

## SOLUTION APPROCHEE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE DANS UN DIFFUSEUR PLAN

*R. Ašković*

(Reçu le 28.07.1994.)

### 1. Introduction

On utilise souvent pour les machines hydrauliques les modèles comportant un disque (annulaire) et deux plaques radiales, perpendiculaires au disque, soit en écoulement produit par un puits linéaire (fig. 3a) soit en écoulement produit par une source linéaire (fig. 3b). Afin de traiter les écoulements de ce type, c'est-à-dire, la couche limite turbulente plane établie suffisamment loin du disque, nous allons développer une méthode approchée, par la suite, en utilisant une nouvelle variante de la théorie phénoménologique sémi-empirique [1], fondée sur une analogie avec des lois rhéologiques de puissance largement utilisées dans l'étude des écoulements de liquides non-newtoniens à viscosité non linéaire. Il est à souligner qu'on y néglige aussi bien la sous-couche visqueuse que celle située au-dessus de la zone où on utilise habituellement la loi universelle logarithmique, d'où une méthode assez simple et efficace "à une seule couche". On a également montré dans le cas du modèle de turbulence de Karman [1] que, par l'intermédiaire de juste deux constantes, par exemple:  $n = 2/3$  et  $k_n = 0,55$ , cette nouvelle variante de la théorie phénoménologique de la couche limite turbulente a permis de recalculer et de reconfirmer toutes les 33 couches limites turbulentes, choisies comme étalon pour la Conférence de Stanford [2].

### 2. Couche limite turbulente plane

Il est pratiquement impossible d'obtenir les équations de la couche limite turbulente d'une façon stricte, en partant des équations générales de Reynolds. C'est pourquoi, on se sert plutôt d'une analogie intuitive avec la couche limite laminaire, en considérant les dérivées longitudinales inférieures par rapport à celles transversales et en remplaçant la deuxième équation par une condition de petitesse de gradient normal de la pression par rapport à celui longitudinal. C'est ainsi donc que l'on obtient les équations de la couche limite turbulente

plane sous la forme suivante:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_e u_e' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$
(1)

où:

$(x, y)$  - coordonnées curvilignes orthogonales habituelles,

$\bar{u}, \bar{v}$  - composantes de la vitesse en  $(x, y)$  dans la couche limite,

$u_e(x)$  - vitesse extérieure à la frontière de la couche limite,

$\tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'}$  - contrainte de cisaillement globale, contenant en principe tant la partie visqueuse que celle turbulente.

Si l'on néglige la partie visqueuse de la contrainte globale, le système d'équations (1) se réduit à:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = -u_e u_e' + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$
(2)

où d'après la loi rhéologique de puissance et le modèle de turbulence de Prandtl choisi ici, on a que:

$$\frac{1}{\rho} \tau = \nu k_n T^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$
(3)

$$T = \frac{y^2}{\nu} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|.$$
(4)

Le système d'équations (2) doit être résolu pour les conditions aux limites suivantes:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{pour } y = 0,$$
(5)

$$\bar{u} = u_e(x), \quad \tau = 0 \quad \text{pour } y = \delta(x),$$

ainsi que pour la condition initiale suivante:

$$\bar{u} = u_0(y) \quad \text{pour } x = x_0,$$
(6)

où  $\delta(x)$  est l'épaisseur de la couche limite.

Pour calculer la couche limite turbulente, on utilise dans la pratique encore le plus souvent une relation intégrale obtenue du système d'équations (2), dite équation de perte de quantité de mouvement, sous la forme suivante:

$$\frac{d\delta}{dx} + \frac{u_e'}{u_e} \delta (2 + H) = \bar{\tau}_0, \quad (7)$$

où:

$$\delta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy, \quad \delta' = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{u_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy, \quad (8)$$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{\rho \cdot u_e^2} = \frac{1}{2} c_f, \quad \frac{\delta'}{\delta} = H.$$

