TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 20, pp 143–151, 1994, UDK 531.36

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛИУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

А.А. Мартынюк

(Поступила 05.09.1994.)

Введение.

Задача о полиустойчивости движения [1-7] является мало изученной как в контексте общей теории, так и в плане приложений. Эта задача тесно связана с понятием устойчивости относительно части переменных [1] и развивает его.

В данной работе приведены условия экспоненциальной x_1 – устойчивости и полиустойчивости для систем с разделяющимися движениями. Условия устойчивости заданного типа получены путем применения функций Ляпунова (скалярных и матричных).

1. Постановка задачи.

Рассматривается система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f(t,x) \in C(R_+ \times D, R^n)$, $D \subseteq R^n$, так что $f(t,x) = 0 \, \forall t \in R_+$ как только $x = 0$. Пусть это состояние равновесия является единственным для системы (1).

Вектор $x \in R^n$ разделим на два субвектора $x_i \in R^{N_i}$, $i = 1,2$; $n_1 + n_2 = n$ и систему (1) перепишем так

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \tag{2}$$

где $f_i \in C(R_+ \times D, R^{n_i})$, $i = 1,2$.

Далее для норм векторов приняты обозначения

$$\| x_i \| = \left(\sum_{k=1}^{n_i} x_k^2 \right)^{1/2}, \quad \| x \| = \left(\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{2} \| x_j \|^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1,2.$$

О системе (1) соответственно (2) будем предполагать, что ее правые части непрерывны в области $R_+ \times D$, где

$$D = \{x : \|x_1\| + \|x_2\| \le H < +\infty\},$$

либо $R_+ \times D^*$, где

$$D^* = \{x : \|x_1\| \le H, \quad 0 < \|x_2\| < +\infty\}.$$

Если система (2) рассматривается в области $R_+ \times D^*$, то предполагается, что решение $x(t;\, t_0,\, x_0)$ является x_2 – продолжимым.

Сформулируем некоторые определения принимая во внимание результаты работ [6, 8, 11].

Определение 1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (1) называется экспоненциально x_1 – устойчивым (в малом), если существует $\lambda > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое что

$$\|x_1(t;\, t_0,\, x_0)\| \le \varepsilon\, exp[-\lambda(t - t_0)] \quad \text{при всех} \quad t \ge t_0 \tag{3}$$

как только $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$.

Определение 2. Состояние равновесия $x = 0$ системы (1) называется экспоненциально x_1 – устойчивым в целом, если существует $\lambda > 0$ и для любого $0 < \Delta < \infty$ существует $K(\Delta) > 0$ такое, что

$$\|x_1(t;\, t_0,\, x_0)\| \le K(\Delta)\, exp[-\lambda(t - t_0)] \quad \text{при всех} \quad t \ge t_0$$

как только $\|x_0\| < \Delta, \quad t_0 \ge 0$.

Определение 3. Состояние равновесия $x = 0$ системы (1) называется экспоненциально полиустойчивым (в малом), если для положительных постоянных r_1, r_2 и любого $\varepsilon > 0$ существуют $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0, \quad \lambda > 0$ такие, что

$$\|x_1(t;\, t_0,\, x_0)\|^{2r_1} + \|x_2(t;\, t_0,\, x_0)\|^{2r_2} \le \varepsilon\, exp[-\lambda(t - t_0)] \quad \text{при всех} \quad \forall t \ge t_0 \tag{4}$$

как только

$$\|x_0\| \le \Delta(\varepsilon),$$

где

$$\|x_0\| = \|x_{10}\| + \|x_{20}\|.$$

Определение 4. Состояние равновесия $x = 0$ системы (1) называется экспоненциально полиустойчивым в целом, если существует $\lambda > 0$ и для любого $0 < \Delta < \infty$ существует $R(\Delta) > 0$ такое, что

$$\|x_1(t;\, t_0,\, x_0)\|^{2r_1} + \|x_2(t;\, t_0,\, x_0)\|^{2r_2} \le R(\Delta)\, exp[-\lambda(t - t_0)] \quad \forall t \ge t_0$$

как только $\|x_0\| < \Delta, \quad t_0 \ge 0$.

