TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 20, pp 189–198, 1994, UDK 531.01

# ОБ УРАВНЕНИЯХ ПУАНКАРЕ–ЧЕТАЕВА

*В.В. Румянцев*

(Поступила 06.10.94.)

Идея Пуанкаре [1] представлять уравнения движения голономной механической системы с помощью транзитивной группы Ли бесконечно малых преобразованиий была развита Четаевым [2]–[5] на случаи нестационарных связей и зависимых переменных, когде группа преобразований интранзитивна. Четаев преобразовал уравнения Пуанкаре к каноническому виду и разработал теорию интегрирования последних.

В статье доказано, что канонические уравнения Пуанкаре–Четаева представляют собою в общем случае гамильтоновы уравнения в неканонических переменных. Показано также, что системы обобщенных уравнений Лагранжа и Гамильтона в избыточных координатах, а также уравнения Эйлера–Лагранжа в квазикоординатах являются частными случаями уравнений Пуанкаре–Четаева, теория которых [2]–[5] тем самым распространяется на названные системы. В заключение рассматривается вопрос о применении уравнений Пуанкаре–Четаева в неголономной динамике.

**1.** Пусть положение в пространстве механической голономной системы с $k$ степенями свободы для всякого момента времени $t$ задается определяющими координатами $x_i$ $(i = 1, \ldots, n \geq k)$ [5], стесненными вполне интегрируемыми уравнениями Пфаффа

$$\eta_j \equiv a_{ji}(t,x)\dot{x}_i + a_{j0}(t,x) = 0, \quad rank(a_{ji}) = n - k, \quad (j = k+1, \ldots, n) \tag{1}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование. Дополнив (1) соотношениями [4], [5]

$$\eta_s \equiv a_{si}(t,x)\dot{x}_i \quad (s = 1, \ldots, k) \tag{2}$$

независимыми между собой, а также по отношению к (1): $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, получим

$$\dot{x}_i = b_{is}(t,x)\eta_s + b_{i0}(t,x) \quad (i = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k) \tag{3}$$

причем $a_{si}b_{ir} = a_{ir}b_{si} = \delta_{sr}$, где $\delta_{sr}$ – символ Кронекера.

Замкнутая система инфинитезимальных линейных операторов

$$X_0 f = \frac{\partial f}{\partial t} + b_{i0}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad X_s f = b_{is}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f(t,x) \in C^1, \quad (s = 1,\ldots,k) \tag{4}$$

определяет транзитивно при $n = k$ (нетранзитивно при $n > k$) действующие преобразования на виртуальном $\delta f = \omega_s X_s f$ и действительном $df = (X_0 f + \eta_s X_s f)dt$ перемещениях, где $\omega_s = a_{si}(t,x)\delta x_i$ и $\eta_s$ – параметры виртуальных и действительных перемещений [1].

Система операторов (4) замкнута в том смысле, что ее коммутатор

$$[X_r, X_s]f \equiv X_r X_s f - X_s X_r f = c^m_{rs} X_m f \quad (m,r,s = 0,\ldots,k) \tag{5}$$

где структурные коэффициенты

$$c^m_{rs} = \left(\frac{\partial a_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i}\right) b_{jr} b_{is} = a_{mj}\left(b_{ir}\frac{\partial b_{js}}{\partial x_i} - b_{is}\frac{\partial b_{jr}}{\partial x_i}\right) (i,j = 0,1,\ldots,n) \tag{6}$$

причем для сокращения записи использованы обозначения $x_0 = t$, $\dot{x}_0 = 1$, $\eta_0 = 1$; $a_{0i} = b_{0i} = \delta_{0i}$.

