\cos\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}\, x.$$

Десна страна овог обрасца даје нам аналитичко продужење функције $P(x,\alpha)$ по промењивој α. Према томе, $P(x,\alpha)$ је регуларно за све $|\alpha| < \pi^2$. С обзиром на (6) и поменуту теорему теорије функција, јасно је да потенцијални ред

$$\sum p_\nu(x) = \sum \alpha^\nu q_{\nu+1}(x)$$

конвергира за $|\alpha| < \pi^2$ што је и требало доказати.

ÜBER DIE NULLSTELLEN DER INTERGRALE NICHTLINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Von V. G. Avakumović (Beograd)

Wiedergabe einer Kursusvorlesung über die Randwertaufgabe (1) $y'' = f(x,y)$; $y(a) = y(b) = 0$. Dabei wird stets vorausgesetzt dass im Gebiete $D: a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant \frac{1}{2} M(x-a)(b-x)$ die Funktion $f(x,y)$ stetig und dem Betrage nach $\leqslant M$ ist. Es wird folgende Verallgemeinerungdes Picardschen Satzes bewiesen (Satz A): *Genügt* $f(x,y)$ *ausserdem der Bedingung* (2) $|f(x\bar{y}) - f(x,\underline{y})| \leqslant \alpha|\bar{y} - \underline{y}|$ *mit* (3) $\alpha(b-a)^2 < \pi^2$, *so hat* (1) *genau eine in D liegende Lösung. Diese Lösung lässt sich mittels der Methode der Schrittweisen Annäherung berechnen.* In (3) lässt sich das Zeichen $<$ nicht durch $\leqslant$ ersetzen· Aus diesem Satz ergibt sich folgendes Analogon der Sturmschen Ungleichung (Satz B): *Genügt* $f(x,y)$ *ausser der Bedingung* (2) *noch der Bedingung* $f(x,0) \equiv 0$ *und sind a und b zwei nacheinanderfolgende Nullstellen einer Lösung von* $y'' = f(x,y)$ *so ist notwendigerweise* $b - a \geqslant \pi/\sqrt{\alpha}$.