

О ПРИТЯЖЕНИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ

А.А. Мартынюк, Н.В. Никитина

(Поступила 05.09.1994.)

1. Введение

Рассматриваются нелинейные колебательные диссипативные системы, в переменных действие – угол. Переменная, ответственная за действие, в момент бифуркации колебаний расщепляется на две, частота обращается в нуль и последнее обстоятельство позволяет построить кривые, выделяющие в фазовом пространстве области притяжения к нулю. В качестве приложения рассматривается движение точки по внутренней поверхности тора. Качественная теория уравнений движения по поверхности тора без особых точек принадлежит в основном А. Пуанкаре [1]. Данная задача возникла при моделировании движения специального транспортного средства по виражу и является одной из простейших моделей [2]. С другой стороны приведенный пример относится к маятниковым системам, которые иллюстрируют модификации основных принципов и уравнений динамики (см. [3], стр. 37, 41). Основное внимание в примере уделено анализу перехода от движения по тору с особыми точками (колебательное движение) к движению без особых точек (винтовое движение), а также построению области притяжения к нулю.

2. Преобразование уравнений движения

Предположим, что колебательный процесс в механической системе описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \underline{A}\bar{x} + \underline{X}(\bar{x}), \quad (\cdot) = \frac{d}{dt}, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^{2n}$ при всех $t \in R$, A – $2n \times 2n$ постоянная матрица, $X: R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ – векторный полином целых степеней. Для различных вариантов записи системы (1) вектор $X(x)$ может содержать, слагаемые в степени не ниже второй, и начиная с первой. Пусть собственные числа матрицы линейной системы, соответствующей (1) комплексно–сопряженные

$$\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \text{Re } \lambda_j \pm i \text{Im } \lambda_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

где $\text{Im } \lambda_j > 0$.

Рассмотрим два варианта записи системы уравнений (1)

а) *Первый вариант*

Система (1) записывается в виде

$$\dot{x} = A_1 x + [A_2 x + \Xi(x)], \quad (3)$$

где $A_1, A_2 - 2n \times 2n$ постоянные матрицы, $\Xi(x)$ - векторный полином, содержащий слагаемые в степени не ниже второй.

Сравнивая (1) и (3) видим, что

$$A = A_1,$$

и

$$X(x) = A_2 x + \Xi(x),$$

т.е. возмущения $X(x)$ - содержат линейные слагаемые, корни матрицы A_1 - минимые.

а) *Второй вариант*

В записи системы (1) предполагается, что

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{и} \quad X(x) = \Xi(x).$$

Корни матрицы A - комплексно-сопряженные.

Построим невырожденное линейное преобразование для соответствующей линейной системы (1)

$$y_j = \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} x_k, \quad \bar{y}_j = \sum_{k=1}^{2n} \bar{\beta}_{jk} x_k, \quad x_k = \sum_{(j)} (\alpha_{kj} y_j + \bar{\alpha}_{kj} \bar{y}_j),$$

где $\alpha_{kj}, \beta_{jk}, \bar{\alpha}_{kj}, \bar{\beta}_{jk}$ - постоянные коэффициенты преобразования, с помощью которого система (1) приводится к диагональной форме

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j + Y_j, \quad \dot{\bar{y}}_j = \bar{\lambda}_j \bar{y}_j + \bar{Y}_j, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4)$$

где

$$Y_j = \sum_{(k)} \beta_{jk} X_k(y, \bar{y}), \quad \bar{Y}_j = \sum_{(k)} \bar{\beta}_{jk} X_k(y, \bar{y}); \quad X_k(y, \bar{y}) -$$

компоненты вектор-функции, в которой вектор x выражен через векторы y, \bar{y} .