Enfin, si l'on élimine du système d'équations (2) l'inconnue  $\bar{v}$  par:

$$\bar{v} = - \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy, \quad (9)$$

alors il vient:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = -u_e u_e' + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy. \quad (10)$$

## 2.1 Généralisation de l'équation de Falkner-Skan

Soit la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite:

$$u_e(x) = C(x - x_0)^m, \quad (11)$$

où  $C$ ,  $x_0$  et  $m$  - sont les constantes. Si l'on introduit les coordonnées adimensionnelles:

$$\bar{x} = \frac{U_0 \cdot x}{\nu}, \quad \bar{y} = \frac{U_0 \cdot y}{\nu}, \quad (12)$$

alors la constante  $U_0$  (ayant dimension d'une vitesse) peut être déterminée par la relation:

$$u_e(x) = C(x - x_0)^m = U_0(\bar{x} - \bar{x}_0)^m \quad (13)$$

où:

$$\bar{x}_0 = \frac{U_0 \cdot x_0}{\nu}. \quad (14)$$

Ainsi, de (12) et (13), on aura:

$$U_0 = \nu^{\frac{m}{1+m}} C^{\frac{1}{1+m}} \quad (15)$$

Si l'on cherche la solution de l'équation (10) sous la forme:

$$\bar{u} = U_0(\bar{x} - \bar{x}_0)^{\alpha-\beta} F'(\eta) \quad (16)$$

où:

$$\eta = \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - \bar{x}_0)^\beta}, \quad (17)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les constantes dont les valeurs numériques seront déterminées par la suite, alors en remplaçant (3), (4), (13) et (16) dans l'équation (10), après quelques transformations, on obtiendra:

$$\begin{aligned} k_n(\bar{x} - \bar{x}_0)^{\alpha(1+n)-3\beta} \cdot (t^n F'')' &= \\ &= (\bar{x} - \bar{x}_0)^{2(\alpha-\beta)-1} \left[ (\alpha - \beta) F'^2 - \alpha F F'' \right] - m(\bar{x} - \bar{x}_0)^{2m-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Il est évident que les conditions de séparer les variables  $\bar{x}$  et  $\eta$  dans l'équation (18) soient:

$$\alpha - \beta = m, \quad (19)$$

$$\alpha(1+n) - 3\beta = 2m - 1,$$

d'où on exprime les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  par les données  $n$  et  $m$ :

$$\alpha = \frac{1+m}{2-n}, \quad \beta = \frac{1+m}{2-n} - m, \quad (20)$$

Pour ces valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , l'équation (18) se réduit à une équation différentielle ordinaire:

$$k_n (t^n F'')' = -\frac{1+m}{2-n} F F'' - m(1 - F'^2), \quad (21)$$

où:

$$t = \eta^2 F'', \quad (22)$$

laquelle doit être résolue pour les conditions aux limites suivantes:

$$F = F' = 0, \quad \text{pour } \eta = 0, \quad (23)$$

$$F' = 1, \quad t^n F'' = 0, \quad \text{pour } \eta = \eta_0 = \text{constante},$$

obtenues en remplaçant (3), (4) et (16) dans (5).

À noter que pour  $n = 0$  et  $k_n = 1$ , l'équation (21) se ramène à l'équation bien connue de Falkner-Skan dans le cas de la couche limite laminaire. C'est-à-dire, on vérifie facilement que pour  $n = 0$  et  $k_n = 1$ , les relations (3) et (4) se ramènent à la loi rhéologique linéaire laminaire newtonienne:

$$\frac{\tau}{\varrho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

En intégrant l'équation (21) entre  $\eta = 0$  et  $\eta = \eta_0$ , on aura l'équation algébrique suivante:

$$c = \left( \frac{1+m}{2-n} + m \right) \bar{\eta} + m\eta, \quad (24)$$

où  $c$ ,  $\dot{\eta}$  et  $\ddot{\eta}$  sont les coefficients dépendant de  $m$  et  $n$ :

