TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 20, pp 119–129, 1994, UDK 531.01

# О ТЕНЗОРНЫХ ИНВАРИАНТАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

*В.В. Козлов*

(Поступила 18.10.94.)

## 1. Тензорные инварианты.

Пусть $\mathcal{M}^3$ – гладкое компактное трехмерное многообразие и $v$ – касательное поле без особых точек. Оно порождает динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathcal{M} \tag{1}$$

Тензорное поле $x \to T(x)$ называется инвариантом динамической системы (1), если

$$\mathcal{L}_v T = 0, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}_v$ – производная Ли вдоль векторного поля $v$. Другими словами,

$$T\left(g_v^t(x)\right) = T(x),$$

где $g_v^t$ – фазовый поток системы (1).

Простейший тензорный инвариант нулевого ранга (функция на $\mathcal{M}$) называется, как известно, интегралом системы (1). Теноры первого ранга – это векторные поля $u$ и 1 – формы $\varphi$. Как известно,

$$\mathcal{L}_v u = [u,\, v].$$

Следовательно, инвариантные поля являются полями симметрий: фазовые потоки $g_v^t$ и $g_u^s$ коммутируют.

Инвариантной 1-форме $\varphi\,(\mathcal{L}_v\varphi = 0)$ отвечает абсолютный интегральный инвариант:

$$\int\limits_{g_v^t(\gamma)} \varphi = \int\limits_{\gamma} \varphi \tag{3}$$

для любого гладкого пути $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}$ и для всех значений $t$. Если

$$\mathcal{L}_v \varphi = dg,$$

где $g$ – некоторая гладкая функция на $\mathcal{M}$, то форма $\varphi$ порождает относительный интегральный инвариант: равенство (3) справедливо для всех замкнутых путей $\gamma$.

Особо следует выделить случай, когда инвариантная 1-форма $\varphi$ замкнута: локально $\varphi = df$, где $f$ – некоторая гладкая функция. По формуле гомотопии,

$$\mathcal{L}_v \varphi = i_v\, d\varphi + d\, i_v\, \varphi = d\varphi(v) = 0.$$

Следовательно, $\varphi(v) = c = const.$ и поэтому

$$i_v\, df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot v = c.$$

Если $c \neq 0$, то вдоль решений системы (1) функция $f$ линейно растет со временем. Если $c = 0$, то замкнутую инвариантную 1-форму $\varphi$ будем называть многозначным интегралом.

С точки зрения эргодической теории важное значение имеют инвариантные формы объема $\omega$: значение 3-формы $\omega$ на любых трех линейно независимых векторах отлично от нуля. Форма объема $\omega$ задает каноническую ориентацию $\mathcal{M}$:

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \omega > 0.$$

Поэтому инвариантая форма объема является гладкой инвариантной мерой.

В дальнейшем рассматриваются системы с инвариантной формой объема. Важный пример дают гамильтоновы системы с двумя степенями свободы

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad k = 1, 2 \tag{4}$$

Предположим, что трехмерный уровень интеграла энергии

$$\mathcal{M} = \{p, q : \quad H(p, q) = h\} \tag{5}$$

является неособым и компактным. В частности, гамильтоново поле (4) касается $\mathcal{M}$ и не имеет особых точек. Гамильтонова система на $\mathcal{M}$ допускает гладкую инвариантную меру: это ограничение инвариантной 4-формы Лиувилля $dp \wedge dq$ на $\mathcal{M}$.

Особый интерес представляют гамильтоновы системы (4), описывающие геодезические линии римановых метрик на замкнутых двумерных поверхностях $\mathcal{N}$. При положительных значениях $h$ многообразие $\mathcal{M}$ устроено как расслоенное пространство с базой $\mathcal{N}$ и слоем $\mathcal{S}^1$ (окружность). При всех значениях $h > 0$ динамические системы на (5) изоморфны. Они называются геодезическим потоком на $\mathcal{N}$ и полностью определяются римановой метрикой. Более подробно с этими вопросами можно познакомиться, например, по статье [1].

## 2. Теоремы об интегрируемости

Как хорошо известно, для точного интегрирования уравнений (1) в общем случае достаточно иметь два независимых интеграла. Однако, в рассматриваемой ситуации, когда система (1) допускает инвариантную меру, достаточно знать всего один интеграл.