В системе (4) перейдем к переменным ϱ, θ :

$$\varrho_j = y_j e^{-i\theta_j}, \quad \varrho_j = \bar{y}_j e^{-i\theta_j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Уравнения движения системы (1) в переменных ϱ, θ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} &= \text{Re } \lambda \varrho + m(\theta) X(\varrho, \theta), \\ \varrho \dot{\theta} &= \text{Im } \lambda \varrho + k(\theta) X(\varrho, \theta), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\text{Re } \lambda$ — диагональная матрица $n \times n$. Если система (1) представлена в виде (3), то $\text{Re } \lambda = 0$, так как при этом корни матрицы A системы (3) мнимые; $m(\theta)$, $k(\theta)$ — матрицы $n \times 2n$ с элементами

$$m_{i\sigma} = \text{Re } \beta_{j\sigma} \cos \theta_j + \text{Im } \beta_{j\sigma} \sin \theta_j; \quad k_{i\sigma} = \text{Im } \beta_{j\sigma} \cos \theta_j - \text{Re } \beta_{j\sigma} \sin \theta_j;$$

$X(\varrho, \theta)$ — вектор-функция соответствующей размерности. Компоненты вектора ϱ через переменные x и θ выражаются так:

$$\varrho_j = \left(\sum_{k=1}^{2n} \text{Re } \beta_{jk} x_k \right) \cos \theta_j + \left(\sum_{k=1}^{2n} \text{Im } \beta_{jk} x_k \right) \sin \theta_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (7)$$

где

$$x_k = 2 \sum_{\sigma=1}^n \varrho_{\sigma} (\text{Re } \alpha_{k\sigma} \cos \theta_{\sigma} - \text{Im } \alpha_{k\sigma} \sin \theta_{\sigma}) \quad (k = 1, \dots, 2n). \quad (8)$$

Заметим, что переход к переменным ϱ , θ , известен (см. [4], стр. 121, [5], стр. 136, [6], стр. 96). Как показывает опыт исследования, в некоторых случаях второй вариант перехода к уравнениям в переменных ϱ , θ предпочтительнее.

3. Область притяжения

В приложениях области притяжения строятся в переменных ϱ , θ . Переход к переменным x производится по формулам (8).

Рассмотрим двухмерную систему (1), которая в переменных ϱ , θ имеет вид

$$\dot{\varrho} = \mathcal{R}(\varrho, \theta), \quad \dot{\theta} = \mathcal{T}(\varrho, \theta), \quad (9)$$

где $\mathcal{R}(\varrho, \theta)$, $\mathcal{T}(\varrho, \theta)$ — функции периодические по θ .

Уравнение по θ в системе (9) по своей физической природе обладает свойством устойчивости по Ляпунову, не обладая асимптотической устойчивостью. Вводя переменную θ , установим ее знак, например, положительный. введем определенно-положительную функцию $Y = \theta^2/2$ и производную

$$\frac{dY}{dt} = \text{Im } \lambda \theta + \theta \Theta(\varrho, \theta). \quad (10)$$

Вблизи решения $\theta = 0 - \frac{dY}{dt} > 0$. Для некоторых начальных значений ϱ , $\theta \in (0, 2\pi)$ функция $\dot{\theta}$ обратится в нуль

$$\dot{\theta}(\varrho, \theta) = 0, \quad (11)$$

или примет отрицательное значение $\dot{\theta}(\varrho, \theta) < 0$. Это означает, что переменная θ прекратила свое существование, соответственно переменная ϱ расщепляется на две, первоначально близкие.

Пусть $\varrho = 0$ — грубое равновесие, определяемое отрицательным знаком собственного числа

$$s(\theta) = \frac{\partial \mathcal{R}(0, \theta)}{\partial \varrho}. \quad (12)$$

Здесь и далее θ рассматривается в качестве параметра $\theta \in (0, 2\pi)$, интервалы по θ обусловлены непрерывностью решения $\varrho(\theta)$, полученного из уравнения

$$\mathcal{R}(\varrho, \theta) = 0. \quad (13)$$

Дадим определение области колебательных траекторий, области притяжения, основываясь на [7, 8].

