

VERALLGEMEINERTE ÄHNLICHKEITSLÖSUNGEN FÜR 2-D LAMINARE INSTATIONÄRE INKOMPRESSIBLE MHD GRENZSCHICHTSTROMUNGEN

V. Saljnikov, Z. Boričić, D. Nikodijević

(Eingegangen am 18.10.1994.)

In letzterer Zeit ist man zu dem Schluß gekommen [1], daß die Lösungen des Navier-Stokesschen Gleichungssystems anhand der Grenzschichtlösungen überprüft werden müssen und nicht umgekehrt, was im Hinblick auf die Näherungsnatur der Grenzschichttheorie zu erwarten wäre. Besondere Bedeutung haben dabei die "ähnlichen" Lösungen, welche als Testfälle für Stabilitätsuntersuchungen dienen und deshalb häufig zur Entwicklung semiempirischer Transitionskriterien herangezogen werden. Aus diesem Grund haben die Methode verallgemeinerter Ähnlichkeit von Loitsianski [2] und ihre vervollkommnete unsererseits entwickelte Version [3] die Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Man sollte dabei hervorheben, daß beide diese theoretisch fundierte analytisch-numerische Verfahren, welche bei verschiedenen Problemen stationärer Grenzschichtströmungen bisher erfolgreich verwendet worden sind, ihren Eigenschaften nach modernen Tendenzen in der Fluidodynamik entsprechen [4]. Darüber wurde in einer unserer früheren Arbeit [5] ausführlich berichtet.

Es scheint daher als zweckmässig die gewonnenen Resultate und Erfahrungen auf die Probleme instationärer Grenzschichtströmungen zu erweitern. Diesen Aufgaben, und zwar, im Rahmen verschiedener physikalischen Modellen haben sowohl die Schüler von Loitsianski [6], [7], als auch einige Mitarbeiter von Belgrader Grenzschichtschule [8], [9], [10] ihre Untersuchungen gewidmet.

In der vorliegenden Arbeit betrachtet man 2-D laminare instationäre inkompressible MHD Grenzschichtströmung. Dabei setzt man voraus, daß das homogene äußere Magnetfeld quer zur angeströmten Körperwand wirkt, das Elektrofeld vernachlässigbar klein ist und die Flüssigkeitselektroleitfähigkeit unverändert bleibt. Als Lösungsverfahren benützt man die unsererseits entwickelte Methode verallgemeinerter Ähnlichkeit [3].

Als mathematisches Modell betrachtet Problems verwendet man die bekannte mit der Stromfunktion $\psi(x, y, t)$ ausgedrückte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + N \left(U - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (1)$$

und die entsprechenden Rand- bzw. Anfangsbedingungen

$$y = 0 : \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad y \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x, t);$$

$$x = x_0 : \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0(y, t); \quad t = t_0 : \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1(x, y).$$
(2)

Dabei bedeutet, auß er den in der klassischen Grenzschichttheorie üblichen Bezeichnungen: $N(x, t) = \sigma \bar{B}^2 / \rho$ - Magnetfeldverteilung mit konstanter Elektroleitfähigkeit σ , magnetischer Induktion $\bar{B}(x, t)$ und der Dichte ρ .

Im Rahmen des analytischen Teils werden zwei aufeinanderfolgende Umformungen der Gleichung (1) durchgeführt, nämlich:

1. Nach Einführung der Umformungen

$$x = x; \quad t = t; \quad y = \eta K(x, t); \quad \psi(x, y, t) = \Phi(x, \eta, t) U K(x, t) \quad (3)$$

welche man durch die Erweiterung der analogen Transformationen des stationären Problems [3] erhält, wobei, wegen der verkürzten Schreibweise,

$$K = \left(a_0 \nu U^{-b_0} \int_0^x U^{b_0-1} dx \right)^{1/2}, \quad (4)$$

mit vorläufig willkürlichen Konstanten a_0 ; b_0 bezeichnet, folgt zunächst die sogenannte Gleichung der verallgemeinerten Ähnlichkeit des betrachteten Problems.