**Теорема 1** (*Эйлер–Якоби–Колмогоров*). Предположим, что система (1) имеет локально непостоянный интеграл $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Тогда

(1) *уравнения (1) интегрируются в квадратурах,*
(2) *каждая связаная компонента регулярного уровня интеграла* $\sum_c = \{x \in \mathcal{M} : \quad f(x) = c\}$ *диффеоморфна двумерному тору,*
(3) *на этом торе можно ввести угловые координаты* $\psi_1$, $\psi_2$ $mod 2\pi$, *такие, что уравнения (1) на* $\sum_c$ *принимают следующий вид:*

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\omega_1}{F} \quad \dot{\psi}_2 = \frac{\omega_2}{F}$$

где $\omega_1, \omega_2 = const.$, $F$ – положительная $2\pi$ – периодическая функция от $\psi_1$, $\psi_2$.

Доказательство теоремы 1 можно найти в [2]. Если уравнения (1) допускают многозначный интеграл, то они интегрируются с помощью квадратур. Вопрос о структуре фазового потока системы (1) с многозначным интегралом остается пока открытым.

Укажем простой пример эргодической системы с многозначными интегралами: $\mathcal{M}$ – трехмерный тор с угловыми координатами $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ $mod\, 2\pi$, а уравнения (1) имеют вид

$$\dot{\psi}_k = \omega_k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{6}$$

причем частоты $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ нерезонансны (соотношение $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = 0$ с целыми $m_k$ влечет $m_1 = m_2 = m_3 = 0$). Уравнения (6) допускают стандартную инвариантную меру $d\psi_1 \wedge d\psi_2 \wedge d\psi_3$ и два независимых многозначных интеграла

$$\omega_2\, d\psi_1 - \omega_1\, d\psi_2, \quad \omega_3\, d\psi_2 - \omega_2\, d\psi_3.$$

Согласно известной теореме Ли, для точного интегривования уравнений (1) достаточно знать два коммутирующих поля симметрий. Однако, для интегрирования систем с инвариантной мерой хватает одного нетривиального поля симметрий.

**Теорема 2.** *Предположим, что система (1) с инвариантной формой объема допускает поле симметрий* $u$. *Тогда эта система имеет многозначный интеграл. Если, кроме того,*

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = 0, \tag{7}$$

*то имеется непостоянный однозначный интеграл.*

Приведем доказательство этого утверждения, впервые отмеченного в [3]. Все необходимые факты из теории внешних можно можно найти, например, в [4].

Так как $\omega$ – форма объема и $\mathcal{L}_u\omega$ является 3-формой, то

$$\mathcal{L}_u \omega = f \omega \tag{8}$$

где $f$ – некоторая гладкая функция на $\mathcal{M}$. Далее,

$$\mathcal{L}_v \mathcal{L}_u \omega = \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v \omega = 0$$

ввиду инвариантности $\omega$. Поэтому

$$\mathcal{L}_v (f_u) = (\mathcal{L}_v f) \omega + f \mathcal{L}_v \omega = \dot{f}\omega = 0.$$

Так как $\omega \neq 0$, то $\dot{f} = 0$. Следовательно, $f$ – интеграл системы (1). Если функция $f$ непостоянна, то теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай, когда $f \equiv c = const$. Тогда из (8) получаем:

$$d(i_u \omega) = c\omega.$$

Интегрируя обе части этого равенства по компактному многообразию $\mathcal{M}$ и применяя формулу Стокса, приходим к равенству

$$c \int\limits_{\mathcal{M}} \omega = 0.$$

Так как $\omega$ – форма объема, то $c = 0$. Итак, в этом случае форма $\omega$ инвариантна относительно фазового потока, порождаемого полем $u$: $\mathcal{L}_u\omega = 0$.

Рассмотрим теперь 1-форму

$$\varphi = i_v\, i_u\, \omega = \omega(u,\, v,\, \cdot\,).$$

Покажем, что эта форма замкнута и инвариантна.