Определение 1. Множество $D_\theta(t_0) \in R_+$ является областью колебательных траекторий, если

$$D_\theta(t_0) = \sum_{k=2}^N D_{\theta k}(t_0), \quad (14)$$

где

$$D_{\theta k}(t_0) = \left\{ \varrho_0 \in \mathcal{K} : \dot{\theta}(\varrho_0, \theta) \geq 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k] \right\},$$

\mathcal{K} — область в R_+ , $N - 1$ — количество интервалов по θ , обусловленных непрерывностью решений по θ .

Определение 2. Множество $D(t_0)$ является областью притяжения, если

$$D(t_0) = \sum_{k=2}^N D_k(t_0),$$

где

$$D_k(t_0) = \left\{ \varrho_0 \in \mathcal{L} : \dot{\theta}(\varrho_0, \theta) \geq 0, \quad \varrho(t; t_0, \varrho_0, \theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k] \right\},$$

\mathcal{L} — область в R_+ .

В рассматриваемом ниже примере область притяжения строится как

$$D(t_0) = D_\theta(t_0) \cap D_\varrho(t_0), \quad (15)$$

где

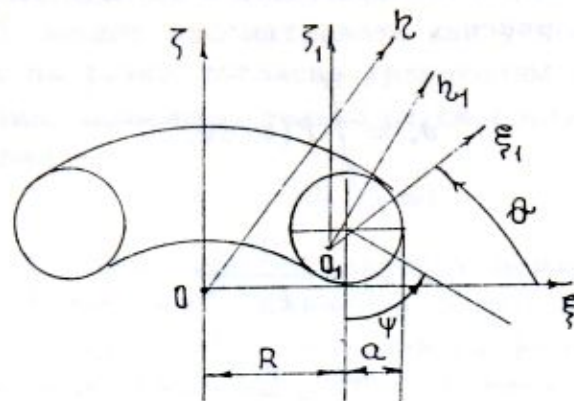
$$D_\varrho(t_0) = \sum_{k=2}^N D_{\varrho k}(t_0), \quad (16)$$

$$D_{\varrho k}(t_0) = \left\{ \varrho_0 \in Q : \varrho(t; t_0, \varrho_0, \theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k] \right\},$$

Q — область в R_+ .

4. Приложение. Движение материальной точки по внутренней поверхности тора

Рассмотрим систему второго порядка на торе. Введем на торе T_2 криволинейную систему координат ϑ, ψ (ϑ -долгота, ψ -широта) и зададим на нем динамическую систему уравнениями второго порядка (см. фиг.1)



Фиг. 1

$$\ddot{\vartheta} = f_1(\dot{\vartheta}, \psi, \dot{\psi}); \tag{17}$$

$$\ddot{\psi} = f_2(\dot{\vartheta}, \psi). \tag{18}$$

Здесь $f_1(\dot{\vartheta}, \psi, \dot{\psi})$, $f_2(\dot{\vartheta}, \psi)$ – однозначные функции на торе, периодические по ψ с периодом 2π . Пусть $f_1(\dot{\vartheta}, \psi, \dot{\psi})$; $f_2(\dot{\vartheta}, \psi)$ – удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность решения системы (17), (18).

Предположим, что система (17), (18) допускает первый интеграл

$$\dot{\vartheta} = F_1(\dot{\vartheta}_0, \psi), \tag{19}$$

где $\dot{\vartheta}_0$ – начальное значение переменной $\dot{\vartheta}$.

Уравнение (18) с учетом (19) примет вид

$$\ddot{\psi} = f_2(\dot{\vartheta}_0, \psi). \tag{20}$$

Умножим уравнение (20) на $\dot{\psi}$ и проинтегрируем, полагая, что начальное значение функции $\dot{\psi}$ равно $\dot{\psi}_0$

$$\dot{\psi}^2 = F_2(\dot{\vartheta}_0, \dot{\psi}_0, \psi). \tag{21}$$

Изображающая точка, двигаясь по тору, может совершать колебательное периодическое или условно-периодическое движение, а также винтовое периодическое или условно-периодическое движение. Рассмотрим винтовое движение. Пусть начальные условия движения механической системы таковы, что изображающая точка не имеет "остановок" на торе, т.е. уравнение (21) не имеет особых точек

$$F_2(\dot{\vartheta}_0, \dot{\psi}_0, \psi) \neq 0, \quad \forall \psi \in [0, 2\pi).$$