Определение 5. (см. [10]). Две функции $\varphi_1, \varphi_2 \in K(KR)$ – классу имеют величину одного порядка, если существуют постоянные α_i, β_i $i = 1, 2$ такие, что

$$\alpha_i\varphi_i(r) \leq \varphi_j(r) \leq \beta_j\varphi_j(r) \quad i \neq j,\, i, j = 1, 2.$$

Экспоненциальные свойства решения $x = 0$ будем рассматривать в двух случаях:

Случай А. Исследуется экспоненциальная устойчивость решения $x = 0$ относительно вектора x_1, т.е. (экспоненциальная x_1 – устойчивость).

Случай Б. Исследуется экспоненциальная полиустойчивость решения $x = 0$.

Замечание 1. В определениях 3 и 4 содержательная часть понятия полиустойчивости сводится к различию скорости убывания компонент решения $x(t;\, t_0,\, x_0)$ системы (1).

2. Метод решения задач.

Исследование экспоненциальных свойств решения $x = 0$ системы (1) в случаях A и $Б$ проводится с помощью скалярной и матричной функций Ляпунова соответственно.

Итак, рассмотрим случай A. Пусть с системой (1) связана скалярная функция $V(t, x) \in C(R_+ \times D^*,\, R_+)$, $\quad V(t,\, x_1,\, x_2) = 0 \quad \forall t \in R_+$ как только $x_1 = 0$.

Теорема 1. Пусть в системе (1) вектор-функция f непрерывна на $R_+ \times D^*$ и существуют:

а) функции $V(t, x) \in C(R_+ \times D^*,\, R_+)$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ классу, имеющие величину одного порядка;

б) положительные постоянные c, γ_1 такие, что

$$c\|x_1\|^{\gamma_1} \leq V(t,\, x_1,\, x_2) \leq \varphi_1(\|x\|); \tag{5}$$

$$D^+V(t,\, x_1,\, x_2)\big|_{(1)} \leq -\varphi_2(\|x\|). \tag{6}$$

Тогда состояние равновесие $x = 0$ системы (1) экспоненциально x_1 – устойчиво в малом.

Доказательство. Для функций $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ – классу и удовлетворяющих условиям теоремы 1 существуют постоянные α_1 и β_1 такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(r) \leq \varphi_2(r) \leq \beta_1\varphi_1(r). \tag{7}$$

Из неравенств (5), (6), принимая во внимание (7), получаем

$$D^+V(t,\, x_1,\, x_2)\big|_{(1)} \leq -\alpha_1 V(t,\, x_1,\, x_2) \tag{8}$$

и далее

$$V(t,\, x(t)) \leq V(t_0,\, x_0)\, exp[-\alpha_1(t-t_0)] \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Учитывая оценку снизу функции $V(t,x)$, в неравенстве (5) получаем

$$\|\, x_1(t;\, t_0,\, x_0)\,\| \leq c^{-1/\gamma_1}\, \varphi_1^{1/\gamma_1}(\|\, x_0\,\|) exp\left[-\frac{\alpha_1}{\gamma_1}(t-t_0)\right], \quad t \geq t_0. \qquad (9)$$

Пусть $\lambda = \alpha_1/\gamma_1$ и для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = \varphi_1^{-1}(c\varepsilon^{\gamma_1})$. Тогда имеем оценку (3) как только $\|\, x_0\,\| < \delta(\varepsilon), \quad t_0 \geq 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть в системе (1) вектор-функция f непрерывна на $R_+ \times R^n$ и существуют:

а) функции $V(t,x) \in C(R_+ \times R^n,\, R_+)$ и $\varphi_1,\, \varphi_2 \in KR$ – классу, имеющие величину одного порядка;

б) положительные постоянные d, γ_2 такие, что

$$d\|\, x_1\,\|^{\gamma_2} \leq V(t,\, x_1,\, x_2) \leq \varphi_1(\|\, x\,\|); \qquad (10)$$

$$D^+V(t,\, x_1,\, x_2)\big|_{(1)} \leq -\varphi_2(\|\, x\,\|). \qquad (11)$$

Тогда состояние равновесие $x = 0$ системы (1) экспоненциально x_1 – устойчиво в целом.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 получим оценку

$$\|\, x_1(t;\, t_0,\, x_0)\,\| \leq d^{-1/\gamma_2}\, \varphi_1^{1/\gamma_2}(\|\, x_0\,\|) exp\left[-\frac{\alpha_2}{\gamma_2}(t-t_0)\right], \quad t \geq t_0. \qquad (12)$$

