TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 20, pp 89–93, 1994, UDK 531.36

К ВОПРОСУ О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

А.В. Карапетян

(Поступила 18.10.94.)

При исследовании различных гироскопических систем довольно часто приходится изучать те или иные свойства решений системы дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{x} + \gamma G\dot{x} + Cx = 0 \tag{1}$$

и, в частности, свойство устойчивости нулевого решения системы (1). Здесь x – n – мерный вектор, C – симметрическая, а G – кососимметрическая $n \times n$ – матрицы, γ – параметр, характеризующий интенсивность гироскопических сил.

Хорошо известно (см., напр., [1]), что если потенциальная энергия системы $V = 1/2\, x^T Cx$ (значок T означает транспонирование)

- имеет строгий минимум в начале координат, то нулевое решение системы (1) устойчиво;
- не имеет даже нестрого минимума, то нулевое решение системы (1) неустойчиво при $\gamma = 0$, но может быть устойчивым при $\gamma \neq 0$, если $\det C > 0$, в последнем случае имеет место гироскопическая стабилизация.

Кроме того, известно [2], что если устойчиво нулевое решение прецессионной системы

$$\gamma G\dot{x} + Cx = 0$$

и выполняются некоторые условия типа невырожденности, то при достаточно большом по модулю значении параметра γ нулевое решение системы (1) устойчиво. Нулевое решение прецессионной системы заведомо устойчиво, если потенциальная энергия системы имеет строгий максимум. В этом случае известно [3], что гироскопическая стабилизация осуществляется при условиях $|\gamma| > \gamma_0^*$ и $\det G \neq 0$ (т.е. необходимо n – четно), где

$$\gamma_0^* = \frac{c_+^* g_+^* - 1}{2c_+^* g_-^*} + \left[\left(\frac{c_+^* g_+^* - 1}{2c_+^* g_-^*}\right)^2 + \frac{c_+^* - c^*}{g_-^*}\right]^{1/2}$$

а c_+^* и g_+^* (с и g_-^*) – максимальные (минимальные) собственные значения матриц C и $-GC^2G$ (C и $-G^2$).

Получим в этом же случае более простую и более точную оценку числа γ_0, достаточную для осуществления гироскопической стабилизации (т.е. γ_0 таково, что нулевое решение системы (1) устойчиво при $|\gamma| > \gamma_0$), а также оценку числа $\tilde{\gamma}_0$, необходимую для осуществления гироскопической стабилизации (т.е. $\tilde{\gamma}_0$ таково, что нулевое решение системы (1) неустойчиво при $|\gamma| < \tilde{\gamma}_0$).

Система (1), как известно [3], допускает два первых интеграла: интеграла энергии

$$2V_1 = \dot{x}^T E\dot{x} + x^T Cx = const.$$

(E – единичная $n \times n$ – матрица) и дополнительный

$$2V_2 = \dot{x}^T(C - \gamma^2 G^2)\dot{x} + \gamma x^T CG\dot{x} - \gamma\dot{x}^T CGx + \frac{1}{2}x^T C^2 x = const.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова в виде связки интегралов

$$V = 2V_2 + (c_+ - 3/4\gamma^2 g_-)V_1$$

Здесь и далее $c_{+(-)}$ и $g_{+(-)}$ – максимальные (минимальные) собственные значения матриц $-C$ и $-G^2$.

Очевидно,

$$\begin{aligned}
2V = {} & \dot{x}^T \left(2C - 2\gamma^2 G^2 - 3/4\gamma^2 g_- E + c_+ E\right)\dot{x} + \\
& + 2\gamma x^T CG\dot{x} - 2\gamma\dot{x}^T GCx + x^T\left(2C^2 - 3/4\gamma^2 g_- C + c_+ C\right)x \geq \\
& \geq \dot{x}^T\left(C - 5/4\gamma^2 G^2\right)\dot{x} + 4\gamma(C\dot{x})^T(G\dot{x}) + \\
& (Cx)^T\left(2E + c_+ C^{-1} - 3/4\gamma^2 g_- C^{-1}\right)(Cx)
\end{aligned}$$

поскольку для любого n – мерного вектора ξ справедливы соотношения

$$c_+\xi^T E\xi \geq \xi^T(-C)\xi, \quad g_-\xi^T E\xi \geq \xi^T G^2\xi$$

Далее,

$$\begin{aligned}
2V \geq {} & \dot{x}^T\left[\left(C - 1/4\gamma^2 G^2\right) - G^2\right]\dot{x} + 4\gamma(Cx)^T(C\dot{x}) + \\
& + (Cx)\left(E - 3/4\gamma^2 g_- C^{-1}\right)(Cx)
\end{aligned}$$

