TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 20, pp 253–258, 1994, UDK 531.01

РЕАЛИЗУЕМА ЛИ КОНСЕРВАТИВНАЯ ОБРАТИМАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КАК НЕГОЛОНОМНАЯ ?

Я.В. Татаринов

(Поступила 18.10.94.)

Обсуждаются характерные черты уравнений движения консервативных склерономных неголономных систем: хорошо известно, что если у движения на многообразии положений обратить время, то получится снова движение (если силы зависят только от положения). Более того, производные локальных координат не просто нечетные, а линейные функции квазискоростей, а производные этих последних -не просто четные, а квадратичные функции. Кроме того, имеется интеграл энергии, выражение которого квадратично по скоростям. Вопрос (С.В. Болотин): среди всех возможных систем с такими свойствами как часто встречаются именно те, что описывают какую-то неголономную систему ?

Автор не пользуется соглашениями тензорного анализа, но если стоит знак суммирования, то идет оно по повторяющемуся индексу.

0. Напоминание

В классической теории консервативных неголономных систем имеется многообразие положений с локальными координатами x_i, затем задается кинетическая энергия $T = \sum\sum a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j$ на всем касательном пространстве, затем потенциальная энергия $V(x)$ и наконец уравнения связей. Без учета связей введем псевдоскорости

$$\dot{x}_i = \sum э_{ij}(x)\, v_j. \tag{1}$$

Тогда $T = \dfrac{1}{2}\sum\sum g_{ij}(x)v_iv_j$.

Замена (1) равносильна заданию подвижного репера

$$э_j = \sum э_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Как известно, производная функции $\Psi(x)$ вдоль поля $э_j$ имеет вид $э_j(\Psi) = \sum э_{ij} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_i}$. Скобки Ли $[э_i,\, э_j]$ действуют на функцию Ψ по правилу

$$[э_i,\, э_j](\Psi) = э_j(э_i(\Psi)) - э_i(э_j(\Psi)).$$

Разложим их снова по тому же реперу. Получим

$$[э_i,\, э_j] = \sum \begin{bmatrix} l & \\ i & j \end{bmatrix} э_l,$$

где

$$\sum э_{kl} \begin{bmatrix} l & \\ i & j \end{bmatrix} = \sum \left\{ э_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (э_{ki}) - э_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (э_{kj}) \right\}. \tag{3}$$

Примем соглашение об индексах. Здесь и ниже

$$i, j, k, \alpha = 1, \dots, n, \quad \lambda, \mu, \nu, \varrho = 1, \dots, m, \quad s, r = m+1, \dots, n.$$

Будем считать теперь, что псевдоскорости v_i введены так, что уравнения связей обязательно получат вид

$$v_s = 0. \tag{4}$$

На связи $T = T^* = \dfrac{1}{2} \sum\sum g_{\lambda\mu}\, v_\lambda v_\mu$. Положим $\left\|h^{\lambda\mu}\right\| = \|g_{\lambda\mu}\|^{-1}$,

$$2\Gamma_{\varrho\mu\nu} = [э_\mu (g_{\varrho\nu}) + э_\nu (g_{\varrho\mu}) - э_\varrho (g_{\mu\nu})] - \sum \left(\begin{bmatrix} i & \\ \varrho & \mu \end{bmatrix} g_{i\nu} + \begin{bmatrix} i & \\ \varrho & \nu \end{bmatrix} g_{i\mu} \right), \tag{5}$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \sum h^{\kappa\varrho} \Gamma_{\varrho\mu\nu}, \tag{6}$$

$$F^\kappa = -\sum h^{\kappa\varrho} э_\varrho(V). \tag{7}$$

Тогда уравнения движения неголономной системы будут

$$\dot{x}_i = \sum э_{ik} v_k, \quad \dot{v}_\lambda = -\sum\sum \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, v_\mu\, v_\nu + F^\lambda. \tag{8}$$

Это выводится с помощью принципа Даламбера–Лагранжа: у движения со скоростью, лежащей в плоскости связи, разность между ускорением (в метрике $\sum\sum a_{ij}(x)\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j$) и силой $F = -\operatorname{grad} V$ должна быть ортогональна плоскости связи.