Отрезок координаты ϑ_* , соответствующий одному обороту изображающей точки по углу ψ , равен

$$\vartheta_* = \int_0^{2\pi} F(\psi) d\psi, \quad (22)$$

где

$$F(\psi) = \frac{F_1}{(F_2)^{1/2}}.$$

Если

$$\frac{2\pi}{\vartheta_*} = \frac{r}{p}, \quad (23)$$

где r, p – взаимно простые целые числа, то на торе T_2 имеется периодическое движение по ϑ . Так как период по ψ выражается квадратурой

$$T_\psi = \int_0^{2\pi} [F_2(\dot{\vartheta}_0, \dot{\psi}_0, \psi)]^{-1/2} d\psi,$$

то периодическое по ϑ движение имеет период

$$T_\vartheta = \frac{T_\psi r}{p}. \quad (24)$$

Задачу без особых точек рассматривал А. Пуанкаре, в работе [9] содежется ее современный анализ.

Для колебательного движения изображающей точки на торе имеют место особые точки ψ_* , ψ_{**} , фиксирующие отклонения колебаний по ψ , в этом случае отрезок ϑ_* , соответствующий одному колебанию по ψ на торе равен

$$\vartheta_* = 2 \int_{\psi_*}^{\psi_{**}} F(\psi) d\psi. \quad (25)$$

Если выполняются условия (23), то на торе имеет место периодическое движение с периодом (24), причем T_ψ – период колебаний по ψ для колебательного движения вычисляется следующим образом

$$T_\psi = 2 \int_{\psi_*}^{\psi_{**}} [F_2(\dot{\vartheta}_0, \dot{\psi}_0, \psi)]^{-1/2} d\psi.$$

Отметим одно качество колебательного движения на торе. Для колебательного движения на участке $0 < \psi < \pi$ имеет место

$$F_2(\dot{\vartheta}_0, \dot{\psi}_0, \psi) < 0 \quad \text{или} \quad \dot{\psi}^2 < 0. \quad (26)$$

Колебательное движение по тору устойчиво в смысле Ляпунова. Это определяется поверхностью (тором) движения точки. Неравенство (26)

справедливо для неустойчивого движения и в данной системе не реализуется; т.е. (26) можно рассматривать как условие нереализуемости движения. Пусть на точку, согласно уравнениям (17), (18), действует сила сопротивления, зависящая только от скорости $\dot{\psi}$, тогда уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\psi} = f_2(\dot{\psi}_0, \dot{\psi}, \psi). \quad (27)$$

Изображающая точка, двигаясь по тору может совершать колебательное и винтовое движения. Применяя переменные ϱ, θ можно определить область колебательных траекторий на фазовой плоскости $\psi, \dot{\psi}$, т.е. если изображающая точка находится в пределах указанной области, то в последующем движении она совершит колебательное затухающее движение по тору; в противном случае изображающая точка может произвести хотя бы один оборот в винтовом движении.

Рассмотрим движение материальной точки по внутренней поверхности тора, имеющего радиусы R и a ($R > a$). Введем инерциальную систему координат $O\xi\eta\zeta$ с единичными векторами \vec{i}_k ($k = 1, 2, 3$) и подвижную, связанную с движущейся точкой систему $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ ($O_1\zeta_1 \parallel O\zeta$).

Поверхность, по которой происходит движение задана в векторной форме (см. фиг.1)

$$\vec{r} = \vec{i}_1\xi + \vec{i}_2\eta + \vec{i}_3\zeta,$$

где

$$\xi = (R + a \sin \psi) \cos \vartheta; \quad \eta = (R + a \sin \psi) \sin \vartheta; \quad \zeta = a(1 - \cos \psi);$$

ψ, ϑ — координаты поверхности. Определим единичные векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 , соответствующие криволинейным осям ψ, ϑ

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right) / H_1; \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right) / H_2,$$

и введем

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}.$$

Здесь $H_1 = a, H_2 = a \sin \psi$.

