THE TEACHING OF MATHEMATICS
2002, Vol. V, 2, pp. 81–89

СУЩНОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ТИПИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Диана Ил. Изворска и Славка К. Славова

Abstract. The purpose of the paper is to present the authors' idea concerning the mathematical problems' nature and the nature of the training mathematical problems in particular, to consider their structure and classification according to their type, based on their components and to point out the role of the types of training problems in the process of teaching mathematics. All types of problems considered are illustrated by appropriate examples.

AMS Subject Classification: 00 A 35.

Key words and phrases: Classification according to the type of training mathematical problems, components of mathematical problems.

Деятельность человека тесно связана с решением различных типов задач разной сложности. Задачи и их решение находятся в прямой связи с этой разносторонней деятельностю. Поэтому процессы решения задач являются предметом исследования психологии, философии, логики и других наук.

Особено большая роль задач в обучении по математике, как в средней школе, так и в вузах. Решение задач является целью и средством обучения.

В существующей в настоящее время учебной и методической литературе сравнительно полно и глубоко разработана методика решения задач. Все еще не создана конкретная система учебных задач, при помощи которой будет возможно решить вопрос о подборе задач в обучении и в частности в обучении по математике.

Предметом настоящей работы являются представление в сжатом виде нашей концепции относительно сущности математических задач и в частности учебных математических задач, рассмотрение их структуры и некоторых типизаций учебных математических задач, основанных на их компонентах. Работа также ставит себе целю показать функции различных типов учебных задач в обучении по математике. Рассмотренные типы задач иллюстрированы подходящими примерами.

В литературе существуют различные подходы при определении понятия «задача» и выделении ее компонентов. В нашей работе воспринят подход Л. М. Фридмана [1]. Он определяет понятие «задача» как модель проблемной ситуации, выраженую посредством какого-то естественного или искуственного языка.

Любая языковая модель проблемной ситуации называется *задачей.* При этом моделировании ситуации (понятие, резервированное только для субъекта) субъект оставляют и моделируют остальные ее компоненты. Языковую модель этих компонентов проблемной ситуации определяют как компоненты задачи.

Мы рассмотрим каждый из этих компонентов в отдельности.

Область задачи D – это множество объектов, определяемое языком, на котором смоделирована ситуация, т.е. оно определяется на базе использованной при этом моделировании терминологии и символики.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Решить уравнение

$$x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0. \tag{1}$$

Область D задачи представляет собой множество комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Одну и ту же ситуацию можно моделировать при помощи различных терминов и символики, что иногда приводит к изменению области задачи. Выбор области данной задачи зависит и от остальных ее компонентов, т.е. область выбирается в соответствии с этими компонентами.

Так например, если с помощью задачи 1 можно проиллюстрировать один из видов уравнений, то в качестве области задачи можно выбрать множество квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

С теоретико-множественной точки зрения область задачи играет роль универсального множества и из-за этого имеет относительный характер.

Условие P задачи в качестве языковой модели условия ситуации задают посредством суждений и предикатов, имеющих отношение к объектам из области задачи.

Так, в задаче 1 условие представляет собой предикат

$$P(x): \qquad x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0. \tag{2}$$

С этим предикатом связаны два множества: дефиниционное множество

$$D_0 = \{\, x \mid x \in \mathbf{C} \,\}$$

и множество верности

$$D_P = \{\, x \in \mathbf{C} \mid P(x) \,\},$$

которые являются подмножествами области задачи – $\mathbf{C}$, точнее

$$D_P \subset D_0 \subset D = \mathbf{C}.$$

В учебной практике множество D_0 называется дефиниционной областю (множество допустимых значений) задачи. Из этого становиться ясным, что область задачи и ее дефиниционная область – это два различных, но связанных между собой понятий.

Цель A задачи в качестве смоделированной языковым образом цели ситуации задается при помощи вопроса, приказа или безличного предложения. Так например, цель задачи 1 – это конструктивным образом (посредством перечисления его элементов) задать множество D_P.

Оператор O задачи в качестве языковой модели оператора ситуации представляет собой систему конечного числа знаний (операций), которые необходимо использовать в точно определенной последовательности, чтобы достигнуть желанной цели. Следовательно, он является явным, но все еще абстрактным выражением объективнных связей между условием и целью задачи.