Коэффициенты $c^m_{rs}$ удовлетворяют условиям $c^m_{rs} = -c^m_{sr}$, $c^m_{rr} = 0$, $c^0_{0s} = 0$ $(m,r,s = 0,1,\ldots,k)$ и в общем случае могут быть переменными:

$$c^m_{rs} = c^m_{rs}(t,x).$$

Отметим, что если все уравнения (2) интегрируемы, то существуют функции $\pi_s = \pi_s(t,x_1,\ldots,x_n)$ такие, что $\dot{\pi}_s = \eta_s$ $(s = 1,\ldots,k)$, $\pi_0 = dt$, причем

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta_s}{\partial \dot{x}_i} = a_{si}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \pi_s} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \eta_s} = b_{is}$$

и операторы (4) принимают вид абелевой группы

$$X_s f = b_{is}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \pi_s}, \quad (s = 0,1,\ldots,k, \ i = 0,1,\ldots,n) \tag{7}$$

для которой все $c^m_{rs} = 0$ $(m,r,s = 0,1,\ldots,k)$.

В случае неинтегрируемости уравнений (2) величины $\pi_s$ как функции времени и координат не существуют, однако их вводят в рассмотрение под названием квазикоординат, принимая условные обозначения для квазискоростей $\eta_s = \dot{\pi}_s$ и для "частных производных по квазикоординатам"

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_s} = b_{is}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

и для обратных соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{si}\frac{\partial f}{\partial \pi_s} \quad (s = 0,\ldots,k; \, i = 0,1,\ldots,n).$$

При этом операторы (4) имеют вид (7) с коммутатором (5), принимающим вид
$$[X_r, X_s]f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial\pi_r\partial\pi_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial\pi_s\partial\pi_r} = c_{rs}^m \frac{\partial f}{\partial\pi_m}.$$

Кинетическая энергия системы при замене (3) представляется функцией $T(t,x,\eta)$. Предполагая, что на точку $M_\nu$ системы с радиусом-вектором $r_\nu$ действуют активные силы, как обладающие силовой функцией $U(t,x)$, так и непотенциальные силы $F_\nu$, будем рассматривать обобщенную функцию Лагранжа $L(t,x,\eta) = T(t,x,\eta) + U(t,x)$ и обобщенные непотенциальные силы
$$Q_s(t,x,\eta) = F_\nu \cdot X_s r_\nu \quad (s = 1,\ldots,k) \tag{8}$$

Из принципа Д'Аламбера–Лагранжа Четаев [5] вывел уравнения Пуанкаре
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L}{\partial\eta_m} + c_{0s}^m \frac{\partial L}{\partial\eta_m} + X_s L + Q_s \quad (m,r,s = 1,\ldots,k) \tag{9}$$
к которым в общем случае следует присоединить уравнения (3).

Уравнения (9) содержат как частные случаи уравнения, установленные Пуанкаре [1], когда $n = k$, $X_0 = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\bar{C}_{0s}^m = 0$, $Q_s = 0$ $(m,s = 1,\ldots,k)$, и уравнения Лагранжа второго рода.

Пуанкаре [1] и Четаев [2] рассматривали случай $c_{rs}^m = const.$, когда операторы (4) образуют группу Ли $G$. Если к тому же $X_s L = 0$, $Q_s = Q_s(\eta)$, то параметры $\eta_s$ можно рассматривать как координаты системы в алгебре Ли $g$ группы $G$; в этом случае уравнений (9) будут замкнутой системой дифференциальных уравнений на алгебре $g$ [6]. Однако из вывода уравнений (9) видно, что они справедливы [5] и в случае переменных $c_{rs}^m$. В этом более широком смысле мы и будем рассматривать уравнения Пуанкаре.

Введением вместо $\eta_s$ новых переменных $y_s = \dfrac{\partial L}{\partial\eta_s}$ $(s = 1,\ldots,k)$ и обобщенной функции Гамильтона
$$H(t,x,y) = y_i\eta_i - L,$$
Четаев [2]–[5] преобразовал уравнения (9) к каноническому виду
$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} = c_{rs}^m \frac{\partial H}{\partial y_r} y_m + c_{0s}^m y_m - X_s H + Q_s, \quad \eta_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, (m,r,s = 1,\ldots,k) \tag{10}$$
к которым в общем случае следует присоединить уравнения (3) в виде
$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_0 x_i + \frac{\partial H}{\partial y_s} X_s x_i \quad (i = 1,\ldots,n;\ s = 1,\ldots,k) \tag{11}$$

Уравнения (10) содержат как частный случай канонические уравнения Гамильтона, когда $x_i$ $(i = 1,\ldots,n = k)$ независимы, $\eta_s = \dot{x}_i$, функция $H$

имеет классический вид в канонических теперь переменных $x_i$, $y_i$ и операторы (4) сводятся к перестановочным преобразованиям.