Действительно,

$$\begin{aligned} d\varphi = d\, i_v(i_u \omega) = \mathcal{L}_v(i_u \omega) - i_v\, d(i_u \omega) = \\ = i_u\, \mathcal{L}_v\, \omega + i_{[v,u]}\omega - i_v\, \mathcal{L}_v\, \omega + i_v\, i_u\, d\omega = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v\, \varphi = \mathcal{L} i_v(i_u \omega) = i_v\, \mathcal{L}_v(i_u \omega) = \\ = i_v\, i_u\, \mathcal{L}_u\, \omega + i_v\, i_{[v,u]}\, \omega = 0. \end{aligned}$$

Итак, локально $\varphi = df$, где $f$ – гладкая функция. Поскольку

$$0 = \omega\,(u,\, v,\, v) = i_v\, \varphi = i_v\, df = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot v,$$

то функция $f$ является интегралом. Следовательно, $\varphi$ – многозначный интеграл. Так как $\omega$ – форма объема, то $\varphi \neq 0$, если векторы $u$, $v$ линейно независимы. Наконец, если выполнено (7), то каждая замкнутая 1-форма будет точной. Теорема доказана.

**Следствие 1.** При условиях теоремы 2. уравнения (1) интегрируются с использованием дифференцирований и квадратур.

Дополнительные к квадратурам дифференцирования требуются для отыскания множителя $f$ из соотношения (8).

**Следствие 2.** Если система с инвариантной мерой на трехмерном компактном многообразии с нулевым первым числом Бетти допускает нетривиальное поле симметрий, то она не может быть эргодической.

Примером служит геодезический поток на двумерной сфере. В этом случае $\mathcal{M}$ диффеоморфно $\mathcal{SO}(3)$ и поэтому выполнено равенство (7).

С другой стороны, на трехмерном торе имеются эргодические динамические системы с инвариантной мерой и нетривиальными симметриями (см. (6)).

Обобщим теперь свойства динамических систем, допускающих инвариантную 1-форму $\varphi$. Справедлива простая:

**Теорема 3.** *Если $f = \varphi(v)$ - локально непостоянная функция, то $f$ – непостоянный интеграл уравнений (1) и поэтому уравнения (1) интегрируются в квадратурах.*

Действительно,

$$\mathcal{L}_v f = \mathcal{L}_v (i_v, \varphi) = i_v \mathcal{L}_v \varphi = 0.$$

В предположении теоремы 3 структура фазового потока динамической системы описывается теоремой 1.

**Теорема 4.** *Пусть уравнения (1) допускают инвариантную 1-форму $\varphi$, такую что*

(1) *$\varphi \wedge d\varphi$ - форма объема,*

(2) *$d\varphi(v) \neq 0$.*

*Тогда уравнения (1) имеют нетривиальное поле симметрий.*

**Доказательство.** Положим $\Phi = d\varphi$. Так как многообразие $\mathcal{M}$ трехмерно, то в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ найдется ненулевой вектор $u(x)$, такой, что

$$i_u \Phi = \Phi(u, \cdot) = 0.$$

Ниже будет показано, что в предложениях теоремы 4 найдется единственный вектор $u(x)$, удовлетворяющий условиям

$$i_u \Phi = 0, \quad \varphi(u) = 1. \tag{9}$$

Оказывается, поле $u$ – искомое поле симметрий.

Для доказательства воспользуемся теоремой о выпрямлении: так как поле $v$ не имеет особенностей, то в окрестности каждой точки на $\mathcal{M}$ можно ввести локальные координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$, в которых уравнения (1) принимают вид

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = 1. \tag{10}$$

Пусть

$$\varphi = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3.$$

Так как форма $\varphi$ – инвариант системы (10), то коэффициенты $a_k$ не зависят от координаты $x_3$. Вычислим дифференциал формы $\varphi$:

$$\Phi = \xi\, dx_1 \wedge dx_2 + \eta\, dx_2 \wedge dx_3 + \zeta\, dx_3 \wedge dx_1,$$
$$\xi = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \quad \eta = \frac{\partial a_3}{\partial x_2}, \quad \zeta = \frac{\partial a_3}{\partial x_1}.$$

Вектор $u$ с компонентами $\eta, \zeta, \xi$ является аннулятором формы $\Phi$. Поскольку $d\varphi(v) \neq 0$, то

$$\eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)^2 \neq 0 \tag{11}$$

Следовательно, если $i_\omega \Phi = 0$, то $\omega = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Так как 3-форма $\varphi \wedge d\varphi$ –форма объема, то

$$a_1\eta + a_2\zeta + a_3\xi \neq 0.$$

Заметим, что левая часть этого неравенства совпадает с $\varphi(u)$. Таким образом, в каждой точке имеется единственный вектор $u$, удовлетворяющий системе (9), причем его компоненты не зависят от $x_3$. Отсюда вытекает, что поля $u$ и $v$ коммутируют. Ввиду (11), векторы $u$, $v$ линейно независимы. Теорема доказана.