Интеграл энергии имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum\sum g_{\lambda\mu}\, v_\lambda v_\mu + V. \tag{9}$$

Относительно исторических сведений и литературы по этой теме см. [1]–[6].

1. Исходные определения

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{u} = g(x, u)\ .$$

называется обратимой [7], если

$$f(x,-u) = -f(x,u)\,, \quad g(x,-u) = g(x,u).$$

Если $x(t)$, $u(t)$ – ее решение, то $x(-t)$, $-u(-t)$ – тоже решение.

Впредь рассматриваем обратимые системы такого вида:

$$\dot{x}_i = \sum \text{э}_{i\mu}(x)\,u_\mu, \quad \dot{u}_\lambda = -\sum\sum G^\lambda_{\mu\nu}(x)\,u_\mu u_\nu + f^\lambda(x) \tag{10}$$

считая, что

$$i = 1,\ldots,n, \quad \lambda,\mu,\nu = 1,\ldots,m, \quad \text{rang}\|\text{э}_{i\lambda}\| = m \le n, \quad G^\lambda_{\mu\nu} = G^\lambda_{\nu\mu}.$$

Считаем, что имеет место интеграл вида

$$H = \frac{1}{2}\sum\sum g_{\lambda\mu}(x)\,u_\lambda u_\mu + V(x), \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}, \quad \text{rang}\|g_{\lambda\mu}\| = m \tag{11}$$

(консервативность), что равносильно требованиям

$$\sum g_{\lambda\mu}\,f^\mu = -\sum \text{э}_{i\lambda}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{12}$$

$$2\sum\left(g_{\lambda\varrho}\,G^\varrho_{\mu\nu} + g_{\mu\varrho}\,G^\varrho_{\nu\lambda} + g_{\nu\varrho}\,G^\varrho_{\lambda\mu}\right) = \sum\left[\text{э}_\lambda\left(g_{\mu\nu}\right) + \text{э}_\mu\left(g_{\nu\lambda}\right) + \text{э}_\nu\left(g_{\lambda\mu}\right)\right]. \tag{13}$$

Здесь, как и в п.О, введены векторные поля $\text{э}_\lambda = \sum \text{э}_{i\lambda}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

2. Вопрос

Как среди систем (10) выделить такие, что отвечают консервативной неголономной системе ?

Условие (12) равносильно (7), мы считаем его выполненным. Принимаем также, что матрица $g_{\lambda\mu}$ положительно определена. Поля э_λ как-нибудь дополним полями э_s до подвижного репера. Поставленный вопрос равносилен следующему: существуют ли такие $g_{s\lambda}(x)$, что $G^\lambda_{\mu\nu}$ получаются по формулам (6–5)? Важно, что от g_{rs} названные формулы вообще не зависят: если $g_{s\lambda}$ найдены, то всегда можно подобрать g_{rs} так, что полная матрица коэффициентов g_{ij} будет положительно определена.

3. Решающая система линейных уравнений

Сейчас под $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ будем понимать функции, получающеся из (6–2) при $g_{s\lambda} = 0$. Как и заданные $G^\lambda_{\mu\nu}$, они симметричны по μ, ν и удовлетворяют (13) с теми же правыми частями. Положим

$$\gamma_{\lambda\mu\nu} = 2\sum g_{\lambda\varrho}\left(G^\varrho_{\mu\nu} - \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\right). \tag{14}$$

Вместо (5) имеем

$$\sum \begin{bmatrix} s & \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} g_{s\nu} + \sum \begin{bmatrix} s & \\ \lambda & \nu \end{bmatrix} g_{s\mu} = \gamma_{\lambda\mu\nu}. \tag{15}$$

Как ни выбирать $g_{s\lambda}$, формулы (15) всегда дадут $\gamma_{\lambda\mu\nu}$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_{\lambda\mu\nu} = \gamma_{\lambda\nu\mu}, \tag{16}$$

$$\gamma_{\lambda\mu\nu} + \gamma_{\nu\lambda\mu} + \gamma_{\mu\nu\lambda} = 0, \tag{17}$$