2. Sie wird danach, unter der Voraussetzung, daß die Verteilungen der Außengeschwindigkeit $U(x, t)$ und des Magnetfeldes $N(x, t)$ differenzierbar sind, mit Hilfe der folgenden Parametermengen vom Loitsianskischen Typus [8]

$$f_{k,n} = U^{k-1} \frac{\partial^{k+n} U}{\partial x^k \partial t^n} z^{k+n}; \quad g_{k,n} = U^{k-1} \frac{\partial^{k-1+n} N}{\partial x^{k-1} \partial t^n} z^{k+n} \quad (5)$$

$$(k, n = 0, 1, 2, \dots; \quad k \vee n \neq 0)$$

und des zusätzlichen willkürlichen Parameters

$$p = \frac{\partial z}{\partial t} = const. \quad (6)$$

transformiert. Die Parameter (5), welche die Größe

$$z = \frac{(\delta^{**})^2}{\nu} \quad (7)$$

bzw. die Impulsverlustdicke

$$\delta^{**}(x, t) = K B \quad \text{mit} \quad B(x, t) = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (8)$$

enthalten, übernehmen dabei die Rolle von neuen unabhängigen Veränderlichen anstatt der Koordinaten x und t .

Als Resultat dieser Umformungen erhält man die universelle Differentialgleichung des betrachteten Problems

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2 B^2} [a_0 B^2 + f_{1,0} (2 - b_0)] \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_{1,0}}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{g_{1,0}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{f_{0,1}}{B^2} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \eta \frac{p}{B^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \\
 & = \frac{1}{B^2} \sum_{\substack{k,n=0 \\ k \vee n \neq 0}}^{\infty} A_{k,n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_{k,n} \partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi}{\partial f_{k,n}} \right) + \\
 & + \frac{1}{B^2} \sum_{\substack{k,n=0 \\ k \vee n \neq 0}}^{\infty} B_{k,n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_{k,n} \partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi}{\partial g_{k,n}} \right) + \\
 & + \frac{1}{B^2} \sum_{\substack{k,n=0 \\ k \vee n \neq 0}}^{\infty} \left(C_{k,n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_{k,n} \partial \eta} + D_{k,n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g_{k,n} \partial \eta} \right) + \\
 & + \frac{1}{B^3} \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \sum_{\substack{k,n=0 \\ k \vee n \neq 0}}^{\infty} \left(C_{k,n} \frac{\partial B}{\partial f_{k,n}} + D_{k,n} \frac{\partial B}{\partial g_{k,n}} \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

welche, wie auch die transformierten Rand- bzw. Anfangsbedingungen (2)

$$\eta = 0 : \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0; \quad \eta \rightarrow \infty : \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow 1 \tag{10}$$

$$f_{k,n} = 0, \quad g_{k,n} = 0 \quad p = 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots; k \vee n \neq 0) : \quad \Phi = \Phi_0(\eta)$$

unabhängig von speziellen Verteilungen $U(x, t)$ und $N(x, t)$ werden. $\Phi_0(\eta)$ bedeutet dabei die wohlbekannte Blasiusche Plattengrenzschichtlösung.

Die in der Gleichung (9) sich befindenden Ausdrücke $A_{k,n}$, $B_{k,n}$, $C_{k,n}$, $D_{k,n}$ lauten:

$$\begin{aligned}
 A_{k,n} &= [(k-1)f_{1,0} + (k+n)F] f_{k,n} + f_{k+1,n}; \\
 B_{k,n} &= [(k-1)f_{1,0} + (k+n)F] g_{k,n} + g_{k+1,n}; \\
 C_{k,n} &= [(k-1)f_{0,1} + (k+n)p] f_{k,n} + f_{k,n+1}; \\
 D_{k,n} &= [(k-1)f_{0,1} + (k+n)p] g_{k,n} + g_{k,n+1},
 \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die charakteristische Grenzschichtfunktion $F = U(\partial z / \partial x)$ mittels der Impulsgleichung des betrachteten Problems in folgender auch universeller Form

abgeleitet wird

$$F = 2 \left[\zeta - 2f_{1,0} - H \left(f_{1,0} + g_{1,0} + f_{0,1} + \frac{p}{2} \right) - \sum_{\substack{k,n=0 \\ k \vee n \neq 0}}^{\infty} \left(C_{k,n} \frac{\partial H}{\partial f_{k,n}} + D_{k,n} \frac{\partial H}{\partial g_{k,n}} \right) \right] \quad (12)$$

mit

$$\zeta = B \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} \quad \text{und} \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{1}{B} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\eta. \quad (13)$$