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{u_e \dot{\delta}}{\nu} = \dot{\eta}(\bar{x} - \bar{x}_0)^{\frac{1+m}{2-n}}, \\ \ddot{R} &= \frac{u_e \ddot{\delta}}{\nu} = \ddot{\eta}(\bar{x} - \bar{x}_0)^{\frac{1+m}{2-n}}, \\ \bar{\tau}_0 &= \frac{\tau_0}{\rho \cdot u_e^2} = \frac{1}{2} c_f = c(\bar{x} - \bar{x}_0)^{-\frac{1-n}{2-n}(1+m)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Ces expressions doivent être complétées encore par la relation:

$$R_\delta = \frac{u_e \delta}{\nu} = \eta_0(\bar{x} - \bar{x}_0)^{\frac{1+m}{2-n}}, \quad (26)$$

qui détermine l'épaisseur de la couche limite.

L'équation différentielle généralisée de Falkner-Skan (21) a été résolue [6] numériquement pour différentes paires de valeurs  $n$  et  $k_n$ . Pour le calcul des couches limites turbulentes avec gradients de pression, les valeurs suivantes sont du plus grand intérêt:

$$n = 2/3, \quad k_n = 0,55,$$

$$n = 3/4, \quad k_n = 0,53.$$

À noter enfin qu'il existe [6] des tableaux des valeurs numériques des coefficients figurant dans les formules (25) et (26):  $c$ ,  $\eta_0$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\ddot{\eta}$  correspondant aux différentes paires de valeurs  $n$  et  $k_n$ , et aux différentes valeurs de  $m$ .

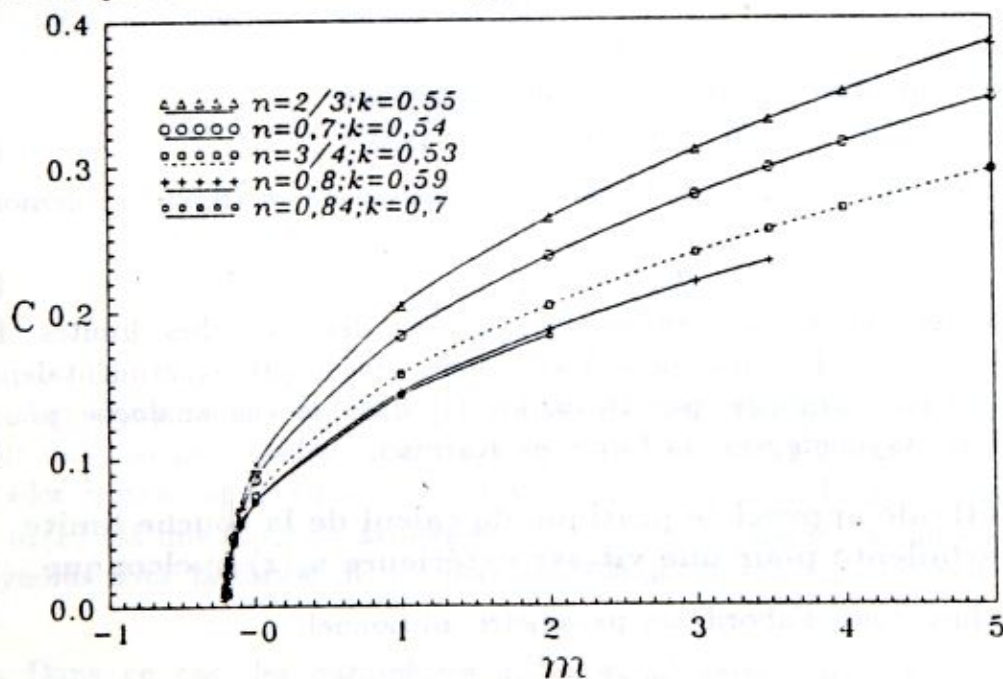


Figure 1.