(В частности, $\gamma_{\lambda\lambda\lambda} = 0$.). Нам же надо искать решение $g_{s\lambda}$ у системы (15) с $\gamma_{\lambda\mu\nu}$, вычисленными согласно (14). Поэтому из системы (15) достаточно отобрать те уравнения, которые отвечают $\gamma_{\lambda\mu\nu}$, независимым в смысле (16), (17). Например, таким:

$$\begin{array}{lll} \gamma_{\lambda\mu\lambda}, \gamma_{\mu\lambda\mu}; & \lambda < \mu & - \text{всего } m(m-1) \\ \gamma_{\lambda\mu\nu}, \gamma_{\mu\lambda\nu}; & \lambda < \mu < \nu & - \text{всего } m(m-1)(m-2)/3. \end{array}$$

Ниже считаем, что $\lambda < \mu < \nu$. Теперь в системе (15) с $m(n-m)$ неизвестными $g_{s\lambda}$ имеем $\left(m^3 - m\right)/3$ уравнений.

Введем векторы-строки $[\lambda\,\mu] = \left\{\begin{bmatrix} s & \\ \lambda & \mu \end{bmatrix}\right\}$ и векторы-стобцы $g_\mu = \{g_{s\mu}\}$. Вместо (15) имеем

$$\begin{aligned} [\lambda\mu] g_\lambda &= \gamma_{\lambda\mu\lambda} \\ -[\lambda\mu] g_\mu &= \gamma_{\mu\lambda\mu} \\ [\lambda\nu] g_\mu + [\lambda\mu] g_\nu &= \gamma_{\lambda\mu\nu} \\ [\mu\nu] g_\lambda - [\lambda\mu] g_\nu &= \gamma_{\mu\lambda\nu}. \end{aligned} \tag{18}$$

Лемма. *Если векторы $[\lambda\mu]$ линейно независимы, то ранг нашей системы максимален: $R = \left(m^3 - m\right)/3$.*

Действительно, поищем нетривиальные линейные комбинации строк ее матрицы, равные нулю. Для этого уравнения (18) умножим соответственно на числа $\kappa_{\lambda\mu}$, $\kappa_{\overline{\lambda\mu}}$, $\kappa_{\lambda\mu\nu}$, $\kappa_{\overline{\lambda\mu\nu}}$ и сложим. Нулями должны оказаться коэффициенты при всех g_ϱ:

$$\sum \kappa_{\varrho\mu}[\varrho\mu] - \sum \kappa_{\overline{\lambda\varrho}}[\lambda\varrho] + \\ + \sum\sum \kappa_{\lambda\varrho\nu}[\lambda\nu] + \sum\sum \kappa_{\overline{\varrho\mu\nu}}[\mu\nu] + \\ + \sum\sum \left(\kappa_{\lambda\mu\varrho} - \kappa_{\overline{\lambda\mu\varrho}}\right)[\lambda\mu] = 0. \tag{19}$$

Подразумевается, что индексы везде строго возрастают. Получилось m нулевых линейных комбинаций $m(m-1)/2$ векторов-строк $[\lambda\mu]$. При фиксированном ϱ эти векторы в (19) не повторяются. Поэтому

$$\kappa_{\varrho\mu} = \kappa_{\overline{\lambda\varrho}} = \kappa_{\lambda\varrho\nu} = \kappa_{\overline{\varrho\mu\nu}} = 0, \tag{20}$$

$$\kappa_{\lambda\mu\varrho} = \kappa_{\overline{\lambda\mu\varrho}}. \tag{21}$$

Пройдя по всем ϱ, видим из (20), что все коэффициенты – нули.

Необходимое условие независимости векторов $[\lambda\mu]$ таково:

$$m(m-1)/2 \leq n-m. \tag{22}$$

Впредь считаем его выполненным. Тогда $(m^3-m)/3 < m(n-m)$.

4. Теорема о реализации консервативной обратимой системы

Дано (22). Без уменьшения общности считаем, что $\det\|\text{э}_{\lambda\mu}\| \neq 0$. *Образуем набор векторов-столбцов (по-прежнему* $\lambda < \mu$*)*

$$(\lambda\mu) = \{\text{э}_\mu(\text{э}_{s\lambda} - \text{э}_\lambda(\text{э}_{s\mu})\}. \tag{23}$$

Если этот набор линейно независим, то существует консервативная неголономная система, описываемая (10), (11).