поскольку

$$c_+\xi^T C^{-1}\xi \geq -c_+\frac{1}{c_+}\xi^T E\xi = -\xi^T E\xi$$

Предположим, что $\gamma^2 \geq 4c_+/g_-$. Тогда

$$\xi^T\left(C - \frac{\gamma^2}{4}G^2\right)\xi > 0 \quad \xi \neq 0$$

и, следовательно,

$$2V \geq \gamma^2 \dot{x}^T \left(-G^2\right) \dot{x} + 4\gamma (Cx)^T (G\dot{x}) + (Cx)^T \left(E - 3/4\gamma^2 g_- C^{-1}\right)(Cx) \geq$$
$$\geq \gamma^2 (G\dot{x})^T (G\dot{x})^T + 4\gamma (Cx)^T (G\dot{x}) + \left(1 + 3/4\gamma^2 g_-/c_+\right)(Cx)^T (Cx) \equiv$$
$$\equiv W(y,z); \quad y = G\dot{x}, \quad z = Cx$$

Если функция $W(y,z)$ определенно–положительна по переменным y, z, то функция $V(\dot{x}, x)$ определенно–положительна по переменным $\dot{x}$, x, так как $2V(\dot{x}, x) \geq W(G\dot{x}, Cx)$, а система

$$G\dot{x} = 0, \quad Cx = 0$$

имеет только нулевое решение. Функция $W(y,z)$ представляет собой сумму n квадратичных двучленов относительно y_s и z_s одного и того же типа:

$$W(y,z) = \sum_{s=1}^{n} \left[\gamma^2 y_s^2 + 4\gamma y_s z_s + \left(1 + 3/4\gamma^2 g_-/c_+\right) z_s^2\right]$$

Следовательно, функция $W(y,z)$ определенно положительна при условии

$$\Delta = \gamma^2 \left(1 + 3/4\gamma^2 g_-/c_+\right) - 4\gamma = \frac{3\gamma^2 g_-}{4c_+}\left(\gamma^2 - 4\frac{c_+}{g_-}\right) > 0$$

которое заведомо выполняется, если $\gamma^2 > 4\dfrac{c_+}{g_-}$.

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. Если потенциальная энергия $V = \frac{1}{2}x^T Cx$ гироскопической системы (1) имеет максимум в начале координат и определитель $detG$ матрицы гироскопических сил отличен от нуля, то нулевое решение системы устойчиво при условии

$$\gamma^2 \geq \gamma_0^2 = 4\frac{c_+}{g_-} \tag{2}$$

Оценим теперь значение $\tilde{\gamma}_0$, необходимое для осуществления гироскопической стабилизации, предполагая что не зависящая от импульсов часть H_0 функции Гамильтона, соответствующей лагранжиану

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}E\dot{x} - \frac{1}{2}\gamma\dot{x}^T Gx - \frac{1}{2}x^T Cx$$

исходной системы (1), имеет максимум в начале координат (при этом, необходимо, потенциальная энергия V также имеет максимум в начале координат). В этом случае нулевое решение системы неустойчиво согласно результатам [4], [5].

Вычисляя H_0, получим, что функция

$$H_0 = \frac{1}{2}x^T \left(\frac{\gamma^2}{4}G^2 + C\right)x$$

имеет максимум в начале координат, если все собственные значения матрицы $C - \gamma^2/4G^2$ отрицательны. Последнее заведомо имеет место, если $\gamma^2 \le 4c_-/g_+$. Таким образом, справедливо

Утверждение 2. Если потенциальная энергия $V = \frac{1}{2}x^T Cx$ гироскопической системы имеет максимум в начале координат, то нулевое решение системы неустойчиво при условии

$$\gamma^2 \le \tilde{\gamma}_0^2 = \frac{4c_-}{g_+} \tag{3}$$

Замечание 1. При выполнения соотношения (3) неустойчивость нулевого решения системы (1) сохраняется, если в правые части этой системы добавить члены, нелинейные по $\dot{x}$, x. При выполнении соотношения (2) устойчивость нулевого решения системы (1) сохраняется, если добавлемые в правые части нелинейные по $\dot{x}$, x члены не препятствуют аналитическому продолжению первых интегралов V_1 и V_2 линейной системы на нелинейную. Отметим, что если систеема (1) представляет собой линеаризованную систему уравнений движения консервативной ненатуральной системы, то интеграл V_1 заведомо имеет аналитическое продолжение, чего нельзя сказать (в общем случае) об интеграле V_2.