Матрица прямого преобразования координатных векторов имеет вид

	\vec{i}_1	\vec{i}_2	\vec{i}_3
\vec{e}_1	$\cos \psi \cos \vartheta$	$\cos \psi \sin \vartheta$	$\sin \psi$
\vec{e}_2	$-\sin \vartheta$	$\cos \psi$	0
\vec{e}_3	$-\cos \psi \sin \vartheta$	$-\sin \psi \sin \vartheta$	$\cos \psi$

Кинетическая энергия точки T_k равна

$$2T_k = m [a^2 \dot{\psi}^2 + (R + a \sin \psi)^2 \dot{\vartheta}^2],$$

где m — масса точки.

Уравнения движения в форме Лагранжа запишутся следующим образом

$$\frac{d[m(R + a \sin \psi)^2 \dot{\vartheta}]}{dt} = 0; \quad (28)$$

$$ma^2 \frac{d\dot{\psi}}{dt} - ma \cos \psi (R + a \sin \psi) \dot{\vartheta}^2 = -mg a \sin \psi. \quad (29)$$

Пусть точка попадает на поверхность со следующими начальными условиями: при $t = 0$

$$\psi = 0; \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0; \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0. \quad (30)$$

Из уравнения (28) имеем

$$m(R + a \sin \psi)^2 \dot{\vartheta} = C,$$

где $C = mR^2 \dot{\vartheta}_0$, тогда

$$\dot{\vartheta} = \frac{C}{m(R + a \sin \psi)^2}. \quad (31)$$

Подставим (31) в уравнение (29), получим

$$a^2 \ddot{\psi} - \frac{a \cos \psi \dot{\vartheta}_0^2 R^4}{(R + a \sin \psi)^3} + ga \sin \psi = 0. \quad (32)$$

Из (32) очевидно, что колебательный характер движения точки начинается с некоторого значения $\psi_* \neq 0$. В самом деле, для малых колебаний уравнение (32) имеет вид

$$\ddot{\psi} + \left(\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{g}{a} \right) \psi - \dot{\vartheta}_0^2 \frac{R}{a} = 0. \quad (33)$$

Введем переменную

$$\xi = \psi - \frac{\dot{\vartheta}_0^2 R}{a \left(\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{g}{a} \right)},$$

тогда уравнение (33) примет вид

$$\ddot{\xi} + \left(\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{g}{a} \right) \xi = 0;$$

где $\left(\dot{\vartheta}_0^2 + g/a \right)$ — квадрат частоты малых колебаний по ψ , смещенных относительно нуля на величину

$$\psi_* = \frac{\dot{\vartheta}_0^2 R}{a \left(\dot{\vartheta}_0^2 + \frac{g}{a} \right)}. \quad (34)$$

Умножим левую часть уравнения (32) на $\frac{d\psi}{dt}$ и проинтегрируем

$$\frac{a^2 \dot{\psi}^2}{2g} = \frac{a^2 \dot{\psi}_0^2}{2g} + \dot{\vartheta}_0^2 R^2 \frac{1 - (1 - a/R \sin \psi)^{-2}}{2g} + a(\cos \psi - 1). \quad (35)$$

Пусть при $t = 0$ начальные условия таковы:

$$\psi = 0; \quad \dot{\psi}_0 = 0; \quad \dot{\vartheta}_0 \neq 0. \quad (36)$$

Тогда в области значений $0 < \psi < \pi/2$ квадрат угловой скорости $\dot{\psi}^2$, определяемый формулой (35), — величина положительная. Если при $\psi = \pi/2$ выполняется условие

$$\dot{\vartheta}_0^2 R^2 \frac{1 - R^2(R+a)^{-2}}{2g} > a,$$

то колебания по переменной ψ будут превышать угол $\pi/2$. Координаты ψ_{**} , ψ_* стационарных точек, определяющих значение отклонения при колебании по ψ , найдутся из уравнения относительно ψ

$$\frac{2g}{a}(\cos \psi - 1) + \dot{\vartheta}_0^2 R^2 \frac{1 - R^2/(R - a \sin \psi)^2}{2a^2} = 0.$$

Совершать винтовое движение с начальными условиями (36) точка не сможет, т.к. при $\psi = \pi \dot{\psi}^2 < 0$, т.е. в этом случае винтовое движение не реализуется.