Das durch das Gleichungssystem (9)–(13) definierte universelle mathematische Modell wird in dreiparametriger einmallokalistierter Näherung, d.h. unter den Bedingungen

$$f_{1,0} \neq 0; \quad f_{0,1} \neq 0; \quad g_{1,0} \neq 0; \quad \frac{\partial}{\partial f_{1,0}} \neq 0; \quad \frac{\partial}{\partial f_{0,1}} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial g_{1,0}} \neq 0 \quad (14)$$

numerisch integriert, wobei alle anderen Parameter $f_{k,n}$; $g_{k,n}$ (5) und die entsprechenden Ableitungen vernachlässigt werden. Damit wird durch den Parameter $f_{1,0}$ der räumliche, vermittelt des Parameters $f_{0,1}$ der zeitliche und durch den Parameter $g_{1,0}$ der magnetische Einfluß auf die Grenzschichtentwicklung zum Ausdruck gebracht.

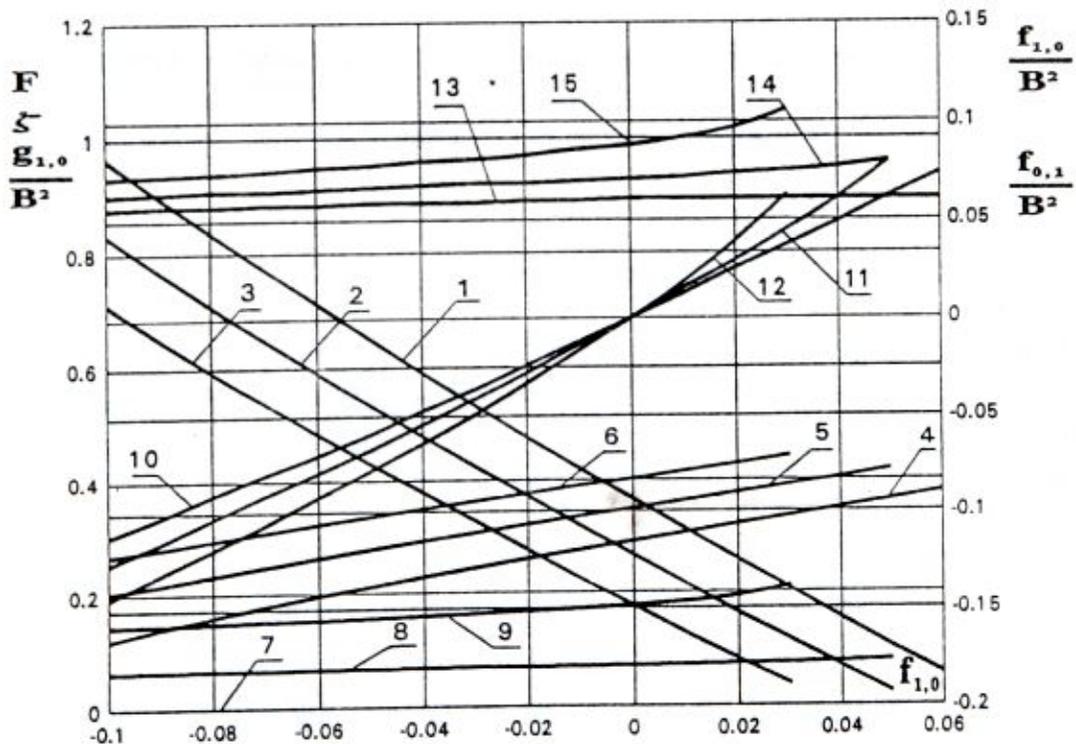


Abb.1.

