TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 21, pp 1–7, 1995, UDK 531

О ПРОДОЛЖИМОСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА С ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА НЕЛИНЕЙНУЮ

Р. М. Булатович

(Поступила 21.08.1995.)

В данной работе решается задача [3] о продолжимости "гироскопического" интеграла [2] с линейной полунатуральной системы с двумя степенями свободы на соответствующую систему с нелинейными потенциальными силами. Доказывается, что существует только один класс потенциалов для которых продолжение имеет место и выводится соответствующий интеграл.

1. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, положение которой определяется координатами $x = (x_1, x_2)$, с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \omega\left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right) + U\left(x\right),$$

где ω - постоянная. Системы этого вида часто встречаются (см. [1]). Предположим, что силовую функцию $U(x) \in C^2$ в окрестности начала координат можно представить в виде

$$U = U_2\left(x\right) + o\left(|x|^2\right),$$

где $U_2(x)$ - квадратичная форма.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 2\omega\dot{x}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \ddot{x}_2 &= -2\omega\dot{x}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{1}$$

Н.Г. Четаев [2] отметил, что если

$$U_2 = \left(ax_1^2 + bx_2^2\right)/2,$$

то система (1) в первом приближении допускает помимо интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - U_2\left(x\right)$$

еще и интеграл

$$\Gamma = 2\left(bx_2\dot{x}_1 - ax_1\dot{x}_2\right) - 2\omega\left(ax_1^2 + bx_2^2\right) + \frac{b-a}{4\omega}\left(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2 + ax_1^2 - bx_2^2\right) \tag{2}$$

независимый с интегралом H. Хорошо известно, что интеграл энергии продолжается и для нелинейной системы, а вопрос о продолжимости "гироскопического" интеграла Γ открыт [3]. В связи с этим будем решать следующую задачу: Какого вида должна быть силовая функция U для того чтобы уравнения (1) допускали интеграл вида

$$F(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\left(A(x)\dot{x}_1^2 + 2B(x)\dot{x}_1\dot{x}_2 + C(x)\dot{x}_2^2\right) + D(x)\dot{x}_1 + E(x)\dot{x}_2 + G(x) \tag{3}$$

причем $D(0)=0, E(0)=0$ и линейная форма по $\dot{x}$ не исчезает.

Эта задача родственна задаче Бертрана о построении поля сил по заданному первому интегралу (см. нпр. [4]).

В дальнейшем будет показано, что система (1) допускает интеграл вида (3) тогда и только тогда, когда силовая функция имеет один из следующих двух видов:

$$1)\quad U = U\left(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right),$$

где U - произвольная функция своего аргумента и c_1, c_2, c_3 - постоянные;

$$2)\quad U = \frac{1}{2}\left(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2\right),$$

где c_{11}, c_{12}, c_{22} - постоянные.

В первом случае

$$F = \left[\left(2c_3x_2 + c_2\right)\dot{x}_1 - \left(2c_3x_1 + c_1\right)\dot{x}_2 - 2\omega\left[c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]\right]^2,$$

а в втором

$$F = \frac{1}{2}\left(c_{22}\dot{x}_1^2 - 2c_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + c_{11}\dot{x}_2^2\right) + \omega\left[\left(c_{11}x_1 + c_{12}x_2\right)\dot{x}_2 - \left(c_{12}x_1 + c_{22}x_2\right)\dot{x}_1\right] + \frac{1}{4}\left(c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + 4\omega^2c_{11}\right)x_1^2 + 2\omega^2c_{12}x_1x_2 + \frac{1}{4}\left(c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + 4\omega^2c_{22}\right)x_2^2.$$

Таким образом, гироскопический интеграл продолжается и для нелинейной системы в том и только том случае, когда силовая функция принадлежит семейству 1).