Замечание 2. Величины γ_0 и $\tilde{\gamma}_0$ совпадают, если C и G^2 – шаровые матрицы, т.е. если $c_+ = c_-$, $g_+ = g_-$ (см. (2), (3)); величина γ_0^* [3] совпадает с величиной $\tilde{\gamma}_0$ только в том случае, когда выполняются еще какие-либо дополнительные условия.

Пример. Рассмотрим известную задачу об устойчивости вращательных движений симметричного снаряда, летящего по весьма настильной траектории.

Сохраняя обозначения [1], выпишем кинетическую (T) и потенциальную (V) энергии:

$$T = \frac{1}{2}B\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}A\left(\dot{\omega} + \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2$$
$$V = a\,\cos\alpha\,\cos\beta$$

Здесь A – осевой, B – экваториальный моменты инерции снаряда, a – положительная постоянная, α, β, и ω – обобщенные координаты системы.

Игнорируя циклическую координату ω, выпишем уравнения движения приведенной по Раусу системы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial\dot{\alpha}} = \frac{\partial R}{\partial\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial\dot{\beta}} = \frac{\partial R}{\partial\beta} \tag{4}$$

где $R = R_2 + R_1 + R_0$ – функция Рауса.

$$R_2 = \frac{1}{2}B\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\,\cos^2\alpha\right), \quad R_1 = Ap\dot{\beta}\sin\alpha, \quad R_0 = a(1 - \cos\alpha\,\cos\beta)$$

(Ap – постоянная циклического интеграла $\dfrac{\partial T}{\partial \dot\omega} = const.$).

Нулевому равновесию приведенной системы отвечает стационарное движение

$$\alpha = \beta = 0, \quad \dot\alpha = \dot\beta = 0, \quad \dot\omega = p \tag{5}$$

исходной. Линеаризованные уравнения (4)

$$\ddot\alpha - pA/B\,\dot\beta - a/B\,\alpha = 0, \quad \ddot\beta + pA/B\,\dot\alpha - a/B\,\beta = 0$$

имеют вид (1), где ($n = 2$)

$$G = \begin{Bmatrix} 0 & -A/B \\ A/B & 0 \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} -a/B & 0 \\ 0 & -a/B \end{Bmatrix}, \quad \gamma = p$$

Вычисляя величины $g_\pm$ и $c_\pm$, получим

$$g_+ = g_- = \frac{A^2}{B^2}; \quad c_+ = c_- = \frac{a}{B}$$

Следовательно, $\gamma_0^2 = \tilde\gamma_0^2 = \dfrac{4B\alpha}{A^2}$, т.е. при $p^2 > \dfrac{4Ba}{A^2}$ стационарное движение (5) устойчиво, и при $p^2 > \dfrac{4Ba}{A^2}$ – неустойчиво. Отметим, что оба этих свойства сохраняются и в силу полных уравнений (4), поскольку в данной задаче оба интеграла V_1 и V_2 имеют аналитическое продолжение.

Вычисляя γ_0^*, получим

$$\gamma_0^* = \frac{A^2a^3 + B^5}{aA^2B^2} \geq \gamma_0 = \tilde\gamma_0 = \frac{\sqrt{4Ba}}{A}$$

причем равенство достигается только при условии $A^2a^3 = B^5$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Четаев, Н. Г., *Устойчивость движения*, Работы по аналитической механике М., Изд-во АН СССР (1962).

[2] Меркин, Д. Р., *Гироскопические системы*, М.: Наука (1974).

[3] Лахаданов, В. М., *О стабилизации потенциальных систем*, ПММ, **39** (1975), 53–59.

[4] Пожарицкий, Г. К., *О неустойчивости движения консервативных голономных систем*, ПММ, т.**20** (1956), 429—433.

[5] Карапетян, А. В., *Об обращении теоремы Рауса*, Вестн. МГУ Мат., мех., **5** (1973), 65–69.

TO THE PROBLEM OF GYROSCOPIC STABILIZATION

The stability of equilibria of gyroscopic systems is considered. The conditions of stability and instability in the case of maximum of potential energy are obtained. The general results are illustrated with mechanical example.

А.В. Карапетян
Российская Академия Наук
Вычислительный Центр
117967 Москва ГСП-1
ул. Вавилова, 40
Россия