Таким образом, как бы велико ни было $\dot{\vartheta}_0$, при начальных значениях (36) точка совершает колебания по ψ в пределах $0 < \psi < \pi$.

Этот результат учитывается проектировщиками бобслейных трасс, которые включают в профили виражей "улавливающую зону", расположенную сверху профиля виража и имеющую постоянный радиус.

При начальных условиях (30) винтовое движение возможно ($\dot{\psi}^2 > 0$ для $\psi \geq \pi$).

Квадратура периода колебаний, определяемых начальными условиями (30) имеет вид

$$T = 2 \int_{\psi_*}^{\psi_{**}} \left\{ \frac{2g}{a}(\cos \psi - 1) + \frac{\dot{\vartheta}_0^2 R^2}{2a^2} \left[1 - \frac{R^2}{(R + a \sin \psi)^2} \right] \right\}^{-1/2} d\psi.$$

Рассмотрим разделение траекторий при движениях точки по внутренней поверхности тора с диссипацией энергии. Пусть на точку действует сила сопротивления, зависящая от скорости $2a_c \dot{\psi}$, где $a_c = \text{const}$. Движение по тору материальной точки определится в этом случае уравнением

$$a^2 \ddot{\psi} - \frac{a \cos \psi \dot{\vartheta}_0^2 R^4}{(R + a \sin \psi)^3} + 2a_c \dot{\psi} + ga \sin \psi = 0. \quad (37)$$

Разложив элементарные функции в уравнении (37) в степенной ряд до кубических членов включительно, получим

$$\frac{\ddot{\psi}}{b} + \frac{2a_c}{a^2 b} \dot{\psi} + \psi^3 + a_2 \psi^2 + a_1 \psi + a_0 = 0; \quad (38)$$

где

$$b = - \left[\frac{g}{6a} + A \left(\frac{2a}{R} - \frac{10a^3}{R^3} \right) \right];$$

$$a_0 = -\frac{A}{b}; \quad a_1 = A \frac{3a}{R} + \frac{g}{a}; \quad a_2 = \frac{A}{b} \left(\frac{1}{2} - \frac{6a^2}{R^2} \right);$$

$$A = \frac{\vartheta_0^2 R^4}{a}.$$

Заметим, что невозмущенному движению отвечает неподвижная точка – начало координат, поэтому в уравнении (38) необходимо сделать замену переменных. Пусть

$$\varphi = \psi + p, \quad (39)$$

где φ – переменная, p – *const.*, приводит трехчлен

$$\psi^3 + a_2\psi^2 + a_1\psi + a_0, \quad (40)$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные коэффициенты, к виду

$$\varphi^3 + b_2\varphi^2 + b_1\varphi, \quad (41)$$

где b_2, b_1 – выражаются через a_0, a_1, a_2 . Ищем p следующим образом: выделим кубы и квадраты выражения $(\psi + p)$

$$a_0 + a_1\psi + a_2\psi^2 + \psi^3 = (\psi + p)^3 - (a_2 - 3p)(\psi + p)^2 +$$

$$+ (3p^2 - 2a_2p + a_1) \left[\psi + \frac{(2p^3 - a_2p^2 + a_0)}{(3p^2 - 2a_2p + a_1)} \right],$$

тогда, если p – решение уравнения

$$2p^3 - a_2p^2 + a_0 = (3p^2 - 2a_2p + a_1)p,$$

или

$$p^3 - a_2p^2 + a_1p - a_0 = 0, \quad (42)$$

то многочлен (40) приводится к виду (41), или

$$\varphi^3 + (a_2 - 3p)\varphi^2 + (3p^2 - 2a_2p + a_1)\varphi. \quad (43)$$

Вернемся к уравнению (38) и введем замену переменных вида (39). Ищем решение уравнения (42). Уравнение (42) в результате замены неизвестного $y = p - \frac{a_2}{3}$, приводится к виду

$$y^3 + ry + q = 0,$$

где

$$r = \frac{3a_1 - a_2^2}{3}; \quad q = -\frac{2a_2^3}{27} + \frac{a_1a_2}{3} - a_0.$$