Рассматривая две гладкие функции $f(t,x,y)$ и $\varphi(t,x,y)$, определим обобщенную скобку Пуассона равенством

$$(f,\varphi) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} X_s f - \frac{\partial f}{\partial y_s} X_s \varphi + c_{rs}^m \frac{\partial f}{\partial y_s} \frac{\partial \varphi}{\partial y_r} y_m + c_{0s}^m \frac{\partial f}{\partial y_s} y_m, \ (m,r,s = 1,\ldots,k) \quad (12)$$

Согласно (12) с учетом (4) и (7) имеем

$$(y_s,\, H) = -X_s H + c_{rs}^m \frac{\partial H}{\partial y_r} y_m + c_{0s}^m y_s, \quad (\pi_s,\, H) = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad (x_j,\, H) = \frac{\partial H}{\partial y_s} X_s x_j.$$

Следовательно уравнения Пуанкаре–Четаева (10) в случае $Q_s = 0$ $(s = 1,\ldots,k)$ представимы в виде

$$\frac{\mathrm{d} y_s}{\mathrm{d}t} = (y_s, H), \quad \frac{\mathrm{d}\pi_s}{\mathrm{d}t} = (\pi_s, H), \quad (s = 1,\ldots,k) \quad (13)$$

т.е. являются гамильтоновыми уравнениями в неканонических переменных $\pi_s$, $y_s$.

Уравнения вида (13) изучаются в современной теории гамильтоновых систем [7]. Уравнения (11), имея вид

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = (x_j, H) + b_{j0}, \quad (j = 1,\ldots,n)$$

будут гамильтоновыми уравнениями лишь в случае однородных уравнений (3), когда все $b_{j0} = 0$.

Покажем, что уравнения (9) и (10) содержат как частные случаи уравнения движения в избыточных координатах, а также в квазикоординатах.

Пусть связи заданы вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\dot{x}_j - b_{js}(t,x)\dot{x}_s - b_{j0}(t,x) = 0 \quad (j = k+1,\ldots,n;\ s = 1,\ldots,k) \quad (14)$$

За параметры действительных и виртуальных перемещений примем обобщенные скорости $\eta_s = \dot{x}_s$ и вариации координат $x_s$, принимаемых за независимые, $\omega_s = \delta x_s$. Тогда операторы (4) примут вид абелевой группы

$$X_0 f = \frac{\partial f}{\partial t} + b_{j0}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad X_s f = \frac{\partial f}{\partial x_s} + b_{js}\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (j = k+1,\ldots,n;\ s = 1,\ldots,k) \quad (15)$$

с коммутатором $[X_r, X_s] f = 0$ $(r,s = 0,1,\ldots,k)$.

Уравнения Пуанкаре (9) запишутся в виде обобщенных уравнений Лагранжа в зависимых (избыточных) координатах

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} - \frac{\partial L}{\partial x_s} - b_{js}\frac{\partial L}{\partial x_j} = Q_s \quad (s = 1,\ldots,k) \quad (16)$$

где функция Лагранжа $L = L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)$ и обобщенные непотенциальные силы (8) с учетом (15) суть

$$Q_s = F_\nu \cdot \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial x_s} + b_{js}\frac{\partial r_\nu}{\partial x_j}\right).$$

Уравнения (16) объединяют в единой форме уравнения Лагранжа первого рода (после исключения из них неопределенных множителей) и второго рода.

Уравнения Пуанкаре–Четаева (10) принимают вид обобщенных уравнений Гамильтона в зависимых переменных

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_s} - b_{js}\frac{\partial H}{\partial x_j} + Q_s, \quad \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y_s} \quad (s = 1, \ldots, k;\ j = k+1, \ldots, n) \tag{17}$$

к которым следует присоединить уравнения связей (14), переписанные с учетом второй группы уравнений (17).