2. Пусть функция (3) интеграл уравнений (1). Вычисляя производную от F в силу системы уравнений (1) получим тождество

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\left(2\omega\dot{x}_2+\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\left(-2\omega\dot{x}_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}\dot{x}_2=0$$

Отсюда, учитывая структуру функции F и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях скоростей, находим:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_2}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_2}+2\frac{\partial B}{\partial x_1}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_1}+2\frac{\partial B}{\partial x_2}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_1}-2\omega B=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_2}+2\omega B=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}+\frac{\partial D}{\partial x_2}+2\omega\left(A-C\right)=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}+A\frac{\partial U}{\partial x_1}+B\frac{\partial U}{\partial x_2}-2\omega E=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}+B\frac{\partial U}{\partial x_1}+C\frac{\partial U}{\partial x_2}+2\omega D=0 \tag{12}$$

$$D\frac{\partial U}{\partial x_1}+E\frac{\partial U}{\partial x_2}=0 \tag{13}$$

Не трудно показать, что все решения системы уравнений (4)-(10), которые удовлетворяют условиям $E(0)=0$, $D(0)=0$ имеют вид

$$A=a_1x_2^2+2a_2x_2+a_5 \tag{14}$$

$$C=a_1x_1^2+2a_4x_1+a_6 \tag{15}$$

$$B=-\left(a_1x_1x_2+a_2x_1+a_4x_2+a_3\right) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}D=-\omega\big[&a_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)+a_2\left(x_1^2+3x_2^2\right)+\\&+2a_4x_1x_2+2a_3x_1+\left(2a_5-\frac{a_7}{\omega}\right)x_2\big]\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}E=\omega\big[&a_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)+a_4\left(3x_1^2+x_2^2\right)+\\&+2a_2x_1x_2+2a_3x_2+\left(2a_6-\frac{a_7}{\omega}\right)x_1\big]\end{aligned} \tag{18}$$

где a_1, ..., a_7 - произвольные постоянные.

Подставляя выражения (17) и (18) в (13), получаем однородное линейное уравнение с частным производными первого порядка для силовой функции U. Общее решение этого уравнения есть произвольная функция от первого интеграла соотвествующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx_1}{D(x)} = \frac{dx_2}{E(x)} \tag{19}$$

где $D(x)$ и $E(x)$ определяются выражениями (17) и (18). Легко показать, что

$$\phi(x) = \frac{a_1}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 + a_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_2 + a_4\left(x_1^2 + x_2^2\right)x_1 + \\ + 2a_3x_1x_2 + \frac{1}{2}\left(2a_6 - \frac{a_7}{\omega}\right)x_1^2 + \frac{1}{2}\left(2a_5 - \frac{a_7}{\omega}\right)x_2^2 \tag{20}$$

первый интеграл уравнения (19). Следовательно, произвольная функция

$$U = U(\phi) \tag{21}$$

является общим решением уравнения (13).

Дифференцируя уравнения (11) и (12) соответственно по x_2 и x_1, учитывая (20), (21), и приравнивая полученные таким образом значения $\partial^2 G/\partial x_1 \partial x_2$, получим

$$Q\left(x\right)U'\left(\phi\right) + P\left(x\right)U''\left(\phi\right) = 0 \tag{22}$$

причем здесь и далее штрих обозначает производную по ϕ. Функции Q и P имеют вид

$$Q = 3\omega^2\left\{2\left(a_1a_3 - a_2a_4\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 2\left[a_4^2 - a_2^2 + a_1\left(a_5 - a_6\right)\right]x_1x_2 + \\ + \left[2a_3a_4 - a_2\left(2a_6 - \frac{a_7}{\omega}\right)\right]x_1 + \left[a_4\left(2a_5 - \frac{a_7}{\omega}\right) - 2a_2a_3\right]x_2\right\} \tag{23}$$

$$P = B\left(E^2 - D^2\right) + DE\left(A - C\right) \tag{24}$$

причем A, B, C, D, E определяются формулами (14)-(18).

Таким образом, рассматриваемая задача имеет решение тогда и только тогда, когда имеет место равенство (22).

Замечание 1. Вместе с функцией $U(\phi)$, функция $U(-\phi)$ удовлетворяет уравнению (22).