Für die numerische Integration wird ein Differenzenverfahren – der sogenannte "Tridiagonal - Algorithm" (TDA) [5] – verwendet. Aus der Fülle der erhaltenen und vertafelten universellen Resultate sind einige charakteristische Grenzschichtfunktionen gewählt und auf zwei Abbildungen (Abb. 1 und 2) graphisch dargestellt.

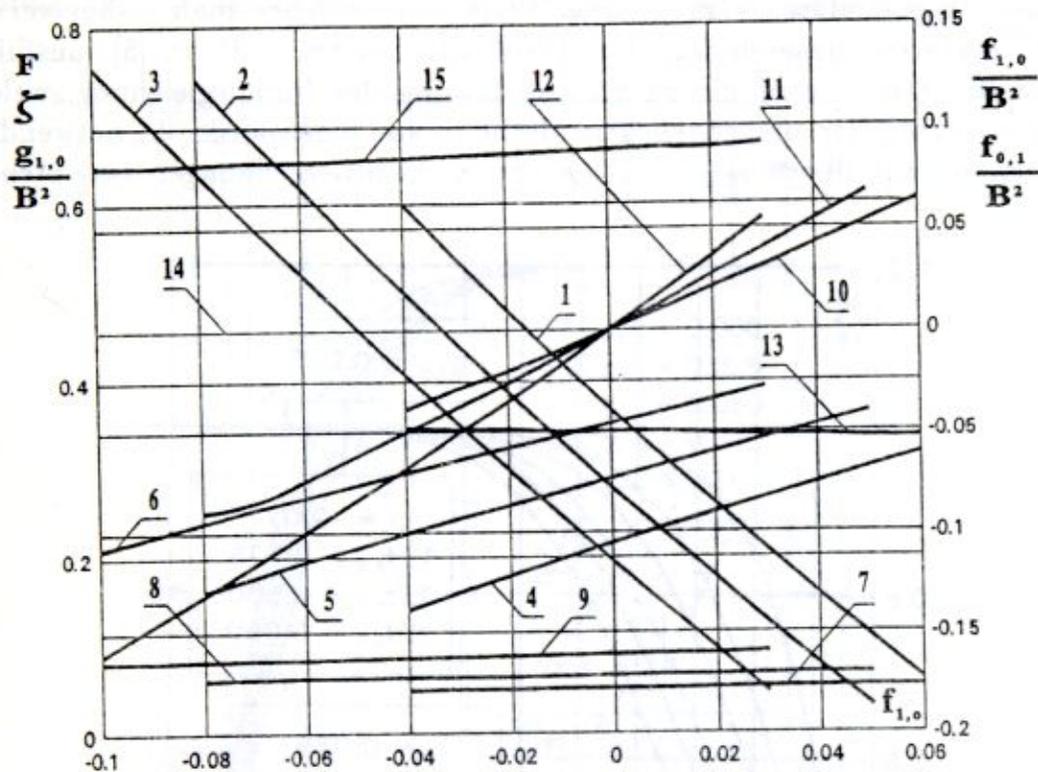


Abb.2.

Dabei kommt man, vermittels der Verteilung F (12) (Kurven: 1,2,3 auf beiden Abb.1,2), und der Funktion ζ (13) (Kurven: 4,5,6 auch auf beiden Abb.1,2), zur grundsätzlichen Schlüssen von allgemeiner Bedeutung. So folgt, z.B., auf Grund von der auf Abb. 1 dargestellten Funktion ζ (13) (Kurven: 4,5,6), daß die Lage des Ablösungspunktes sich, bei konstantem Wert des instationären Parameters $f_{0,1}$, mit dem Zuwachs des magnetischen Parameters $g_{1,0}$, bzw. mit der Intensitätvergrößerung des magnetischen Feldes, stromabwärts verschiebt. Wenn, aber, der magnetische Parameter $g_{1,0}$ einen konstanten Wert behält, kann man vermittels der auf Abb. 2 dargestellten Funktion ζ (13) (Kurven: 4,5,6) schliessen, daß im Falle der beschleunigten Aussenströmungen ($\partial U/\partial t > 0$), bzw.

positiven Werten des Parameters $f_{0,1}$ ($f_{0,1} > 0$), bei Vergrößerung dieses Parameters die Lage des Ablösungspunktes sich stromabwärts verschiebt. Im Gegenteil, im Falle der verzögerten Aussenströmungen ($\partial U/\partial t < 0$) bzw. der negativen Parametern $f_{0,1}$, beim Zuwachs des absoluten Wertes dieses Parameters die Lage des Ablösungspunktes sich stromaufwärts versetzt.