La figure 1 donne le coefficient  $c$ , utilisé dans la formule pour la contrainte pariétale (25), en fonction de  $m$  et pour les divers  $n$ . Évidemment, pour toute paire de valeurs  $n$  et  $k_n$ , il existe une valeur  $m = m_{\min}$  délimitant le domaine d'existence de la solution du cas considéré (11) (appelé encore souvent la couche limite équilibrée). Les valeurs de  $m_{\min}$  dépendent peu de  $n$  et varient dans l'intervalle:

$$-0,2235 \leq m_{\min} \leq -0,1905. \quad (27)$$

Les points d'intersection des courbes  $c = f(m)$  avec l'axe  $m$  donnent les valeurs critiques de  $m = m_{cr} < 0$ , pour lesquelles la contrainte pariétale s'annule, ce qui annonce le décollement de la couche limite.

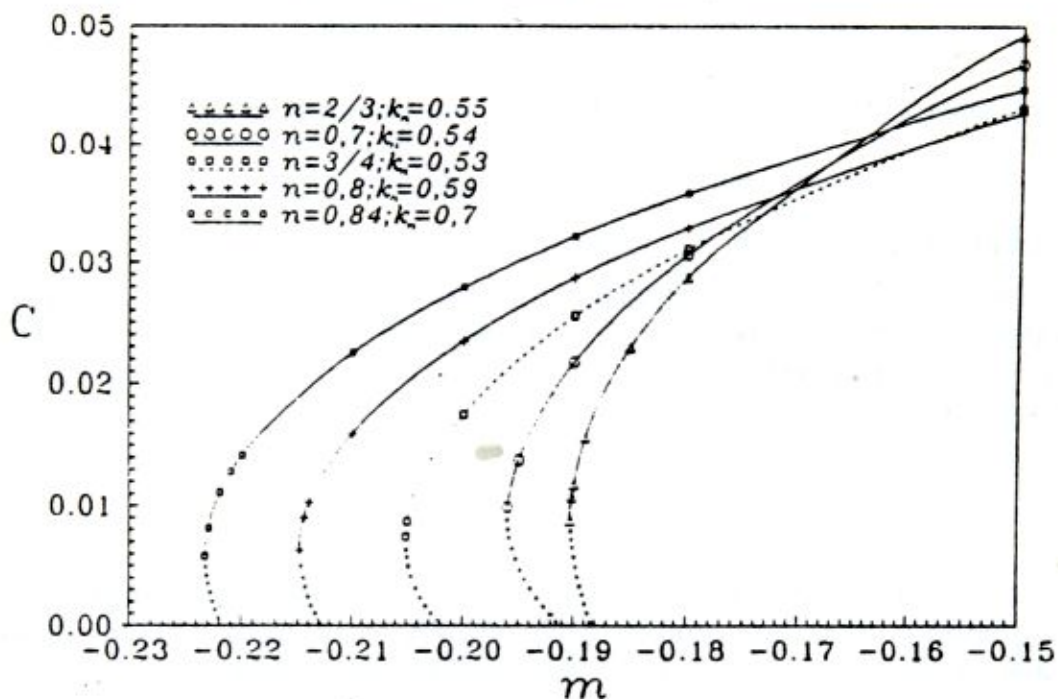


Figure 2.

La figure 2 montre que  $m_{cr}$  varie dans l'intervalle:

$$-0,2220 \leq m_{cr} \leq -0,1885. \quad (28)$$

Une analyse détaillée de la zone de valeurs négatives de  $m$  (figure 2) démontre que, dans l'intervalle:

$$m_{\min} \leq m \leq m_{cr}, \quad (29)$$

il peut  $y$  exister, pour une seule valeur de  $m$ , deux couches limites dites équilibrées, ce qui est le phénomène bien connu, découvert expérimentalement par Clauser [3] et reconfirmé par Novozilov [1] dans le cas analogue pour le nombre local de Reynolds sous la forme de Karman.