Предположим сначала, что $Q(x) \equiv 0$. Это условие выполняется в том и только том случае, когда постоянные a_i удовлетворяют одному из следующих условий:

а) $4a_3^2 = \left(2a_5 - \frac{a_7}{\omega}\right)\left(2a_6 - \frac{a_7}{\omega}\right)$,
$2a_2^2 = a_1\left(2a_5 - \frac{a_7}{\omega}\right)$, $2a_4^2 = a_1\left(2a_6 - \frac{a_7}{\omega}\right)$;

б) $a_1 = a_2 = a_4$;

ц) $a_2 = a_3 = a_4 = 0,\ a_5 = a_6$.

Случай а). В силу замечения 1 можно считать, что

$$2a_6 = c_1^2 + \frac{a_7}{\omega}, \quad 2a_5 = c_2^2 + \frac{a_7}{\omega}, \quad 2a_3 = c_1 c_2,$$

$$a_1 = 2c_3^2, \quad a_2 = c_2 c_3, \quad a_4 = c_1 c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные. Подставляя это в выражения (14)-(18), (20), получим

$$\begin{aligned}
&2A = (2c_3x_2 + c_2)^2 + \frac{a_7}{\omega}, && 2C = (2c_3x_1 + c_1)^2 + \frac{a_7}{\omega},\\
&2B = -(2c_3x_1 + c_1)(2c_3x_2 + c_2), && 2\phi = \psi(x)^2,\\
&D = -\omega(2c_3x_2 + c_2)\psi(x), && E = \omega(2c_3x_1 + c_1)\psi(x),
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\psi = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2.$$

Внося (25) в (24), находим, что $P(x) \equiv 0$. Следовательно, условие (22) выполняется тождественно при произвольной функции $U(\psi)$. Если воспользоваться выражениями (25), то уравнения (11), (12) принимают вид

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 2\omega^2(2c_3x_1 + c_1)\psi - \frac{a_7}{2\omega}\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 2\omega^2(2c_3x_2 + c_2)\psi - \frac{a_7}{2\omega}\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

откуда находим

$$G = \omega^2\psi^2 - \frac{a_7}{2\omega}U(\psi)$$

В результате подстановки (25) и (26) в (3), получается

$$\begin{aligned}
F = \frac{1}{4}&\left[(2c_3x_2 + c_2)\dot{x}_1 - (2c_3x_1 + c_1)\dot{x}_2\right]^2 -\\
&- \omega\psi\left[(2c_3x_2 + c_2)\dot{x}_1 - (2c_3x_1 + c_1)\dot{x}_2\right] +\\
&+ \omega^2\psi^2 + \frac{a_7}{2\omega}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - U(\psi)\right].
\end{aligned}$$

Принимая во внимание интеграл энергии следует, что в качестве интеграла F можно взять

$$F = \left[(2c_3x_2 + c_2)\dot{x}_1 - (2c_3x_1 + c_1)\dot{x}_2 - 2\omega\psi\right]^2 \tag{27}$$

который, очевидно, эквивалентный линейному относительно скоростей интегралу

$$\begin{aligned}
I = (2c_3x_2 + c_2)&\dot{x}_1 - (2c_3x_1 + c_1)\dot{x}_2 -\\
&- 2\omega\left[c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Случай б). Тогда уравнение (22) сводятся к виду

$$\left[4a_3^2 - \left(2a_5 - \frac{a_7}{\omega}\right)\left(2a_6 - \frac{a_7}{\omega}\right)\right]$$
$$\left[a_3\left(x_1^2 - x_2^2\right) + \left(a_5 - a_6\right)x_1x_2\right]U''(\phi) = 0 \tag{28}$$

Из равенства (28) вытикают следующие случаи:

б-1) $4a_3^2 - \left(2a_5 - \frac{a_7}{\omega}\right)\left(2a_6 - \frac{a_7}{\omega}\right) = 0;$

б-2) $a_3 = 0,\ a_5 = a_6;$

б-3) $U''(\phi) = 0.$

Случаю б-1) соотвествует силовая функция вида $U(c_1x_1 + c_2x_2)$, а случаю б-2) - $U = U\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ и, очевидно, что они содержатся в более общем случае а).

В случае б-3) силовая функция квадратичная форма. Пусть

$$U = \frac{1}{2}\left(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2\right) \tag{29}$$

где c_{11}, c_{12}, c_{22} - постоянные.