Die übrigen auf beiden Abbildungen dargestellten universellen Verteilungen: $\frac{g_{1,0}}{B^2}$ (Kurven: 7,8,9); $\frac{f_{1,0}}{B^2}$ (Kurven: 10,11,12); $\frac{f_{0,1}}{B^2}$ (Kurven: 13,14,15) benützt man für die Grenzschichtberechnungen im speziellen Strömungsfällen des betrachteten Problems; d.h. für bestimmte Verteilungen der Aussenströmung $U(x,t)$ und des Magnetfeldes $N(x,t)$. Das Verfahren, welches man dabei verwendet, wurde in einigen unseren früheren Veröffentlichungen, z.B. in [5], ausführlicher dargestellt. Damit wird die zusätzliche Lösung der Impulsgleichung, welche bei der Anwendung der ursprünglichen Methode von Loitsianski [2] notwendig war, in unserem Falle überflüssig, was die Grenzschichtberechnungen bedeutend vereinfacht.

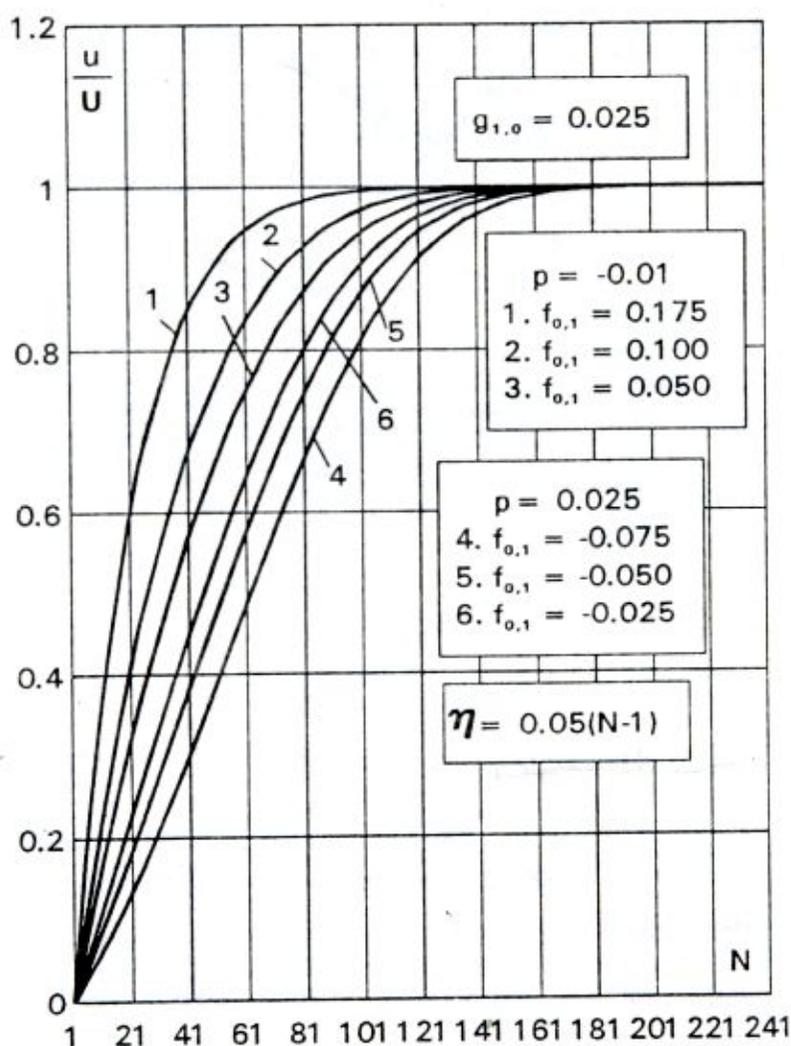


Abb.3.