Оператор математической задачи представляет собой систему конечного числа логических и математических знаний, которые необходимо применить в точно определенной последовательности, чтобы достигнуть намеченной цели.

Элементами оператора задачи являются *средства*, которые применяются для ее решении. Одно или несколько из этих средств имеют существенное значение для реализации решения – мы будем называть их *клеткой оператора*. На практике в указаниях для решения определенной задачи указывается именно клетка оператора задачи.

Так например, оператор в задаче 1 неизвестен и его можно найти в результате последовательности следующих операций:

1. Определяем коэффициенты уравнения (1): $a = 1$, $b = -(2 + i)$, $c = 7i - 1$.
2. Вычисляем дискриминанту $D = b^2 - 4ac$.
3. Определяем корни квадратного уравнения по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

В результате использованного оператора получаем множество D_P:

$$D_P = \{3 - i, -1 + 2i\}.$$

Так как задачи являются средством и целью обучения по математике, то одна из целей обучения по математике – это приобретение со стороны обучаемых обобщенных, систематизированных и прочных задач, а также умений и навыков для их применения. Один из способов достижения этой цели – это типизирование уже приобретенных знаний. В связи с этим необходимо обособить задачи в группы (виды).

Типизорвание задач можно осуществить на разных основаниях, по различному признаку, в соответствии с целями обучения по математике в определенный момент. Первую и самую общую типизацию математических задач можно сделать на базе их компонентов. Это можно осуществить двумя способами:

1. На базе числа неизвестных компонентов (как например в [2]).
2. На базе информации, которую несут известные компоненты.

Обе типизации имеют комбинаторный характер, но имея в виду их значение для обучения по математике, приходится уменьшить число возможных случаев.

Из-за ограниченного объема работы мы остановимся на типизации на базе информации, несомой известными компонентами. До этого, однако, необходимо сделать некоторые уточнения и определить различия с типизацией Ю. М. Колягина в [2].

1. В нашем случае цель всегда известна. Это требование связано с определением задачи, с определениями ее компонентов и требований ним. Таким

образом мы уменьшаем число типов зада (до восьми), в то время, как в [2] их число 15. Это значительно облегчает практическое применение нашей типизации в обучении по математике.

2. Мы вкладываем иной смысл в термин «неизвестный» компонент. Под неизвестным компонентом мы понимаем компонент, для которого не дано никакой информации (таким может бить только оператор – типичным примером этого являются так называемые «нестандартные задачи») или информация дана, но косвенно, посредством известного уже компонента.

Неизвестные компоненты мы будем обозначать при помощи X.

I. Задачи с известной областью и целью – $\boxed{*A*D}$.

К этому типу относится следующие задачи:

1) $PAOD$, 2) PAX_OD, 3) X_PAOD, 4) X_PAX_OD.

1) Задачи типа $PAOD$.

Эти задачи мы называем *тренировочными.* Они часто встречаются в процесе обучения (около 52,3% в учебниках по математике с 1-ого по 11-ый класс и около 24,4% в учебниках по математике для вузов). Примером таких задач выступают все знакомые теоремы, доказательства которых обучаемые воспроизводят, все задачи, решаемые при помощи полученной формулы и другие подобные, при помощи которых формируются умения и навыки для непосредственного применения приобретенных знаний.

К этой группе можно отнести следующие задачи:

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}(4,-2,4)$ и $\vec{b}(6,-3,2)$. Вычислите:

$$\text{а) } \vec{a}\cdot\vec{b}, \qquad \text{б) } |\vec{a}|,\ |\vec{b}|, \qquad \text{в) } \angle(\vec{a},\vec{b}).$$

Задача 3. Найти длину дуги кривой $r = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.

Задача 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+2y^2+z^2=6$ и $z=x^2+2y^2$.

2) Задачи типа PAX_OD.

Это наиболее часто встречаемые задачи, так как почти всегда оператор неизвестен. При их помощи у обучаемых создаются умения подбирать необходимые математические знания и упорядочить их в последовательность посредством определенных логических знаний на базе известных компонентов. В процессе раскрытия неизвестного оператора приходится решать конечное число задач типа 1.