## 2.2. Méthode approchée pratique de calcul de la couche limite turbulente pour une vitesse extérieure $u_e(x)$ quelconque

On introduit, tout d'abord, un paramètre additionnel:

$$g(x) = \frac{\nu}{u_e^2} u_e'. \quad (30)$$

Puis, si l'on revient pour l'instant au cas de la couche limite dite équilibrée, étudiée ci-avant au §2.1 et caractérisée par (11) et (14), il est alors facile, en appliquant (30), de trouver:

$$g(x) = m(\bar{x} - \bar{x}_0)^{-(1+m)}, \quad (31)$$

ainsi que, tenant compte de (25):

$$\dot{R} = \dot{\eta} \left(\frac{m}{g}\right)^{\frac{1}{2-n}}, \quad \ddot{R} = \ddot{\eta} \left(\frac{m}{g}\right)^{\frac{1}{2-n}}, \quad c_f = 2c \left(\frac{g}{m}\right)^{\frac{1-n}{2-n}}. \quad (32)$$

Si l'on introduit, maintenant, pareillement au cas classique [4], une grandeur adimensionnelle suivante:

$$Q(x) = g(\ddot{R})^{2-n}, \quad (33)$$

alors, tenant compte des relations (31) et (32), on ramène (33) à:

$$Q(x) = g(\ddot{R})^{2-n} = g \left[ \ddot{\eta} \left(\frac{m}{g}\right)^{\frac{1}{2-n}} \right]^{2-n} = m(\ddot{\eta})^{2-n}, \quad (34)$$

d'où:

$$\ddot{\eta} = \left(\frac{Q}{m}\right)^{\frac{1}{2-n}},$$

c'est-à-dire  $\ddot{\eta}$  est fonction juste de  $Q$ .

Il est commode, ensuite, de constater que les deux grandeurs suivantes sont également fonction uniquement de  $Q$ :

$$c_f(\ddot{R})^{1-n} = 2c \left(\frac{g}{m}\right)^{\frac{1-n}{2-n}} \left[ (\ddot{\eta})^{1-n} \left(\frac{m}{g}\right)^{\frac{1-n}{2-n}} \right] = 2c(\ddot{\eta})^{1-n} = G(Q), \quad (35)$$

$$H = \frac{\delta}{\ddot{\eta}} = \frac{\dot{\eta}}{\ddot{\eta}} = H(Q).$$

Les deux relations précédentes (35) ne sont valables, très exactement, que pour des couches limites équilibrées, considérées au §2.1, mais on peut accepter qu'elles restent approximativement valables aussi bien dans un cas plus général où  $u_e(x)$  est une fonction arbitraire. À noter que dans le cas du nombre local de Reynolds sous la forme de Karman, la même hypothèse s'est très bien justifiée [1].

Dans ce cas, les paramètres  $\delta$ ,  $c_f$  et  $H$  seront donc exprimés par deux grandeurs: un paramètre  $g$ , donné par (30), et un autre paramètre inconnu  $Q$ . Or, une équation différentielle pour la détermination du paramètre  $Q$  peut être

obtenue en remplaçant les expressions (35) dans l'équation intégrale de perte de quantité de mouvement (7), transformée préalablement sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2-n} \frac{d}{dx} (\ddot{R})^{2-n} + (1+H) \frac{u_e \cdot g}{\nu} (\ddot{R})^{2-n} = \frac{1}{2} \frac{u_e \cdot c_f}{\nu} (\ddot{R})^{1-n}. \quad (36)$$

Il s'ensuit donc l'équation différentielle pour calculer  $Q$ , tenant compte de la forme arbitraire de la fonction  $u_e(x)$ :

$$\frac{dQ}{dx} + E(Q) \frac{u_e'}{u_e} = \frac{u_e''}{u_e'} Q, \quad (37)$$

où:

$$E(Q) = (2-n) \left\{ [1+H(Q)] Q - \frac{1}{2} G(Q) \right\} + 2Q. \quad (38)$$

Il est à remarquer que la fonction  $E(Q)$  dépend de  $n$ , non seulement explicitement, mais aussi par l'intermédiaire des fonctions  $G(Q)$  et  $H(Q)$  dont les formes dépendent de  $n$  et peuvent être déterminées à l'aide des tableaux numériques pour les couches limites équilibrées. Dans ce sens, on peut constater que pour toute valeur particulière de  $n$ , on aura "sa propre équation" (37) et "sa propre formule" (38).