Обозначим $\lambda = \alpha_2/\beta_2$ и для любого $0 < \Delta < +\infty$ найдем

$$K(\Delta) = d^{-1/\gamma_2}\, \varphi_1^{1/\gamma_2}(\Delta).$$

Тогда имеем

$$\|\, x_1(t;\, t_0,\, x_0)\,\| \leq K(\Delta)\, exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \geq t_0$$

как только $\|\, x\,\| < \Delta, \quad t_0 \geq 0$.

Далее рассмотрим случай *Б*. С системой (2) будем рассматривать матричную функцию (см. [9, 12])

$$U(t,x) = [\mathcal{V}_{ij}(t,x)], \quad i,j = 1,2, \qquad (13)$$

элементы $\mathcal{V}_{ij}(t,x)$ которой удовлетворяют специальным условиям.

Предположение 1. Существуют

1) функции $\varphi_1,\, \varphi_2 \in K(KR)$ – классу, имеющие величину одного порядка;

2) постоянные $\underline{c}_{ii} > 0$, $\overline{c}_{ii} > 0$, $\underline{c}_{ij} = \underline{c}_{ji}$, $\overline{c}_{ij} = \overline{c}_{ji}$, $\quad i \neq j,\ r_i > 0, \quad i,j = 1,2;$

3) матрица-функция (13) элементы которой удовлетворяют оценкам

а) $\underline{c}_{11}\| x_1 \|^{2r_1} \le \mathcal{V}_{11}(t, x_1, x_2) < \bar{c}_{11}\varphi_1^2(\| x \|)$
$\forall (t,x) \in R_+ \times D \; (\forall (t,x) \in R_+ \times R^n)$;

б) $\underline{c}_{22}\| x_2 \|^{2r_2} \le \mathcal{V}_{22}(t, x_1, x_2) < \bar{c}_{22}\varphi_2^2(\| x \|)$
$\forall (t,x) \in R_+ \times D \; (\forall (t,x) \in R_+ \times R^n)$;

в) $\underline{c}_{12}\| x_1 \|^{r_1}\| x_2 \|^{r_2} \le \mathcal{V}_{12}(t, x_1, x_2) \le \bar{c}_{12}\varphi_1(\| x \|)\varphi_2(\| x \|)$

г) $\mathcal{V}_{12}(t, x_1, x_2) = \mathcal{V}_{12}(t, x_1, x_2)$
$\forall (t,x) \in R_+ \times D \; (\forall (t,x) \in R_+ \times R^n)$.

Лемма 1. Если выполняются все условия предположения 1, то для функции

$$V(t, x, \eta) = \eta^T U(t, x)\eta, \tag{14}$$

где $\eta \in R^2_+$ выполняется двустороннее неравенство

$$u_1^T A_1 u_1 \le V(t, x, \eta) \le u_2^T A_2 u_2 \tag{15}$$

при всех $(t, x) \in R_+ \times D\,(\forall (t,x) \in R_+ \times R^n)$.

Здесь

$$\begin{gathered} u_1^T = (\| x_1 \|^{r_1}, \| x_2 \|^{r_2}), \quad u_2^T = (\varphi_1(\| x \|), \varphi_2(\| x \|)), \\ A_1 = H^T C_1 H, \quad A_2 = H^T C_2 H, \quad H = diag\,(\eta_1, \eta_2), \\ C_1 = \begin{Bmatrix} \underline{c}_{11} & \underline{c}_{12} \\ \underline{c}_{21} & \underline{c}_{22} \end{Bmatrix}, \quad C_2 = \begin{Bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} \end{Bmatrix}. \end{gathered}$$

Доказательство. Оценка (15) получается прямой подстановкой неравенств а) – в) из предположения 1 в выражение

$$V(t, x, \eta) = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_i \eta_j \mathcal{V}_{ij}(t, x_1, x_2). \tag{16}$$