В случае неинтегрируемых соотношений (2) имеем $\eta_s = \dot{\pi}_s$, где $\pi_s$ – квазикоординаты, и с учетом обозначений (7) запишем уравнения Пуанкаре (9) в виде уравнений в квазикоординатах

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \eta_s} = c_{rs}^m \eta_r \frac{\partial L}{\partial \eta_m} + c_{0s}^m \frac{\partial L}{\partial \eta_m} + \frac{\partial L}{\partial \pi_s} + Q_s \quad (m, r, s = 1, \ldots, k) \tag{18}$$

где обобщенная функция Лагранжа $L = L(t, x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$; к уравнениям (18) следует присоединить уравнения (3).

Учитывая, что в случае независимых переменных $x_i$ $(i = 1, \ldots, k = n)$ трехиндексные символы Больцмана–Гамеля [8], [9]

$$\gamma_{rs}^m = c_{sr}^m, \quad \gamma_{0s}^m = \varepsilon_s^m = c_{s0}^m \quad (m, r, s = 1, \ldots, k)$$

где $c_{rs}^m$ определены формулами (6), а $\gamma_{rs}^m$ – формулами (1.8.2) и (1.9.4) [10], заключаем, что уравнения Эйлера–Лагранжа (8.1.5) [10] в квазикоординатах совпадают с уравнениями (18). Таким образом, уравнения Эйлера–Лагранжа являются частным случаем уравнений Пуанкаре, когда за параметры действительных перемещений приняты квазискорости $\eta_s$.

При переходе от переменных $\eta_s$ к переменным $y_s = \dfrac{\partial L}{\partial \eta_s}$ уравнения (18) принимают вид уравнений Пуанкаре–Четаева (10)

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} = c_{rs}^m \frac{\partial H}{\partial y_r} y_m + c_{0s}^m y_m - \frac{\partial H}{\partial \pi_s} + Q_s, \quad \frac{\mathrm{d}\pi_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad (m, r, s = 1, \ldots, k) \tag{19}$$

представляющих канонический вид уравнений Эйлера–Лагранжа в квазикоординатах.

К уравнениям (16)–(19) применима, очевидно, теория [2]–[5].

*Пример 1.* Выведем из уравнений Пуанкаре уравнения Эйлера движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.

Примем за определяющие координаты сначала Эйлеровы углы $\theta$, $\psi$, $\varphi$, для которых справедливы кинематические уравнения Эйлера

$$\dot\theta = \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi, \quad \dot\psi = \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi),$$
$$\dot\varphi = \omega_3 - \mathrm{ctg}\theta(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi) \tag{20}$$

где $\omega_i$ – проекции угловой скорости на главные оси инерции тела. Эти величины примем за параметры действительных перемещений и рассмотрим транзитивную группу Ли [5]

$$X_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \pi_1} = \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \psi} - \mathrm{ctg}\theta \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$
$$X_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \pi_2} = -\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \psi} - \mathrm{ctg}\theta \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$
$$X_3 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \pi_3} = \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

коммутатор которой

$$[X_1, X_2] f = X_3 f \quad (123) \tag{21}$$

Символ (123) обозначает круговую перестановку индексов 1,2,3. Ненулевые структурные коэффициенты равны

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 = 1, \quad c_{21}^3 = c_{32}^1 = c_{13}^2 = -1. \tag{22}$$

Т.к. функция Лагранжа $L = \frac{1}{2} A_i \omega_i^2 - Mg x_i^0 \gamma_i$, где $A_i$ – моменты инерции, $x_i^0$ – координаты центра масс тела,

$$\gamma_1 = \sin\theta \, \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta \, \cos\varphi, \gamma_3 = \cos\theta \tag{23}$$

косинусы углов между вертикалью и главными осями инерции, то уравнения Пуанкаре (9) принимают вид уравнений Эйлера

$$A_1 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + Mg\left(x_3^0\gamma_2 - x_2^0\gamma_3\right) \quad (123) \tag{24}$$