Сравнивая (29) и (20) видим, что

$$a_3 = \frac{c_{12}}{2}, \quad a_5 = \frac{c_{22}}{2} + \frac{a_7}{2\omega}, \quad a_6 = \frac{c_{11}}{2} + \frac{a_7}{2\omega} \tag{30}$$

Можно считать, что $a_7 = 0$. Тогда внося $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ и (30) в (14)-(18), получим

$$\begin{aligned} &2A = c_{22}, \quad 2B = -c_{12}, \qquad 2C = c_{11}, \\ &D = -\omega\left(c_{12}x_1 + c_{22}x_2\right), \quad E = \omega\left(c_{11}x_1 + c_{12}x_2\right), \end{aligned} \tag{31}$$

Из уравнений (11), (12), учитывая (31), находим

$$\begin{aligned} G =& \frac{1}{4}\left(c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + 4\omega^2 c_{11}\right)x_1^2 + 2\omega^2 c_{12}x_1x_2 + \\ &+ \frac{1}{4}\left(c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + 4\omega^2 c_{22}\right)x_2^2 \end{aligned} \tag{32}$$

Подставляя (31) и (32) в (3), получим окончательное выражение для гироскопического интеграла

$$\begin{aligned} F =& \frac{1}{2}\left(c_{22}\dot{x}_1^2 - 2c_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + c_{11}\dot{x}_2^2\right) + \\ &+ \omega\left[\left(c_{11}x_1 + c_{12}x_2\right)\dot{x}_2 - \left(c_{12}x_1 + c_{22}x_2\right)\dot{x}_1\right] + \\ &+ \frac{1}{4}\left(c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + 4\omega^2 c_{11}\right)x_1^2 + \\ &+ 2\omega^2 c_{12}x_1x_2 + \frac{1}{4}\left(c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + 4\omega^2 c_{22}\right)x_2^2 \end{aligned} \tag{33}$$

Отметим, что если $c_{12} = 0$ то интеграл (33) линейно выражается через интегралы H и Γ

$$F = \frac{a+b}{4} H - \frac{\omega}{2} \Gamma, \quad a = c_{11}, \quad b = c_{22}.$$

Пусть теперь $Q(x) \not\equiv 0$. Тогда, принимая во внимание структуру функции $P(x)$, $Q(x)$, $\phi(x)$, из (22) следует что

$$P = \alpha Q \phi \tag{34}$$

Где α некоторая постоянная. Одноко, как нетрудно показать, из предположения (34) вытикает, что $Q(x) \equiv 0$. Полученное противречие завершает доказательство результата сформулированог в п. 1.

Работа выполнена при подержке Математического Института САНУ, проект No 0402.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pars L. A. *A treatise on analytical dynamics*, Heineman, London, (1965).

[2] Четаев Н. Г. *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике*, Москва, Изд-во АН СССР, (1962).

[3] Иртегов, В. Д., *Гироскопическая стабилизация и бифуркации // Вопросы качественной теории диффереціальных уравнений*, Новосибирск: Наука, (1988), с. 173-179.

[4] Whittaker E. A., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Dover, New York, (1994).

ON GYROSCOPIC INTEGRAL CONTINUATION FROM LINEAR TO NONLINEAR SYSTEM

Problem [3] on continuation of gyroscopic integral [2] from linear to nonlinear seminatural system, having two degrees of freedom, is studied. Nonlinearity is due to potential forces. It is proven that there exist only one class of potentials for which the mentioned integral can be continuated to nonlinear case.

O PRODUŽENJU GIROSKOPSKOG INTEGRALA SA LINEARNOG NA NELINEARNI SISTEM

Razmatra se problem [3] produženja "giroskopskog" integrala [2] sa linearnog na nelinearni poluprirodni sistem sa dva stepena slobode. Nelinearnost potiče od potencijalnih sila. Dokazuje se da postoji samo jedna klasa potencijala za koju se odgovarajući integral produžava na nelinearni slučaj.

Branislav Bulatović
Mašinski fakultet
Univerzitet Crne Gore
81000 Podgorica
Yugoslavia