Comme de nombreux calculs des couches limites turbulentes planes, expérimentalement vérifiées, l'ont démontré [1] dans le cas du modèle de turbulence de Karman, le meilleur accord avec les résultats expérimentaux a été obtenu dans le cas où on prend pour la détermination de  $E(Q)$  que:  $n = 2/3$  et  $k_n = 0,55$ . C'est pourquoi donc, juste pour pouvoir comparer nos résultats, nous allons considérer, par la suite, le même cas. Or, dans ce cas particulier ( $n = 2/3$ ,  $k_n = 0,55$ ) et pour le modèle de turbulence de Prandtl (4), nous avons effectué les calculs détaillés des fonctions  $E(Q)$ ,  $G(Q)$  et  $H(Q)$ , d'où les expressions analytiques approchées suivantes:

$$\begin{aligned} E(Q) &= -0,063 + 4,097Q - 23,163Q^2, \\ G(Q) &= -0,0938 + 2,1143Q + 36,1035Q^2 + 984,7348Q^3, \\ H(Q) &= 1,6529 - 2,17Q. \end{aligned} \quad (39)$$

Ainsi, en rapportant (39) dans (37), pour un calcul approché de la couche limite turbulente, dans le cas  $n = 2/3$ , on aura une équation différentielle du type Riccati:

$$\frac{dQ}{dx} + (-0,063 + 4,097Q - 23,163Q^2) \frac{u_e'}{u_e} = \frac{u_e''}{u_e'} Q. \quad (40)$$

Néanmoins, cette équation n'est pas toujours très commode pour le calcul, à cause de singularité possible au passage de la fonction  $u_e'$  par zéro. De plus, dans l'équation (40) on a aussi  $u_e''$  dont la détermination exige une double dérivation



de la courbe expérimentale  $u_e$ , d'où proviennent très souvent des erreurs importantes. Pour éviter tout cela, il faut changer la fonction inconnue dans l'équation (40) de la façon suivante:

$$z = \frac{Q}{g}, \quad (41)$$

où:

$$z(x) = (\ddot{R})^{4/3} = \left( \frac{u_e \cdot \ddot{\delta}}{\nu} \right)^{4/3}. \quad (42)$$

Avec la nouvelle fonction inconnue  $z(x)$ , l'équation (40) se ramène à une autre équation du type Riccati:

$$\frac{dz}{dx} - 23,163 \frac{\nu}{u_e^3} (u_e')^2 z^2 + 2,097 \frac{u_e'}{u_e} z = 0,063 \frac{u_e}{\nu}, \quad (43)$$

mais celle-ci est privée des inconvénients mentionnés. C'est pourquoi, dans la pratique, l'équation (43) est beaucoup plus commode pour intégration que celle (40).

Par conséquent, la méthode approchée pratique de calcul de la couche limite turbulente, proposée ici, consiste à faire les pas suivants:

- Tout d'abord, pour une distribution de vitesse extérieure  $u_e(x)$  donnée, intégrer l'équation différentielle (43), avec la condition initiale de prescription de  $\delta$  pour  $x = x_1$ :

$$z = \left( \frac{u_e \ddot{\delta}}{\nu} \right)^{4/3} = z_1 \quad \text{pour } x = x_1. \quad (44)$$

- Après avoir trouvé  $z(x)$ , déterminer l'épaisseur de perte de quantité de mouvement par:

$$\ddot{\delta}(x) = \frac{\nu}{u_e} z^{3/4}, \quad (45)$$

ainsi que le paramètre  $Q(x)$  par (30) et (41), à savoir:

$$Q(x) = g(x) z(x). \quad (46)$$

- Le pas suivant est la détermination des fonctions  $G(Q)$  et  $H(Q)$ , en utilisant les relations (39).
- Les formules:

$$H(x) = H(Q), \quad c_f = z^{-1/4} G(Q) \quad (47)$$

offrent les deux caractéristiques particulièrement importantes de la couche limite turbulente.