Предположение 2. Существуют

1) функции $\psi_1, \psi_2 \in K(KR)$ – классу, имеющие величину одного порядка с функциями $\varphi_1, \varphi_2 \in K(KR)$ – классу;

2) непрерывные на любом конечном интервале функции $\mu_{ij}(t)$, $i =$

$1, 2$; $j = 1, 2, \dots, 10$ такие, что

а) $D_t^+ \mathcal{V}_{ij}(t, x_i) + \left(D_{x_i}^+ \mathcal{V}_{ii}\right)^T f_i(t, x_i) \le \mu_{ii}(t)\, \psi_i^2(\| x_i \|) + r_{i1}(t, \psi)$
$\forall (t, x) \in R_+ \times D(\forall (t, x) \in R_+ \times R^n)$;

б) $\left(D_{x_i}^+ \mathcal{V}_{ii}\right)^T g_i(t, x_i) \le \mu_{i2}(t)\, \psi_1^2(\| x_i \|) + \mu_{i3}(t)\psi_1(\| x_1 \|)\psi_2(\| x_2 \|) +$
$\mu_{i4}(t)\, \psi_2^2(\| x_2 \|) + r_{i2}(t, \psi)$
$\forall (t, x) \in R_+ \times D(\forall (t, x) \in R_+ \times R^n)$;

в) $D_t^+ \mathcal{V}_{12}(t, x_i) + \left(D_{x_i}^+ \mathcal{V}_{12}\right)^T f_i(t, x_i) \le \mu_{i5}(t)\, \psi_1^2(\| x_1 \|) +$
$\mu_{i3}(t)\psi_1(\| x_1 \|)\psi_2(\| x_2 \|) + \mu_{i4}(t)\, \psi_2^2(\| x_2 \|) + r_{i3}(t, \psi)$
$\forall (t, x) \in R_+ \times D(\forall (t, x) \in R_+ \times R^n)$;

г) $\left(D_{x_i}^+ \mathcal{V}_{12}\right)^T g_i(t, x_1, x_2) \le \mu_{i9}(t)\, \psi_1(\| x_1 \|)\psi_2(\| x_2 \|) +$
$+ \mu_{i10}(t)\, \psi_2^2(\| x_2 \|) + r_{i4}(t, \psi)$
$\forall (t, x) \in R_+ \times D(\forall (t, x) \in R_+ \times R^n)$.

Здесь $f_i(t, x_i) = f_i(t, x_i, x_j) - f_i(t, x_i)$, $i, j = 1, 2$, $r_{ik}(t, \psi)$, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3, 4$ – полиномы по ψ_i, $i = 1, 2$ степени выше второй.

Лемма 2. При выполнении всех условий предположения 2, для функции $D^+ V(t, x, \eta) = \eta^T D^+ U(t, x)\eta$ верна оценка

$$D^+ V(t, x, \eta) \le u_3^T(\| x \|)\, A_3(t) u_3(\| x \|) + R(t, \psi) \quad \forall (t, x) \in R_+ \times D(\forall (t, x) \in R_+ \times R^n). \tag{17}$$

Здесь $u_3^T(\| x \|) = (\psi_1(\| x \|), \psi_2(\| x \|))$, $A_3(t)$ – 2×2 матрица, непрерывная на каждом конечном интервале с элементами:

$$a_{11}(t) = \eta_1^2(\mu_{11}(t) + \mu_{12}(t)) + \eta_2^2 \mu_{22}(t) +$$
$$2\eta_1\eta_2(\mu_{15}(t) + \mu_{18}(t) + \mu_{25}(t) + \mu_{28}(t));$$
$$a_{22}(t) = \eta_1^2 \mu_{14}(t) + \eta_2^2(\mu_{21}(t) + \mu_{24}(t) +$$
$$2\eta_1\eta_2(\mu_{17}(t) + \mu_{110}(t) + \mu_{27}(t) + \mu_{210}(t));$$
$$a_{12}(t) = a_{21}(t) = \frac{1}{2}(\eta_1^2 \mu_{13}(t) + \eta_2^2 \mu_{23}(t)) +$$
$$\eta_1\eta_2(\mu_{16}(t) + \mu_{19}(t) + \mu_{26}(t) + \mu_{29}(t)),$$
$$R(t, \psi) = \eta_1^2(r_{11}(t, \psi) + r_{12}(t, \psi)) + \eta_2^2(r_{21}(t, \psi) + r_{22}(t, \psi)) +$$
$$2\eta_1\eta_2(r_{13}(t, \psi) + r_{14}(t, \psi) + r_{23}(t, \psi) + r_{24}(t, \psi)).$$

