TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 20, pp 37–42, 1994, UDK 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Р.М. Булатович

(Поступила 1.11.94.)

Рассмотрим голономную склерономную механическую систему с N степенями свободы. Уравнения движения системы под действием консервативных сил запишем в известной форме уравнений Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=0, \quad \mathbf{q}\in\Omega \quad - \text{област в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$
$$L(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}})=T(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}})-P(\mathbf{q}),$$

где $T = \frac{1}{2}\langle K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},\,\dot{\mathbf{q}}\rangle$ – кинетическая энергия ($K(\mathbf{q})$ – симметричная положительно – определенная $(N\times N)$ матрица, $<\ .,.\ >$ – обычное скалярное произведение) и $P(\mathbf{q})$ – потенциальная энергия. Будем считать, что $L\in C^s\left[\Omega\times\mathbb{R}^N,\,\mathbb{R}\right]$, $s\geq 2$. Пусть точка $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ – положение равновесия системы, т.е. $\partial P/\partial\mathbf{q}(0)$. Знаменитая теорема Лагранжа – Дирихле утверждает, что равновесие $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ устойчиво, если $P(\mathbf{0})$ – строгий локальный минимум функции $P(\mathbf{q})$. Существование минимума потенциала P, как показывает контрпример Пенлеве – Уинтнера, является лишь достаточным, но не необходимым условием устойчивости. Возникает вопрос назван задачей "обращения" теоремы Лагранжа – Дирихле: по каким особенностям функции P можно судить о неустойчивости? В этом направлении было получено много результатов. Содержащийся в [1] обзор исследованний, относящихся к этой задаче, в настоящее время можно дополнить работами [2]–[11].

Пусть $\partial^2 P/\partial\mathbf{q}^2(0)$ – ненулевая матрица. С точки зрения результата Ляпунова [1] целесообразно рассматривать системы, для которых

$\partial^2 P/\partial\mathbf{q}^2(0)$ положительно полуопределенная матрица. Без нарушения общности будем предпологать, что система записана в нормальных координат, т.е. $K(0)=I$ – единичная и $\partial^2 P/\partial\mathbf{q}^2(0)$ – диагональная матрицы. Предположим, что в нормальных координатах потенциальную энергию P можно представить в виде

$$P(\mathbf{q})=\tfrac{1}{2}\langle C(\mathbf{q})\mathbf{x},\,\mathbf{x}\rangle+P_k(\mathbf{q})+W(\mathbf{q}),\ \mathbf{q}=(\mathbf{x},\,\mathbf{y}), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $m + n = N$, $C(\mathbf{q})$ – $(m \times m)$ матрица, $C(0) = D = diag(\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2)$, P_k – однородная форма степени $k \geq 3$ и $W(\mathbf{q}) = O\left(|(\mathbf{q})|^{k+1}\right)$.

В [2] неустойчивость была доказана в случае, когда $C(\mathbf{q}) \equiv D$, $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ принимает отрицательные значения и L принадлежит классу C^∞. В [8] последнее условие устранено при помощи дополнительного предположения. В аналитическом случае, в работах [9], [10] получены более сильные утверждения. Наконец, в [11] была доказана неустойчивость при следующих предположений:

1° $s \geq k + 3$;

2° $min\,\{P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y}), |\mathbf{y}| = 1\} < 0$;

3° $C(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = D + O\left(|\mathbf{y}|^{[(k-1)/2]}\right), \quad A(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = I + O\left(|\mathbf{y}|^{[(k+1)/2]}\right)$,

где $A = K_{\alpha,\alpha} - K_{\alpha,\beta}K_{\beta,\beta}^{-1}K_{\beta,\alpha}$, $K_{\alpha,\alpha}, \ldots, K_{\beta,\beta}$ $(\alpha = \{1, \ldots, m\}$, $\beta = \{m + 1, \ldots, N\})$ – блочное рабиение матрицы K.

Ниже для потенциалов вида (2) получаются более сильные утверждения, в частности, показывается, что условие 1° можно ослабит и отказаться от условия 3°. Вспомогательная функция с помощью которой устанавливается неустойчивость подобна функции впервые использованой в [3].

Теорема 1. Если потенциальная энергя имеет вид (2) и выполнены предположения

(1) $k < s$;

(2) точка $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ не является точкой минимума функции $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y})$;

то состояние равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ неустойчиво.