Доказательство: векторы $(\lambda\mu)$ удлиним до $((\lambda\mu))$, написав в (23) i вместо s. Матрицу $\text{э}_{\lambda\mu}$ дополним до квадратной простейшим образом:

$$\|\text{э}_{ij}\| = \begin{bmatrix} \|\text{э}_{\lambda\mu}\| & 0 \\ \|\text{э}_{s\mu}\| & \|\delta_{sr}\| \end{bmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид

$$\left\|\text{э}^{ij}\right\| = \begin{bmatrix} \|\text{э}_{\lambda\mu}\|^{-1} & \|\text{э}^{\mu s}\| \\ 0 & \|\delta_{sr}\| \end{bmatrix}.$$

Соотношения (3) можно равносильно записать в виде

$$[[\lambda\mu]] = \left\|\text{э}^{ij}\right\|((\lambda\mu))$$

где $[[\lambda\mu]]$ – удлинение $[\lambda\mu]$ с заменой вектора-строки на вектор-столбец. Учитывая подбор матрицы $\left\|\text{э}^{ij}\right\|$, видим, что $[\lambda\mu] = (\lambda\mu)$, и применяем лемму.

Следствия. При $m=2$ (система имеет две степени свободы), условие теоремы совпадает с условием неинтегрируемости связи (существует коэффициент $\begin{bmatrix} s & \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \neq 0$), ибо вектор $(\lambda\mu)$ – единственный: $\lambda = 1, \quad \mu = 2$.

Если $m=3$, то условие теоремы может быть выполнено лишь если $n-m \geq 3$, т.е. пространство положений минимум шестимерно.

Вообще, если размерность многообразия положений не меньше полусуммы числа степеней свободы и его квадрата, то типичная обратимая система вышеуказанного вида отвечает некоторой неголономной системе. Следует обратить внимание, что свойство типичности проверяется прямым вычислением.

Предмет отдельного исследования – нетипичные системы, то есть такие, у которых упоминаемый в теореме набор векторов линейно зависим. Как обстоит дело в реализуемостью в этом случае ?

Post–scriptum. Поздравляя ученого и педагога, своего старшего друга профессора Велько Вуйичича, автор в эти трудные времена считает для себя обязательным публично выразить свою глубокую симпатию идее единой государственности всего сербского и черногорского народов – идее гордой и благородной, как и сами эти народы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Картан, Э., *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера*, М.: Изд–во МГУ, 367.

[2] Synge, J. L., *On the geometry of dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A., 226, (1926), 31–106.

[3] Вагнер, В. В., *Геометрическая интерпретация движения неголономных механических систем*, Тр. семинар по тензорному и векторному анализу, вып. **5** (1941), 301–327.

[4] Синдж, Дж. Л., *Тензорные методы в динамике*, Изд–во иностр. литературы, М. (1947), 43 с.

[5] Vujičić, V. A., *Kovarijantna dinamika*, Beograd (1981).

[6] Татаринов, Я. В., *Геометрический формализм классической динамики. Канонические переформулировки основных теорем для конфигураций с кручением (в частности, для неголономных)*, Вестник МГУ, Сер. матем., механ., **N2** (1985), 74–81.

[7] Мозер, Ю., *О разложении условно– периодических решений в сходящиеся степенные ряды*, УМН, **24** вып. 2 (1969).

IS A CONSERVATIVE REVERSIBLE DYNAMICAL SYSTEM REALISABLE AS A NON-HOLONOMIC ONE ?

Consider a system with two groupes of variables: the time derivatives of "coordinates" are linear and homogeneous on the "velocities", the time derivatives of "velocities" are quadratic, and an integral also quadratic on the "velocities" exists. The article establish generic conditions respecting which such dynamical equations represent a conservative nonholonomic system.

Я.В. Татаринов
Московский государственный университет
Математико–механический факультет
119899 Москва
Россия