к которым следует добавить уравнения (20) и учесть равенства (23). Канонические уравнения Пуанкаре–Четаева (10) принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{A_2 - A_3}{A_2 A_3} y_2 y_3 + Mg\left(x_3^0\gamma_2 - x_2^0\gamma_3\right) \quad (123) \tag{25}$$

и уравнений (20) с заменой $\omega_i$ на $y_i/A_i$ и учетом (23). Эти уравнения являются гамильтоновыми уравнениями вида

$$\dot F = (F, H)$$

если положить $F$ равной каждой из переменных $y_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\theta$, $\psi$, $\varphi$, где функция Гамильтона

$$H = \frac{y_i^2}{2A_i} + Mg\left(x_1^0 \sin\theta \sin\varphi + x_2^0 \sin\theta \cos\varphi + x_3^0 \cos\theta\right)$$

Если принять за "определяющие" координаты величины $\gamma_i$, для которых справедливы уравнения Пуассона

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \quad (123) \tag{26}$$

представляющие собою следствия уравнений (20), то операторы (4) примут вид

$$X_1 f \equiv \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_3} \quad (123)$$

с коммутатором (21) и ненулевыми структурными коэффициентами (22). Уравнения Пуанкаре (9) принимают при этом вид уравнений Эйлера (24), а уравнения Пуанкаре–Четаева - вид уравнений (25) и (26) с заменой в последних $\omega_i$ на $y_i/A_i$. Правые части этих уравнений представляются в виде скобок Пуассона

$$(y_1, H) = -X_1 H + c_{i1}^m \frac{\partial H}{\partial y_i} y_m, \quad (\gamma_1, H) = \frac{\partial H}{\partial y_i} X_i \gamma_1 \quad (123)$$

где

$$H = \frac{y_i^2}{2A_i} + Mg x_i^0 \gamma_i \quad (i, m = 1, 2, 3).$$

2. Как известно [8]–[11], уравнения Эйлера–Лагранжа в квазикоординатах объединяют в единой форме уравнения движения голономных и неголономных систем; этим же качеством обладают и уравнения Пуанкаре. Следует, однако, иметь в виду, что система операторов виртуальных перемещений для неголономных систем не является замкнутой [12], вследствие чего приходится использовать операторы соответствующей голономной системы, получаемой из неголономной мысленным отбрасыванием неинтегрируемых связей.

Рассмотрим механическую систему с $l$ степенями свободы, стесненную связями, представляемыми как интегрируемыми уравнениями (1), так и неинтегрируемыми уравнениями

$$\dot\eta_\alpha \equiv a_{\alpha i}(t, x)\dot x_i + a_{\alpha 0}(t, x) = 0, \quad \operatorname{rank}(a_{\alpha i}) = k - l \quad (\alpha = l + 1, \ldots, k) \tag{27}$$

Дополнив (1) и (27) соотношениями вида (2)

$$\eta_s \equiv a_{si}(t, x)\dot x \quad (s = 1, \ldots, l) \tag{28}$$

независимыми одно от другого, а также от (1) и (27):

$$\det\|a_{ij}\| \neq 0, \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

будем иметь

$$\dot{x}_i = b_{is}(t,x)\eta_s + b_{i0}(t,x) \quad (i = 1,\dots,n;\ s = 1,\dots,l) \tag{29}$$

Для соответствующей голономной системы, полученной из рассматриваемой отбрасыванием связей (27), имеем вместо (29) уравнения (3) и замкнутую систему операторов (4). Так как виртуальные вариации квазикоординат для неголономной системы со связями (27) $\delta\pi_a = 0$ ($a = l+1,\dots,k$), то из принципа Д'Аламбера–Лагранжа выводятся уравнения движения неголономной системы вида (18)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \eta_s} = c^m_{rs}\eta_r \frac{\partial L}{\partial \eta_m} + c^m_{0s}\frac{\partial L}{\partial \eta_m} + \frac{\partial L}{\partial \pi_s} + Q_s \quad (r,s = 1,\dots,l;\ m = 1,\dots,k) \tag{30}$$

число которых меньше числа уравнений (18) на $k - l$. Структурные коэффициенты в этих уравнениях также определяются формулами (6), в которых, однако, индексы $r, s$ изменяются теперь от 0 до $l$. К этим уравнениям должны быть добавлены уравнения (27) и (29). Заметим, что в уравнениях (30) функция $L(t,x,\eta)$, образованная для соответствующей голономной системы, зависит в общем случае от всех $k$ квазискоростей $\eta_s$, так что уравнения связей (27) должны учитываться лишь после составления уравнений (30) [9]–[11].