Доказательство. Достаточно доказать неустойчивость состояния равновесия на инвариантном многообразии $H_o = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{y}) = 0\}$. Следовательно, можно попытаться найти вспомогательную функцию $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ удовлетворяющую на H_o условиям теоремы Н.Г. Четаева.

Рассмотрим уравнение

$$\langle K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}\rangle + \langle C(\mathbf{q})\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2P_k(\mathbf{q}) + 2W(\mathbf{q}) = 0 \tag{3}$$

Так как

$$K(\mathbf{0}) = I, \quad C(\mathbf{0}) = diag\left(\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2\right), \quad W(\mathbf{q}) = O\left(|\mathbf{q}|^{k+1}\right), \quad P_k(\mathbf{q}) \geq \lambda|\mathbf{q}|^k,$$

где $\lambda = min\{P_k(\mathbf{q}), |\mathbf{q}| = 1\} < 0$, из равенства (3) получаем, во–первых, что

$$|\mathbf{x}|_{H_o} \leq \left(\frac{-2\lambda}{\mu}\right)^{1/2} |\mathbf{q}|^{k/2}(1 + o(1)) \tag{4}$$

потому что

$$\langle C(\mathbf{q})\mathbf{x},\,\mathbf{x}\rangle \geq \mu\,(1-\delta_1(\mathbf{q}))\,|\mathbf{x}|^2, \quad \text{где} \quad \mu = min\left(\omega_i^2\right) \quad \text{и} \quad 0 \leq \delta_1(\mathbf{q}) = o(1)$$

и, во – вторых, что

$$|\dot{\mathbf{q}}|_{H_o} \leq (-2\lambda)^{1/2}|\mathbf{q}|^{k/2}\,(1+o(1)) \tag{5}$$

потому что

$$\langle K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},\,\dot{\mathbf{q}}\rangle \geq (1-\delta_2(\mathbf{q}))\,|\dot{\mathbf{q}}|^2, \quad 0 \leq \delta_2(\mathbf{q}) = o(1).$$

В качестве вспомогательной функции возьмем

$$V(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}}) = \langle K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},\,\mathbf{q}\rangle - f(\mathbf{q}), \tag{6}$$

$$\text{где} \quad f(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|^{1+k/2}\left[1-2c^{-2}|\mathbf{q}|^{\alpha}\right]^{1/2},$$

$$\alpha \in]0,1[\quad \text{и} \quad 0 < c < (-2min\{P_k(\mathbf{0},\,\mathbf{y}),\,|\mathbf{y}|=1\})^{1/2}.$$

Из одного утверждения ([12], лемма 4) следует, что в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ имеет место неравенство

$$\left[\left(1+\frac{k}{2}\right)\langle K\dot{\mathbf{q}},\,K\dot{\mathbf{q}}\rangle - \left\langle\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}},\,K\dot{\mathbf{q}}\right\rangle\right]_{V+} > |\mathbf{q}|^{k+\alpha}, \tag{7}$$

где

$$V^+ = \{(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}}) : V\,(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}}) > 0\}\,.$$

Подставляя $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = u\mathbf{e}$, $\dot{\mathbf{q}} = pK^{-1}(\mathbf{0},\,u\mathbf{e})(\mathbf{0},\,\mathbf{e})$, где $u,p \in \mathbb{R}$ и $P_k(\mathbf{0},\,\mathbf{e}) = min\,\{P_k(\mathbf{0},\,\mathbf{y}),\,|\mathbf{y}| = 1\}$, в уравнение (3) получим неравенство

$$|p| \geq (-2P_k(\mathbf{0},\,\mathbf{e}))^{1/2}\,|u|^{k/2}(1+o(1)),$$

в соответствии с которым

$$V\,(\mathbf{x}=\mathbf{0},\,\mathbf{y}=|u|\mathbf{e},\,\dot{\mathbf{q}} = |p|K^{-1}(\mathbf{0},\,|u|\mathbf{e})(\mathbf{0},\,\mathbf{e})) \geq$$
$$\geq \left((-2P_k(\mathbf{0},\,\mathbf{e}))^{1/2} - c\right)|u|^{1+k/2}(1+o(1)).$$

Следовательно, для каждого $\eta \in]0,\,\epsilon[$, где ϵ – достаточно мало, существуют точки $(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}}) \in H_o$ такие, что $|\mathbf{q}| + |\dot{\mathbf{q}}| < \eta$ и $V(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}}) > 0$.