Поле $v$, функция $f = \varphi(v)$ и 2-форма $\Phi = d\varphi$ связаны соотношением

$$i_v\, \Phi = -df.$$

Оно аналогично уравнению Ламба из гидродинамики идеальной жидкости (см. [5]). Так как

$$0 = i_u\, i_v\, \Phi = i_u\, dg = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u,$$

то функция $f$ постоянна не только на "линиях тока" (фазовых траекториях системы (1)), но и на интегральных кривых поля $u$. Этот факт является аналогом теоремы Бернулли из гидродинамики. Поле $u$ играет роль поля ротора скорости, а функция $f$ – аналог интеграла Бернулли. Трехмерное многообразие $\mathcal{M}$ расслоено на регулярные "поверхности Бернулли"

$$\Sigma_c = \{x \in \mathcal{M}: \quad f(x) = c\},$$

диффеоморфные двумерным торам, которые несут на себе условно– периодические движения.

Теорема 4 фактически доказана в [5] для гамильтоновых систем на трехмерных энергетических многообразиях.

Обсудим, наконец, вопросы, связанные с наличием у системы (1) относительного интегрального инварианта: это 1-форма $\varphi$, такая, что

$$\mathcal{L}_v \varphi = dg, \quad g : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \tag{12}$$

Положим

$$\Phi = i_v \omega.$$

Ясно, что 2-форма $\Phi$ замкнута и инвариантна относительно фазового потока системы (1). Действительно,

$$d\Phi = di_v \omega = \mathcal{L}_v \omega - i_v d\omega = 0,$$
$$\mathcal{L}_v \Phi = \mathcal{L}_v i_v \omega = i_v \mathcal{L}_v \omega = 0.$$

Поэтому локально

$$\Phi = d\varphi.$$

Так как $i_v \Phi = 0$, то

$$\mathcal{L}_v \varphi = i_v d\varphi + di_v \varphi = d(i_v \varphi).$$

Следовательно, форма $\varphi$ порождает "локальный" относительный интегральный инвариант. Роль функции $g$ из (12) играет $i_v \varphi = \varphi(v)$.

Если класс когомологий 2-формы $\Phi$ равен нулю, то 1-форма $\varphi$ корректно определена в целом. В частности, это заведомо так, если

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = 0.$$

В силу двойственности Пуанкаре, это равенство эквивалентно равенству (7). Как следствие получаем, что динамическая система на $\mathcal{S}^3$ или $\mathcal{SO}(3)$ с инвариантной мерой всегда обладает нетривиальным относительным интегральным инвариантом.

**Лемма.** Пусть $\Psi$ – произвольная 2-форма на $\mathcal{M}$. Найдется векторное поле $u(x)$, такое, что

$$\Psi = i_u \omega.$$

В аналитическом случае поле $u$, конечно, будет аналитическим.

**Теорема 5.** *Предположим, что 1-форма $\psi$ порождает относительный интегральный инвариант. Положим $\Psi = d\psi$ и*

$$\Psi = i_u \omega.$$

Тогда векторное поле $u$ будет полем симметрий. Если, кроме того,

$$\Psi \neq \lambda(x)\,(i_v \omega), \quad \lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \tag{13}$$

то векторы $u(x)$ и $v(x)$ почти всюду независимы.

**Следствие 1.** В условиях теоремы 5 система (1) имеет непостоянный многозначный интеграл и интегрируется с помощью конечного числа алгебраических операций (включая обращение функций), дифференцирований и квадратур.

Для доказательства надо воспользоваться теоремой 2.

**Следствие 2.** Пусть выполнено (7) и имеется два относительных интегральных инварианта, порождаемых 1-формами $\psi_1$ и $\psi_2$, причем, их дифференциалы $d\psi_1$ и $d\psi_1$ почти всюду независимы. Тогда система (1) имеет непостоянный однозначный интеграл.

Две формы $\Psi_1$ и $\Psi_2$ считаются линейно зависимыми в точке $x$, если найдутся числа $c_1$ и $c_2$ $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$, такие, что

$$c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x)$$

будет формой, принимающией лишь нулевые значения.