К этой группе можно отнести следующие задачи:

Задача 5. Даны вершина $A(-2,9)$ и уравнения h_b: $6x+13y+29=0$ и m_b: $3x+10y-10=0$ в треугольнике ABC. Найти уравнения сторон треугольника.

Задача 6. Решить уравнение $y''+5y'+6y=10(1-x)e^{-2x}$.

3) Задачи типа $X_P AOD$.

Задачи рассматриваемого типа возникают перед составителями задач для различных конкурсов, экзаменов и контрольных работ. При их помощи осуществляется одна из целей обучения по математике – развитие самостоятельного мышления обучаемых. Составленная задача относится к задачам типа 1, т.е. реализуется схема

Задача 7. Приведите примеры неопределенных интегралов, при нахождении которых существенное применение подстановки $x = a\sin t$.

В данной задаче областю D является множество неопределенных интегралов.

Цель A задачи – составить неопределенные интегралы, удовлетворяющие определенным условиям. Оператор задачи также точно указан.

Ответом на вышеприведенную задачу могут быть следующие интегралы:

$$\int \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{3-x^2}}\,dx.$$

4) Задачи типа $X_P AX_O D$.

Припоминаем, что посредством условия задается подмножество области задачи. Следовательно, известная область оказывает влияние на раскрытие условия, но она не достаточна. Для определения этого подмножества существено знать его характеристическое свойство, которое со своей стороны определяется целью. Таким образом задачи этого типа сводятся к задачам второго типа, т.е.

Такие задачи есть в обучении по математике. Сюда входят все задачи, при которых необходимо найти достаточные условия для верности данного утверждения и, следовательно, для их решения применяется анализ по схеме PAP, все параметрические уравнения и неравенства, системы, образованные ими и т.п. Но все еще не используются сознательно и целесообразно дидактические функции приведения задач этого типа к задачам второго типа.

Поясним сказаное примерами.

После завершения определенного раздела или во время повторения вместо того, чтобы задавать задачи второго типа, некоторые из них можно сформулировать как задачи рассматриваемого типа. Вместо задачи

Задача 8. Данна функция $y = x^3 e^{-x}$. Определить экстремумы.

на определенном этапе обучения с дидактической точки зрения более целесообразно сформулировать следующую задачу:

Задача 9. Каковы достаточные условия существования экстремума данной функции?

Один из возможных ответов на вышеуказанную задачу присуствует в формулировке задачи 8, но он не единственный. Нахождение и других ответов на задачу 9, а также их обоснование приводят к сознательному усваиванию знаний об экстремумах функции.

II. Задачи с известным условием и целью – $\boxed{PA**}$.

Сюда относятся задачи следующих типов:

$$PAOD, \qquad 5)\ PAOX_D, \qquad PAX_OD, \qquad 6)\ PAX_OX_D.$$

Очевидно, что этот тип задач содержит некоторые из уже рассмотренных задач первого и второго типа. Здесь мы рассмотрим только те типы, которые не упоминались в I.

5) Задачи типа $PAOX_D$.

В формулировке задач этого типа область прямо не задана, но она подразумевается на фоне остальных известных компонентов (особенно условия и цели). Таким образом этот тип задач приводится к задачам первого типа:

Этот тип задач имеет много дидактических функции, но мы остановимся только на одной из них. В учебном содержании по математике можно указать на ряд задач, которые не является целесообразным решать посредством использования стандартных операторов, так как это приводит к нерациональному решению задач. В таком случае целесообразным является рассматривать задачи этого типа как задачи типа PAX_OX_D. На базе типа известных компонентов определяем тип нового оператора, различного от первого, а при помощьи всех трех вместе определяем областьпо-новому,

Объясним примером.

Задача 10. Докажите неравенство $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x > -1$.

При первоначальном анализе задачи и ее компонентов видно, что она относится к типу $PAOX_D$, т.е. это задача с известным оператором, в основе которого может быть анализ по схеме РАР. Если из соображений рациональности решения необходимо отказатся от этого оператора, задача становится задачей типа PAX_OX_D. Анализируя условие задачи более детально, мы обнаруживаем, что $F(u) = \ln(u+1)$ в $[0, x]$ удовлетворает условиям теоремы Лагранжа. Новый оператор известен. Таким образом задача типа $PAOX_D$ перевращается в задачу типа $PAOD$.