Для производной по времени вспомогательной функции (6) в силу системы (1), (2) получаем выражение

$$\dot{V} = \langle K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},\,\dot{\mathbf{q}}\rangle - \left\langle\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}},\,\dot{\mathbf{q}}\right\rangle - \langle B(\mathbf{q})\mathbf{x},\,\mathbf{x}\rangle - kP_k(\mathbf{q}) -$$
$$\left\langle\mathbf{q},\,\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right\rangle + \langle\mathbf{q},\,\mathbf{R}(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}})\rangle\,, \tag{8}$$

где $B(\mathbf{0}) = D$ и $\mathbf{R}(\mathbf{q},\,\dot{\mathbf{q}})$ – некоторый набор N квадратичных форм по $\dot{\mathbf{q}}$. Подставляя P_k из (3) в (8) и используя равенство $I + \overline{K}(\mathbf{q})$, $\overline{K}(\mathbf{q}) = O(|\mathbf{q}|)$, на основании (4), (5) и условия 1) теоремы, выражению (8) можно придать форму

$$\dot{V} = \left(1 + \frac{k}{2}\right) \langle K\dot{\mathbf{q}},\, K\dot{\mathbf{q}}\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}},\, K\dot{\mathbf{q}}\right\rangle + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \langle D\mathbf{x},\, \mathbf{x}\rangle + O\left(|\mathbf{q}|^{k+1}\right).$$

Учтывая теперь неравенство (7) и неотрицательность формы $\langle D\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ заключаем, что для всех $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in H_o$, таких, что $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$, в достаточно малой окрестности состояния равновесия справедливо неравенство

$$\dot{V} > |\mathbf{q}|^{k+\alpha}(1 + o(1)).$$

Таким образом, на многообразии H_o выполняются условия теоремы Н. Г. Четаева [13]. Теорема доказана.

Теорема 2. Если в теореме 1 условие 2) заменить условием 2-б) $-P_k(0, \mathbf{y})$ – положительно определенная форма;

то состояние равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ устойчиво.

Доказательство. Посредством нелинейной замены координат

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + X(\overline{y}) \\ y &= \overline{y} \end{aligned} \tag{9}$$

где фунция $X(\overline{y}) \in C^{s-1}$ определятся из уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial x}(X(\overline{y}), \overline{y}) = 0,$$

потенциальная энергия (2) принимает вид

$$\overline{P}(\overline{x}, \overline{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \langle \overline{x},\, \overline{C}(\overline{x}, \overline{\mathbf{y}})\overline{x}\rangle + \overline{P}_k(\overline{\mathbf{y}}) + \overline{W}(\overline{\mathbf{y}}),$$

где $\overline{C}(\mathbf{0}, 0) = D$, $\overline{P}_k(\overline{\mathbf{y}}) = P_k(\mathbf{0}, \overline{\mathbf{y}})$ и $\overline{W}(\overline{\mathbf{y}}) = O\left(|\overline{\mathbf{y}}|^{k+1}\right)$. Следовательно, $\overline{P}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ – строгий локальный минимум функции $\overline{P}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ и применима теорема Лагранжа – Дирихле.

Таким образом, для потенциалов (2) остается открытым лишь один вопрос: что будет, если $P_k(0, \mathbf{y})$ – положительно полуопределенная форма? В этом случае имеет место следующий частный результат.

Теорема 3. Предположим, что функция $P(\mathbf{q})$ такая же, как в (2) и $W(\mathbf{q}) = P_{k+1}(\mathbf{q}) + O\left(|\mathbf{q}|^{k+2}\right)$. Если $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ – положительно полуопределенная форма, $k < s - 1$ и форма $P_{k+1}(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ не исчезает на множестве нулей формы $P_k(0, \mathbf{y})$, то состояние равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Потенциальная энергия $P(\mathbf{q})$ после замены переменных (9) принимает вид

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \langle \overline{x},\, \overline{C}(\overline{x}, \overline{\mathbf{y}})\overline{x}\rangle + \overline{P}_k(\overline{\mathbf{y}}) + \overline{P}_{k+1}(\overline{\mathbf{y}}) + O\left(|\overline{\mathbf{y}}|^{k+2}\right),$$

где $\overline{C}(0, 0) = D$, $\overline{P}_k(\overline{\mathbf{y}}) = P_k(0, \overline{\mathbf{y}})$, $\overline{P}_{k+1}(\overline{\mathbf{y}}) = P_{k+1}(0, \overline{\mathbf{y}})$. В дальнейшем доказательство подобно доказательству теоремы 1.