Если матрица $A_3(t)$ определенно-отрицательная при всех $t \in R_+ = [0, \infty)$, тогда для любого $\mu \in (0, 1)$ существует $H(\mu) > 0$ такое, что при $x \in \Omega(H) \subset D$, $\Omega(H) = \{x : \| x \| < H(\mu)\}$ выполняется оценка

$$|R(t, \eta)| < -\mu\, u_3^T(\| x \|)\, A_3(t)\, (\| x \|) \tag{18}$$

при всех $t \in R_+$ и оценка (17) принимает вид

$$D^+V(t,x,\eta) \le (1-\mu)u_3^T(\|x\|)\,A_3(t)\,u_3(\|x\|) \tag{19}$$

в области $(t,x) \in R_+ \times \Omega$.

$\|u\| = (u^T u)^{1/2}$ евклидова норма вектора u в конусе $K = \{u : u \ge 0\}$.

Лемма 3. Для квадратичных форм $u_1^T A_1 u_1$ и $u_2^T A_2 u_2$ верны оценки

$$\kappa_{\min}(A_1)u_1^T u_1 \le u_1^T A_1 u_1 \le \kappa_{\max}(A_1)u_1^T u_1 \tag{20}$$

$$\kappa_{\min}(A_2)u_{20}^T u_{20} \le u_{20}^T A_2 u_{20} \le \kappa_{\max}(A_2)u_{20}^T u_{20} \tag{21}$$

где $u_{20}^T = (\varphi_1(\|x\|), \varphi_2(\|x\|))$.

Доказательство леммы 3 стандартно для квадратичных форм.

Теорема 3. Пусть в системе (1) вектор-функция f непрерывна на $R_+ \times \Omega$ и

1) выполняются условия предположений 1 и 2;

2) матрицы A_1 и A_2 положительно-определенные;

3) при всех $t \in R_+$ матрица $A_3(t)$ отрицательно-определенная.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1) экспоненциально полиустойчиво в малом.

Доказательство. Из условия 1) предположения 2 следует, что для квадратичных форм $u_2^T A_2 u_2$ и $\psi^T A_3 \psi$ существуют постоянные $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\, u_2^T A_2 u_2 \le \psi^T A_3 \psi \le \beta\, u_2^T A_2 u_2. \tag{22}$$

Из оценки (19), учитывая (22) получаем

$$\eta^T D^+U(t,x)\eta \le -\alpha(1-\mu)\eta^T U(t,x)\eta. \tag{23}$$

Из (23) находим

$$V(t,x(t),\eta) \le V(t_0,x_0,\eta)\,exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{24}$$

Вследствие лемм 1 и 3 имеем

$$u_1^T(t)\,A_1\,u_1(t) \le u_{20}^T A_2 u_{20}\,exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{25}$$

и далее

$$\kappa_{\min}(A_1)u_1^T(t)\,u_1 \le \kappa_{\max}(A_2)u_{20}^T u_{20}\,exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)] \quad t \ge t_0. \tag{26}$$

Обозначим $\alpha = \kappa_{\min}^{-1}(A_1)\kappa_{\max}(A_2)$ и оценку (26) представим так

$$\|x_1(t)\|^{2r_1} + \|x_2(t)\|^{2r_2} \le \alpha\left(\varphi_1^2(\|x_0\|) + \varphi_2^2(\|x_0\|)\right) \times$$
$$exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{27}$$

Так как функции $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ – калссу имеют величину одного порядка, (см. условие 1 предположение 1), то найдется функция $\varphi \in K$ – классу такая, что

$$\varphi_1^2(\| x_0 \|) + \varphi_2^2(\| x_0 \|) \leq \varphi^2(\| x_0 \|). \tag{28}$$