Действительное решение кубического уравнения (42) отрицательное и равно

$$p = -2R \cos \frac{\delta}{3} + \frac{a_2}{3},$$

где

$$\cos \delta = \frac{q}{2R^3}; \quad R = \text{sign}(q) \sqrt{\frac{|r|}{3}}.$$

Изображающая точка движется согласно уравнению

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + c^2\varphi + a\varphi^2 + \gamma\varphi^3 = 0, \quad (44)$$

где

$$2h = \frac{2a_c}{a^2}, \quad c^2 = -b(3p^2 - 2a_2p + a_1), \quad a = b(a_2 - 3p), \quad \gamma = b.$$

Уравнение (44) в форме Коши имеет вид системы

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2; \quad \dot{\varphi}_2 = -2h\varphi_2 - c^2\varphi_1 + a\varphi_1^2 + \gamma\varphi_1^3. \quad (45)$$

Уравнение движения (45) в переменных ρ, θ имеют вид

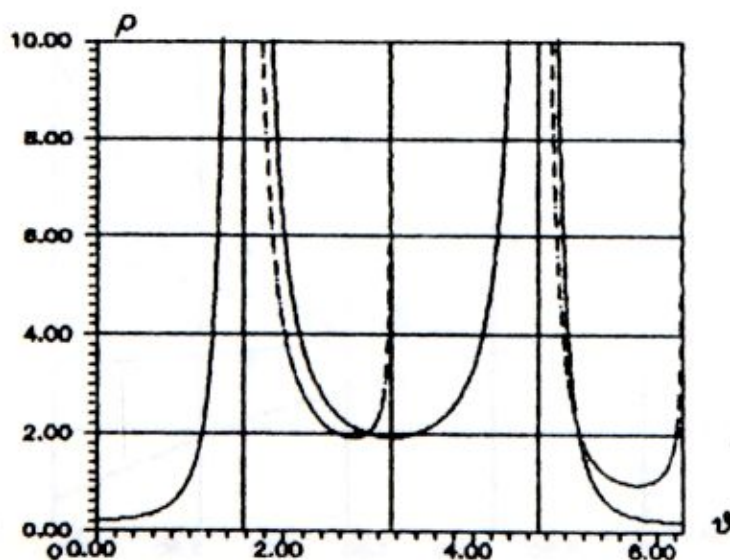
$$\dot{\rho} = -h\rho - 2^2\gamma\rho^3 \sin \theta \cos^3 \theta / \omega - 2a\rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta / \omega; \quad (46)$$

$$\dot{\theta} = \omega - 2^2\gamma\rho^2 \cos^4 \theta / \omega - 2a\rho \cos^3 \theta / \omega; \quad (47)$$

где $\omega^2 = c^2 - h^2$.

Построим кривую, отделяющую колебательные траектории на плоскости ρ, θ , из условия $\dot{\theta} = 0$; применяя (47) -

$$\rho_k = -\frac{a}{4\gamma \cos \theta} + \frac{1}{2 \cos \theta} \sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma \cos^2 \theta} + \left(\frac{a}{\gamma}\right)^2}. \quad (48)$$



Фиг. 2

На фиг.2 кривая (48) изображена сплошными линиями. Кривая, разделяющая устойчивые траектории от неустойчивых, полученная из (46) имеет физический смысл тогда, когда она разделяет устойчивые колебательные траектории от неустойчивых (на фиг.2 изображена пунктиром)

$$\rho_u = -\frac{a}{4\gamma \cos \theta} + \frac{1}{2 \cos \theta} \sqrt{\frac{-h\omega}{\gamma \sin \theta \cos \theta} + \left(\frac{a}{\gamma}\right)^2}; \quad (49)$$

для $\theta \in (\pi/2, \pi)$ и $\theta \in (3/2\pi, 2\pi)$. Здесь для I и III четвертей все колебательные траектории асимптотически устойчивы.