Доказательство теоремы 5. По определению относительного интегрального инварианта,

$$dg = \mathcal{L}_v\, \psi.$$

Слдеовательно,

$$0 = d\,dg = d\mathcal{L}_v\, \psi = \mathcal{L}_v\, d\psi = \mathcal{L}_v\, i_u\, \omega =$$
$$= \mathcal{L}_v\, i_u\, \omega - i_u\, \mathcal{L}_v\, \omega = i_{[v,u]}\, \omega.$$

Так как форма объема невырождена, то поля $u$ и $v$ коммутируют. Они, очевидно, независимы, если выполнено неравенство (13). Что и требовалось.

### 3. Несуществование тензорных инвариантов

Начиная с этого момента мы будем рассматривать аналитический случай: многообразие $\mathcal{M}$ снабжено аналитической структурой, относительно которой векторное поле $v$ и инвариантная форма объема $\omega$ будут аналитическими объектами. Мы будем интересоваться условиями существования дополнительных нетривиальных аналитических тензорных инвариантов. Более точно, речь пойдет об интегралах, полях симметрий и относительных интегральных инвариантах.

Замечание. В [6] и [7] приведены примеры аналитических систем дифференциальных уравнений, которые допускают интегралы и поля симметрий класса гладкости $C^k$ $(k \geq 0)$ и не имеют при этом интегралов и полей симметрий гладкости $C^{k+1}$. Более того, это справедливо и для $k = \infty$; при этом символ $k+1$ соответствует аналитическому случаю.

Рассмотрим три ситуации, которые часто встречаются в приложениях.

**A.** Пусть $\Gamma$ –объединение всех невырожденных замкнутых траекторий системы (1). Напоменим, что периодическая траектория $\gamma$ называется невырожденной, если оба ее мультипликатора отличны от единицы. Мы будем предполагать, что множество $\Gamma$ является ключевым: любая аналитическая функция на $\mathcal{M}$, обращающаяся в нуль на $\Gamma$, тождественно равна нулю на всем $\mathcal{M}$.

Примером служит $Y$ – систем (см., например, [1]). Хорошо известно, что все периодические траектории гиперболичны (следовательно, невырождены) и множество $\Gamma$ всюду плотно в $\mathcal{M}$.

Родственным примером служит частный вариант ограниченной задачи трех тел, предложенный А.Н. Колмогоровым: два массивных тела обращаются вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам с ненулевым эксцентриситетом, а третье тело нечтожно малой массы все время движется по прямой, ортогональной плоскости массивных тел [8]. Расширенное фазовое пространство этой неавтономной системы трехмерно. Из результатов работы В.М. Алексеева [8] выводится ключевое свойство множества гиперболических траекторий.

**В.** Предположим, что имеется две гипроболические периодические траектории $\gamma_1$ и $\gamma_2$ (не исключается, что $\gamma_1 = \gamma_2$). Пусть $\Lambda_1^+(\Lambda_2^-)$ – устойчивая (неустойчивая) асимптотическая поверхность траектории $\gamma_1(\gamma_2)$. Эти поверхности регулярны и аналитичны. Мы будем предполагать, что $\Lambda_1^+$ и $\Lambda_2^-$ пересекаются и не совпадают.

Если эти поверхности пересекаются трансверсально, то отсюда можно вывести, что множество всех гиперболических периодических траекторий будет ключевым (см., например, [9]).

**С.** Система (1) – геодезический поток на замкнутой аналитической поверхности рода $\geq 1$.

По формул Гаусса–Бонне, средняя кривизна такой поверхности отрицательна. Если бы кривизна была отрицательной всюду, то геодезический поток был бы $Y$ – системой. С.В. Болотин показал [11], что найдется неустойчивая периодическая траектория, у которой асимптотические поверхности пересекаются не совпадая.

**Теорема 6.** *Предположим, что выполнено одно из условий* **A**, **B** *или* **C**. *Тогда*

(1) *любой интеграл (в том числе и многозначный) сводится к постоянной,*

(2) *любое поле симметрий имеет вид $\lambda v$, где $\lambda = const.$,*

(3) *любая 1-форма $\varphi$, порождающая относительный интегральный инвариант, имеет вид*

$$d\varphi = c\, i_v\, \omega, \quad c = const.$$

**Следствие**. Если система (1) имеет относительный интегральный инвариант, то любой другой инвариант отличается только постоянным множителем.