Вышеприведенный переход иллюстрирует поиск новых идей для решения стандартных задач, а это обогащает находчивость обучаемых и благоприятствует развитию их творческого мышления.

6) Задачи типа PAX_OX_D.

Мы проиллюстрировали один из подходов для раскрытия неизвестных компонентов на предыдущих страницах этой работы, а именно: посредством известных компонентов (условие и цель) раскрывается неизвестный оператор, а при помощи трех вместе взятых компонентов раскрывается и область, т.е.

Таким образом задачи этого типа приводятся к задачам первого типа, но это не единственная возможность, так как в некоторых задачах этого типа целесообразно посредством известных компонентов (условие и цель) раскрыть сначала область и затем привести задачу к задачам второго типа, т.е.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 11. Дан треугольник ABC. На прямой содержащей AC отметим точку D такую, что отрезок CD совпадающий отрезке BC и точки A и D находятся по разные стороны точки C. Пусть M середина отрезка AD, N – середина отрезка BC и $\angle BAC = \alpha$. Пусть MN пересекает прямую содержащую AB в точке E. Найти угол BEM.

Условие P и цель A задачи известны. Неизвестен оператор. Область задачи задана косвенно. Анализируя условие и имея в виду цель, приходим к выводу о необходимости определить клетку оператора (теорема Менелая). После этого область естественно задается как множество всех треугольников, у которых данная прямая пересекает две из сторон и продолжение третьей стороны. Так мы приходим к задачи второго типа, т.е. реализуется схема ($\underset{\text{кл}}{X_O}$ обозначает клетку оператора).

III. Задачи с известными оператором и целью – $\boxed{*AO*}$.

К этому типу относятся следующие задачи:

$$PAOD, \qquad PAOX_D, \qquad X_PAOD, \qquad 7)\ X_PAOX_D.$$

Так как первые три типа уже рассмотрены, интерес представляет только последний тип X_PAOX_D. Задачи этого типа, однако, не имеет особого значения в обучении по математике из-за того, что в них цель сформулированна весьма обобщенно, так как в противном случае она сразу раскрывает область.

IV. Задачи типа $\boxed{*A**}$.

К этому типу относятся следующие задачи:

$$PAOD, \qquad PAOX_D, \qquad X_PAOD, \qquad X_PAOX_D,$$
$$PAX_OD, \qquad PAX_OX_D, \qquad X_PAX_OD \qquad \text{и} \qquad 8)\ X_PAX_OX_D.$$

8) Задачи типа $X_PAX_OX_D$.

Это единственный еще не прокомментированный до сих пор тип задач. Так как одно из требований к цели – это то, чтобы она была точно и ясно сформулированной, то посредством информации, которую цель несет, раскрывается и область задачи. Формально к этому типу можно отнести задачи, при которых необходимо конструировать контрапримери, оповергающие данное утверждение.

Такой тип задач реализуется по следующей схеме:

В заключение отметим, что эта комбинаторная типизация приводит также и к формальному выделению некоторых видов задач, как например задачи типа 7 и 8. Эти типы задач не представляют особого интереса в обучении по математике. Вот почему из восьми типов задач только шесть можно отнести к учебным математическим задачам.

Из анализа, который мы провели до сих пор, можно сделать вывод, что все восемь типов задач на формальной комбинаторной типизации математических задач проведенной на базе информации, которую известные компоненти несут, можно свести к одному из следующих двух типов задач:

$$1)\ PAOD \qquad \text{и} \qquad 2)\ PAX_O D,$$

но рассмотреноие остальных четырех типов оказывается целесообразным из-за их дидактической значимости для обучения по математике.

Настоящей работой не исчерпывается вопрос о типизации учебных математических задач, но она может способствовать обогащению методической культуры преподавателей математике в средних школах и в вузах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фридман, Л.М., *Логико-психологический анализ школьных учебных задач*, «Педагогика», Москва 1977.

[2] Колягин, Ю.М., *Задачи в обучении по математике*, часть I, «Просвещение», Москва 1977.

[3] Изворска, Д.И., *Върху типизицията на учебните математически задачи*, докторска дисертация, Габрово 1998.

Republic of Bulgaria, 5300 Gabrovo, “Aleko Konstantinov” str. 36, Diana Ilieva Izvorska
E-mail: mpk24@komtekct.com