Перейдем к фазовой плоскости $\psi, \dot{\psi}$; $\psi > 0$. Кривые, ограничивающие колебательные движения точки, заданы параметрически при $\theta \in (0, \pi/2)$, $\theta \in (0, -\pi/2)$

$$\psi = 2\rho_k \cos \theta - p, \quad (50)$$

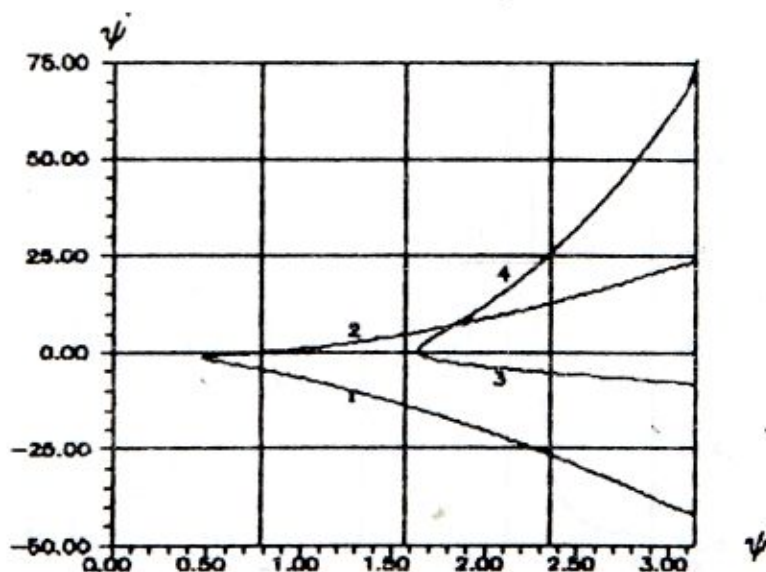
$$\dot{\psi} = 2\rho_k(h \cos \theta - \omega \sin \theta),$$

и изображены на фиг.3 линиями 1,2. Из условий устойчивости построены кривые 3,4

$$\psi = 2\rho_u \cos \theta - p, \quad (51)$$

$$\dot{\psi} = 2\rho_u(h \cos \theta - \omega \sin \theta),$$

кривые 1,2,4 на фиг.3 определяют область притяжения к нулю при движении системы с особыми точками на торе.



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пуанкаре, А., *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ОГИЗ, М., (1947), 392 с.
- [2] Никитина, Н. В., *О математическом моделировании скольжения системы твердых тел по поверхности*, Прикл. Механика. 27, 12 (1991), 102–109.
- [3] Вуйичич, В. А., Мартынюк, А. А., *Некоторые задачи механики неавтономных систем*, Белград – Киев, (1991), 110 с.
- [4] Ляпунов, А. М., *Собрание соч.*, Изд-во Акад. наук СССР, т. II (1956), 474 с.
- [5] Зубов, В. И., *Методы А. М. Ляпунова и их применение*, Изд-во Ленинградского университета, (1957), 242 с.
- [6] Мельников, Г. И., *Динамика нелинейных механических и электромеханических систем*, Машиностроение, (1975), 200 с.
- [7] Руш, Н., Абец, П., Лалуа, М., *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, (1980), 300 с.
- [8] Груйич, Л. Т., Мартынюк, А. А., Рибенс-Павелла, М., *Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях*, Киев: Наук. думка, (1984), 308 с.
- [9] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ ГИТТЛ., (1947), 448 с.

ON ATTRACTION IN ONE PROBLEM OF POINCARÉ

In the present paper we propose a method of construction of the attraction domain. We used the variables "action-angle". Bifurcation of the oscillation in one problem of Poincaré were obtained by application of the method "action-angle".

А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина
Институт механики НАН Украины
ул. Нестерова, 3
252057, Киев-57
Украина