Das Geschwindigkeitsverhältnis (u/U) ist in Abhängigkeit von N und für verschiedene Werte des Parameters der Instationarität $f_{0,1}$ in Bild 3. dargestellt. Man kann aus dem Bild schließen, daß die beschleunigte Strömung hat ein positiver Effekt in der Hauptströmung, im Sinn der Aufschiebung der Grenzschichtablösung, weil, wie man sehen kann, die graphische Darstellung der dimensionlosen Geschwindigkeiten, mit dem Anstieg der positiven Werte des Parameters der Instationarität, wird immer mehr "völler".

Man sieht auch ein, daß der Effekt der Verlangsamung in der Hauptströmung negativ ist, im Sinn der Aufschiebung der Grenzschichtablösung, weil mit dem Anstieg der absoluten Werte des negativen Parameter $f_{0,1}$, die graphische Darstellung der dimensionlosen Geschwindigkeiten wird immer mehr "dünner".

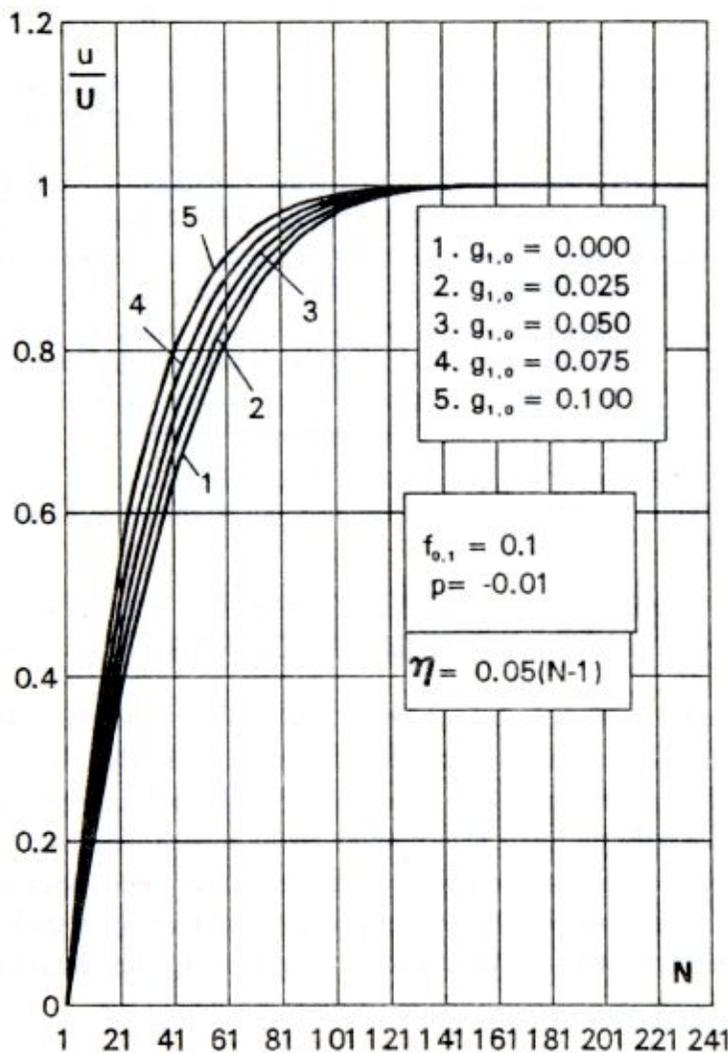


Abb.4.

In Bild 4. ist die Verteilung des Verhältnis der Geschwindigkeiten (u/U) für verschiedene Werte des magnetischen Parameter $g_{1,0}$ dargestellt. Man kann den positiven Effekt des magnetischen Feldes bemerken, d.h. sein günstiger Einfluß auf die Aufschiebung der Grenzschichtablösung. Wirklich, mit dem Anstieg der

Werte des Instationaritätsparameters, die graphische Darstellung der dimensionlosen Geschwindigkeiten wird immer mehr "völler". Die letzte Schlußfolgerung gilt nicht nur für die beschleunigte Strömung in der Grundströmung, sondern auch für die verlangsamte Strömung in der Grundströmung.