Аналогично уравнения Пуанкаре–Четаева (10) для неголономной системы приводят к уравнениям (19) для $r,s = 1,\dots,l$; $m = 1,\dots,k$, к которым должны быть добавлены уравнения связей (27) и уравнения (29), переписанные в виде

$$\frac{\partial H}{\partial y_a} = 0\,(a = l+1,\dots,k), \quad \dot{x}_i = b_{is}\frac{\partial H}{\partial y_s} + b_{i0}\,(i = 1,\dots,n;\ s = 1,\dots,l) \tag{31}$$

Очевидно, между кинетическими энергиями $T(t,x,\eta_1,\dots,\eta_k)$ соответствующей голономной системы и $\theta(t,x,\eta_1,\dots,\eta_l)$ неголономной системы со связями (27) имеется соотношение

$$\theta(t,x,\eta_1,\dots,\eta_l) = T(t,x,\eta_1,\dots,\eta_l,0,\dots,0)$$

Следовательно, при учете связей (27) справедливы равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta_i}; \quad \frac{\partial L}{\partial \pi_i} = \frac{\partial(\theta + U)}{\partial \pi_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} = \left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\right) \quad (i = 1,\dots,l;\ \alpha = l+1,\dots,k)$$

вследствие которых уравнения (30) можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} = (c^m_{rs}\eta_r + c^m_{0s})\frac{\partial \theta}{\partial \eta_m} + (c^\alpha_{rs}\eta_r + c^\alpha_{0s})\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\right) + \frac{\partial(\theta + U)}{\partial \pi_s} + Q_s$$
$$(m,r,s = 1,\dots,l;\ \alpha = l+1,\dots,k) \tag{32}$$

в которых $\left(\dfrac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\right)$ обозначают $\dfrac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}$ при $\eta_\beta = 0$ ($\alpha,\beta = l+1,\dots,k$).

Уравнения (32) эквивалентны уравнениям (27) [12], а также всем другим известным уравнениям движения неголономных систем [11].

В частном случае, когда уравнения (28) имеют вид $\eta_s = \dot{x}_s$ и, следовательно, $a_{sr} = \delta_{sr}$ $(s, r = 1, \ldots, l)$, все коэффициенты $c_{rs}^m = 0$ для значений $m \leq l$ [9] и уравнения (32) принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{x}_s} = (c_{rs}^\alpha \dot{x}_r + c_{0s}^\alpha)\left(\frac{\partial T}{\partial\eta_\alpha}\right) + \left(\frac{\partial(\theta+U)}{\partial\pi_s}\right) + Q_s \tag{33}$$

$$(r, s = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, k)$$

Каноническия уравнения движения неголономных систем, эквивалентние уравнениям (32), имиат вид

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} = \left(c_{rs}^m \frac{\partial H}{\partial y_r} + c_{os}^m\right) y_m + \left(c_{rs}^\alpha \frac{\partial H}{\partial y_r} + c_{os}^\alpha\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\right) - \frac{\partial H}{\partial \pi_s} + Q_s, \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\pi_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y_s} \quad (m, r, s = 1, \ldots, l;\ \alpha = l+1, \ldots, k)$$

где $y_s = \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta_s}$, $H = y_s\eta_s - \theta - U$.