Работа вйполнена при поддржке Математического института САНУ, проект N_o 0402.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карапетян, А. В., Румянцев В. В. *Устойчивость консервативных и диссипативных систем*, Москва, (1983).

[2] Козлов, В. В., *Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа - Дирихле*, ПММ **50(4)** (1986), 928–937.

[3] Сосницкий, С. П., *О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем*, Укр. мат. журн., **31(1)** (1985), 124–127.

[4] Moauro, V., Negrini, P. *On the inversion of Lagrange-Dirihlet theorem*, Diff. and Int. Equat., **2** (1989), 471–478.

[5] Пайффер, К., *Об обращении теоремы Лагранжа-Дирихле*, ПММ, **55(4)** (1991), 548–554.

[6] Taliaferro, S. D., *Instability of an equilibrium in a potential field*, Arch. Ration. Mech. Anal., **109** (1990), 183–194.

[7] Козлов, В. В., *Устойчивость периодических трайекторий и многочлены Чебышева*, Вестн. Моск. Ун–та. Сер. 1, **5** (1991), 7–13.

[8] Сосницкий, С. П., *О неустойчивости равновесия натуральных систем*, Зад. исслед. уст. и стаб. движ., (1991), 48–61.

[9] Bulatović, R., *On the converse of Lagrange- Dirichlet theorem*, C.R. Acad. Sci. Paris, **315** (1992), 1–6.

[10] Булатович, Р., *Замечания о асимптотических движениях механических систем*, ПММ, **57(4)** (1993), 135–137.

[11] Maffei, V., Moauro, V., and Negrini, P. *On the inversion of Lagrange-Dirihlet theorem in a case of nonhomogeneous potential*, Diff. and Int. Equat., **4** (1991), 767–782.

[12] Булатович, Р. М., *Одно обращение теоремы Рауса*, Т. П. Механика, **17** (1991), 31–36.

[13] Rouche, N., Habets, P., Laloy, M. *Stability theory by Lyapunov's direct method*, New–York, Hidelberg, Berlin, (1977).

STATE EQUILIBRIUM STABILITY OF CONSERVATIVE SYSTEMS IN ONE PARTICULAR CASE

Conservative holonomic system, whose potential energy $P \in C^s$, $s \geq 2$, in normal coordinates is: $P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\langle C(\mathbf{q})\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + P_k(\mathbf{q}) + W(\mathbf{q})$, where $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $C(\mathbf{0}) = diag\left(\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2\right)$, $P_k(\mathbf{q})$ homogeneous polynomial of degree k, $k < s$ and $W(\mathbf{q}) = O\left(|\mathbf{q}|^{k+1}\right)$ is studied. In a case when function $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ has not minimum (has strict minimum) in $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, stability (instability) of the state of equilibrium $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ is proved. This statement, in a case when $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \geq 0$, is completed with one aditional instability criterion.

STABILNOST RAVNOTEŽNOG STANJA KONZERVATIVNIH SISTEMA U JEDNOM POSEBNOM SLUČAJU

Razmatra se konzervativni holonomni sistem čija se potencijalna energija $P \in C^s$, $s \geq 2$, u normalnim koordinatama može zapisati u obliku: $P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\langle C(\mathbf{q})\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + P_k(\mathbf{q}) + W(\mathbf{q})$, gde su: $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $C(\mathbf{0}) = diag\,(\omega_1^2, \ldots, \omega_m^2)$, $P_k(\mathbf{q})$ – homogeni polinom stepena k, $k < s$ i $W(\mathbf{q}) = O\left(|\mathbf{q}|^{k+1}\right)$. Dokazuje se da ako funkcija $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y})$ nema minimum (ima strogi minimum) u tački $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, onda je ravnotežno stanje $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ nestabilno (stabilno). Ovo tvrđenje se dopunjuje jednim kriterijumom nestabilnosti, koji obuhvata slučajeve kada je $P_k(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \geq 0$.

Ранислав Булатовић
Машински факултет
81000 Подгорица
Југославија