Например, в случае **С** относительным интегральным инвариантом служит инвариант Пуанкаре

$$\oint \sum p_s \, dq_s \tag{14}$$

который вычисляется на замкнутых кривых, лежащих на трехмерной интегральной поверхности

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{H}(p, q) = h > 0\}\,.$$

Если речь идет об инвариантах во всем четырехмерном фазовом пространстве, то интеграл (14) надо умножить на функцию от гамильтониана $\mathcal{H}$.

Отсюда в качестве тривиального следствия сразу следует известная теорема Ли Хуа Джуна [12]: универсальный относительный интегральный инвариант уравнений Гамильтона отличается от инварианта Пуанкаре (14) лишь постоянным множителем. Слово "универсальный" означает, что этот инвариант не зависит от выбора гамильтониана. На самом же деле каждая конкретная гамильтонова система со сложным поведением фазовых траекторий вообще не допускает никаких других относительных интегральных инвариантов.

**Замечание.** В предположениях **A** и **B** система (1) может иметь ненулевые инвариантные 1-формы. Однако, в этих случаях любая другая инвариантная 1-форма будет отличаться постоянным множителем.

Заключение 1 теоремы 6 доказано в работе [10]. Правда, там рассматривались однозначные интегралы. Доказательство отсутствия многозначных интегралов не приводит к затруднениям принципиального характера.

Заключение 2 теоремы 6 в предположениях **A** и **B** установлено в [13], а в предположении **C** – в работе [7].

Заключение 3 выводится из теоремы 5 с использованием заключения 2.

**Автор признателен С.В. Болотину и В.В. Тену за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.**

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аносов, Д.В., Синай, Я.Г., *Некоторые гладкие эргодические системы*, Успехи матем. наук., **Т. 22** Вып. 5 (1967), 107–172.

[2] Козлов, В.В., *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, Москва: Изд–во Моск. ун–та (1980).

[3] Bolotin, S.V., Kozlov, V.V., *Simmetry fields of geodesic flows*, Rus. J. Math. Phys., (to appear).

[4] Godbillon, C., *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann: Paris, (1969).

[5] Козлов, В.В., *Гидродинамика гамильтоновых систем*, Вестник Моск. ун–та. Сер. Математика, механика, 6 (1983), 10–22.

[6] Kozlov, V. V., *Phenomena of nonintegrability in Hamiltonian sistems*, Procs. Int. Congr. Math., Berkeley, USA (1986), 1161–1170.

[7] Козлов, В. В., *О группах симметрий геодезических потоков на замкнутых поверхностях*, Матема. заметки, **48** Вып. 5 (1990), 62–67.

[8] Алексеев, В. М., *Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика*, Успехи матем. наук, **36** Вып. 4 (1981), 161–176.

[9] Nitecki, Z., *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*, Cambridge, Massachusetts and London: MIT Press, (1971).

[10] Козлов, В. В., *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике*, Успехи матем. наук, **38** Вып. 1 (1983), 3–67.

[11] Bolotin, S. V., *Homoclinic orbits of geodesic flows on surfaces*, Rus. J. Math. Phys., **1**, N 3 (1993), 275–288.

[12] Hwa-Chung-Lee, *The universal integral invariants of Hamiltonian systems and application of canonical transformations*, Proc. R. Soc. of Edinburgh, Sect. A. V.X11 Part 3, (1946–48), 237–246.

[13] Козлов, В. В., *О группах симметрий динамических систем*, Прикл. матем. и механика, **52** Вып. 4 (1988), 531–541.

## ON TENSOR INVARIANTS OF DYNAMICAL SYSTEMS ON THREEDIMENTIONAL MANYFOLDS

We consider dynamical systems on compact threedimensional manifolds which have an invariant volume form. An important example is given by Hamilton equations of a system with two degrees of freedom restricted to three-dimensional lever surface of the energy integral. In this system we study the existence of tensor invariants (a first integral, a symmetry field, an invariant form) and give conditions of integrability by quadratures under the existence of a tensor invariant. We show that the infinite number of nondegenerate periodic trajectories and spliting of separatices obstruct the existence of nontrivial integral invariants analytical on the three- dimensional manifeld.

В.В. Козлов
Московскиjи Государственный Университет
Механико–математический факультет
119899 Москва ГСП–1
Россия