REFERENCES

- [1] Gersten, K., *Die Bedeutung der Prandtl'schen Grenzschichttheorie nach 85 Jahren*, Z. Flugwiss. Weltraumforsch., **13** (1989), 209-218.
- [2] Loitsianski, L. G., *Universelle Gleichungen und Parameternäherungen in der Theorie der laminaren Grenzschicht* (in Russisch), PMM XXIX, **1** (1965), 70-87.
- [3] Saljnikov, V. N., *A contribution to universal solutions of the boundary layer theory*, Teorijska i primenjena mehanika, Beograd, **4** (1978), 139-163.
- [4] Schneider, W., *Über die Bedeutung analytischer Methoden für die Strömungsmechanik im Zeitalter des Computers*, Vortrag am Festkolloquium 60 jähriges Jubiläum von Prof. Zierep, Karlsruhe (1989).
- [5] Saljnikov, V., Dallmann, U., *Verallgemeinerte Ähnlichkeitslösungen für 3-D laminare stationäre kompressible Grenzschichtströmungen an schiebenden profilierten Zylindern*, DLREB, **34** (1989).
- [6] Buschmarin, O., Bassin, B., *Parametrische Berechnungsmethode der laminaren instationären Grenzschicht* (in Russisch), Inž.-Fiz. Žurnal, Minsk, XXII **12** (1972), 282-292.
- [7] Buschmarin, O., Sarajew, Ju., *Parametrische Methode in der instationären Grenzschichttheorie* (in Russisch), Inž.-Fiz. Žurnal, Minsk, XXVII **1** (1974), 110-118.
- [8] Saljnikov, V., Boričić, Z., Nikodijević, D., *Polyparametrische Methode für die Berechnung der instationären MHD - Grenzschichten*, ZAMM'68, **5** (1988), T346-T349.
- [9] Boričić, Z., Nikodijević, D., *MHD - boundary layer of the fluid of the variable electro - conductivity on the porous surface*, Facta Universitatis, University of Niš, **1** (1991), 68-77.
- [10] Saljnikov, V., Ivanović, D., *Verallgemeinerte Ähnlichkeitslösungen für 2-D laminare instationäre inkompressible Grenzschichtströmungen an profilierten Zylindern*, ZAMM'74, **5** (1994), T391-T394.

GENERALIZED SIMILAR SOLUTIONS OF FLOWS IN A 2-D
LAMINAR UNSTEADY INCOMPRESSIBLE MHD BOUNDARY LAYER

This paper deals with the instationary flat MHD boundary layer. The magnetic field is homogenous and perpendicular to the body. The fluid is incompressible and its electroconductivity is constant. By solving of this problem, the three groups of parameters have been used from which the one is monoelement. The universal equation of the described problem has been obtained in this way. This equation has been solved in the three-parametric localized approximation. The part of obtained results in this paper is given in the diagrams.

UOPŠTENA SLIČNA REŠENJA ZA 2-D LAMINARNA NESTACIONARNA
NESTIŠLJIVA STRUJANJA U MHD GRANIČNOM SLOJU

U radu se izučava nestacionarni ravanski MHD granični sloj. Magnetno polje je homogeno i upravno na telo. Fluid je nestišljiv a njegova elektroprovodnost konstantna. Za rešavanje problema koriste se tri skupa parametara od kojih je jedan jednoelementni. Na ovaj način dolazi se do univerzalne jednačine opisanog problema. Univerzalna jednačina je u troparametarskoj lokalizovanoj aproksimaciji rešena. Deo dobijenih rezultata u radu je dat u obliku dijagrama.

V. Saljnikov
Nevesinjska 17
11000 Beograd
Jugoslavija

Z. Boričić
Mašinski fakultet u Nišu
18000 Niš
Jugoslavija

D. Nikodijević
Mašinski fakultet u Nišu
18000 Niš
Jugoslavija