*Пример 2.* Выведем из уравнений Пуанкаре(33) уравнения Воронца для системы с лагранжевыми координатами $x_1, \ldots, x_n$, стесненными неинтегрируемыми уравнениями

$$\dot{x}_s = \alpha_{si}(t, x)\dot{x}_i + \alpha_s(t, x) \quad (i = 1, \ldots, l;\ s = l+1, \ldots, n).$$

Положим

$$\eta_i = \dot{x}_i, \quad x_0 = t, \quad \eta_s = \dot{x}_s - \alpha_{si}\dot{x}_i, \quad \alpha_{s0} = \alpha_s \quad (i = 0, 1, \ldots, l;\ s = l+1, \ldots, n),$$

так что

$$a_{ij} = b_{ij} = \delta_{ij}, \quad a_{is} = b_{is} = 0, \quad b_{si} = -a_{si} = \alpha_{si}, \quad a_{sr} = b_{sr} = \delta_{sr}$$

$$(i, j = 0, 1, \ldots, l;\ r, s = l+1, \ldots, n).$$

Согласно формулам (6) имеем

$$c_{ji}^r = \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial\alpha_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial x_k}\alpha_{kj} - \frac{\partial\alpha_{rj}}{\partial x_k}\alpha_{ki}$$

$$(i, j = 1, \ldots, l;\ k, r = l+1, \ldots, n)$$

$$c_{0i}^r = \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial t} - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_i} + \frac{\partial\alpha_{ri}}{\partial x_k}\alpha_k - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_k}\alpha_{ki}$$

Принимая во внимание эти равенства, легко видеть, что уравнения (33) приводят к уравнениям Воронца [11]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{x}_i} = \frac{\partial(\theta+U)}{\partial x_i} + a_{ri}\frac{\partial(\theta+U)}{\partial x_r} + (c_{ji}^r\dot{x}_j + c_{0i}^r)\left(\frac{\partial T}{\partial\eta_r}\right) + Q_i \tag{35}$$

$$(i, j = 1, \ldots, l;\ r = l+1, \ldots, n)$$

В частном случае, когда функции $\theta$, $U$, $Q_i$, $\alpha_{si}$, $\alpha_s$ не зависят явно от координат $x_r$ $(r = l+1, \ldots, n)$, уравнения (35) принимают вид уравнений Чаплыгина [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16242).

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Poincare, H., C.R. Acad. sci. Paris **V.132** (1901), 369–371.

[2] Chetaev, N., C.R. Acad. sci. Paris **V.185** (1927), 1577–1578.

[3] Chetaev, N., ДАН СССР, **N7** (1928), 103–104.

[4] Четаев, Н. Г., ПММ **Т.5** (1941), 253–262.

[5] Четаев, Н. Г., Теоретическая механика, М.: Наука (1987), 367 с.

[6] Арнольд, В. И., Козлов, В. В., Нейштадт, А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. М.:ВИНИТИ, (1985), 304 с.

[7] Marsden, J.E., *Lectures on Mechanics*, Cambridge: Univ. Press, (1992), 272 s.

[8] Boltzmann, L., Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wissenschaften (1902), 1603–1614.

[9] Hamel, G.Z., Math. und Phys., **Bd. 50** (1904), 1–57.

[10] Лурье, А. И., *Аналитическая механика*, М.: Физматгиз (1961), 824 с.

[11] Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А., *Динамика неголономных систем*, М.: Наука, (1967), 519 с.

[12] Фам Гуен. ПММ, **Т.33** (1969), 397–402.


## ON POINCARE–CHETAEV'S EQUATIONS

The remarkable idea of H. Poincare to represent equations of motion of a holonomic system by means of some transitive Lie's group of infinitesimal transformations was generalized by N. Chetaev for the case of non-stationary constraints and of dependent variables with an intransitive group of virtual displacements. Chetaev has also proposed the canonical form and the generalized Hamilton-Jacobi equation for Poincare's equations and proved the generalizations of the Poisson and Jacobi theorems.

In the lecture I prove that in the general case the Poincare-Chetaev's canonical equations are the Hamiltonian equations for the non-canonical formulation. It is also proved that the equations of motion of a system written in superfluous coordinates and that of Euler-Lagrange written in quasi-coordinates are the special forms of the Poincare-Chetaev's equations. The question of using the Poincare-Chetaev's equations for non-holonomic systems is also discussed.

Prof. Valentin V. Rumyantsev
Computing Center of the Russian Academy of Sciences
Vavilova str.40, 117967 GSP–1
Moskva
Russia