Неравенство (27) будет выполняться вслед за неравенством

$$\| x_1(t) \|^{2r_1} + \| x_2(t) \|^{2r_2} \leq \alpha\varphi^2(\| x_0 \|)exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \geq t_0. \tag{29}$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = min\left(H(\mu),\, \varphi_1^{-1}(\alpha^{-1/2}\varepsilon^{1/2})\right)$ и обозначим $\lambda = \alpha(1-\mu)$, $0 < \mu < 1$. Тогда, из (29) следует, что как только $\| x_0 \| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \geq 0$, то

$$\| x_1(t) \|^{2r_1} + \| x_2(t) \|^{2r_2} \leq \varepsilon exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \geq t_0,$$

т.е. разделяющиеся движения системы (1) экспоненциально полиустойчивы. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть в системе (1) вектор-функция f непрерывна на $R_+ \times R^n$ и

1) выполняются условия предположений 1 и 2 с функциями $\varphi_1, \varphi_2 \in KR$ – классу и $\phi_1, \psi_2 \in KR$ – классу соответственно;

2) при любом $\mu \in (0, 1)$ неравенство (18) выполняется для значений $(t, x) \in R_+ \times R^n$;

3) выполняются условия 2) и 3) теоремы 3

Тогда состояние равновесия $x = 0$ систем (1) экспоненциально полиустойчиво в целом.

Доказательство. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 3 получаем неравенство (29) в котором функция $\varphi(\| x_0 \|) \in KR$ – классу. Обозначим, как и выше, $\lambda = \alpha(1-\mu)$ $0 < \mu < 1$ и для любого $0 < \Delta < +\infty$ выберем $R(\Delta)$ в виде $R(\Delta) = \alpha\varphi^2(\Delta)$, тогда ясно, что как только $\| x_0 \| < \Delta$, $t_0 \geq 0$ имеем оценку

$$\| x_1(t) \|^{2r_1} + \| x_2(t) \|^{2r_2} \leq R(\Delta)exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \geq t_0.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аминов, А. Б, Сиразетдинов, Т. К., *Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения*, Прикладаная математика и механика, 5 (1987), 709–716.

[2] Мартынюк, А. А., *Одна теорема о полиустойчивости*, Докл. АН СССР, 4 (1991), 808–811.

[3] Мартынюк, А. А., *Новое направление в методе матричных функций Ляпунова*, Там же. 3 (1991), 554–557.

[4] Мартынюк, А. А., Чернецкая, Л. Н., *О полиустойчивости линейных автономных систем*, Докл. АН Украина, 8 (1993), 17–20.

[5] Мартынюк, А. А., Чернецкая, Л. Н., *О полиустойчивости линейных автономных систем с периодическими коэффициентами*, Докл. АН Украина, 11 (1993).

[6] Мартынюк, А. А., *Об экспоненциальной полиустойчивости разделяющих движений*, Докл. АН России, (1994).

[7] Мартынюк, А. А., *О полиустойчивости движения относительно части переменных*, Докл. АН России, 1, (1992) 39–41.

[8] Мартынюк, А. А., *Об экспоненциальной устойчивости относительно части переменных*, Докл. АН России, 1, (1993) 17–19.

[9] Мартынюк, А. А., *О матрице-функции Ляпунова и устойчивости движения*, Докл. АН СССР, **5** (1985), 1062–1066.

[10] Hahn, W., *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin, (1967), 448 pp.

[11] He Jianxun, Wang Musong, *Remarks on exponential stability by comparison functions of the same order magnitude*, Ann. of Diff. eqs. **7(4)** (1991), 409–414.

[12] Martynyuk, A. A., *The Lyapunov matrix function*, Nonlinear Analysis, **8** (1984), 1223–1226.

ON EXPONENTIAL POLYSTABILITY OF MOTION

In the present paper conditions for exponential x_1 – stability and polystability are established for systems with splitting motions. The stability conditions of given type were obtained by application of scalar or matrix Lyapunov functions.

А.А. Мартынюк
Институт механики НАН Украины
ул. Нестерова, 3
252057, Киев-57
Украина