- Enfin, en utilisant l'idée la plus simple bien connue, on pourra calculer une approximation améliorée de la vitesse moyenne dans la couche limite par:

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left[ \frac{y}{\delta} \frac{H-1}{H(H+1)} \right]^{\frac{1}{2}(H-1)}, \quad (48)$$

où les fonctions  $\delta(x)$  et  $H(x)$  ont été déterminées préalablement par les formules (45) et (47).

### 3. Application de la méthode

#### 3.1. Cas élémentaire général: $u_e(x) = U_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-k}$ , $x \geq 0$ , $k \geq 0$

En effet, il s'agit de deux surfaces divergentes (c'est-à-dire, deux plaques radiales pour  $k = 1$ , fig. 3b) en écoulement produit par une source linéaire.

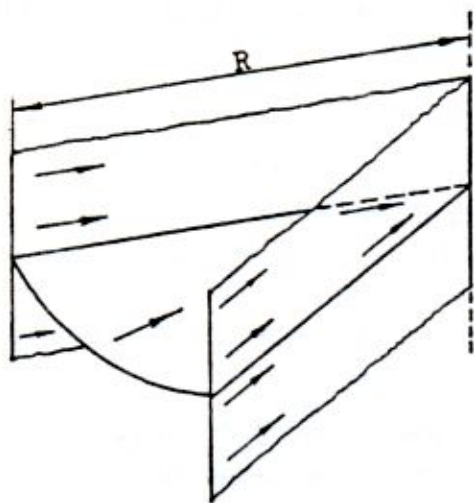


Figure 3a

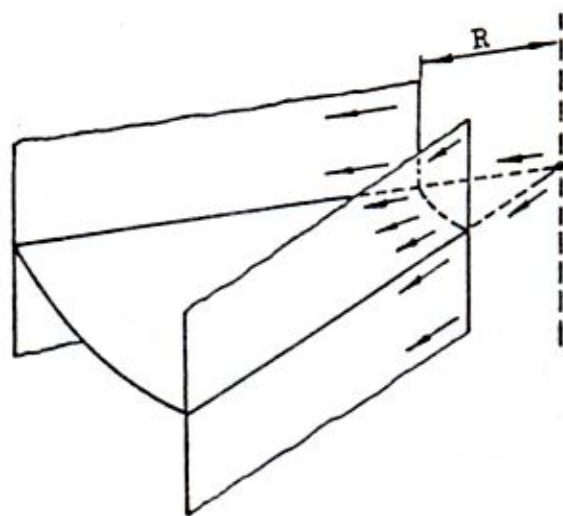


Figure 3b

Si l'on remplace:

$$u_e = U_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-k} \quad (49)$$

dans (43), on aura:

$$\frac{dz}{dx} = 23,163 \frac{k^2}{LR_e} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{k-2} z^2 + 2,097 \frac{k}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-1} z + 0,063 \frac{R_e}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-k}, \quad (50)$$

avec:  $R_e = \frac{U_0 L}{\nu}$ . En cherchant la solution sous la forme:

$$z(x) = \frac{LR_e}{23,163 k^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{2-k} M(x) + N(x) \quad (51)$$

et en choisissant encore que:

$$N(x) = \frac{1 - 1,5485k}{23,163 k^2} R_e \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{1-k}, \quad (52)$$

alors l'équation différentielle (50) du type Riccati sera ramenée sous la forme canonique suivante:

$$M' = M^2 - \frac{0,93858 k^2 - 1,5485 k}{(L + x)^2}. \quad (53)$$

En supposant la solution de cette équation comme suit:

$$M(x) = \frac{a}{L+x},$$

on trouve de (53):

$$a^2 + a - (0,93858 k^2 - 1,5485 k) = 0,$$

d'où:

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm w}{2},$$

avec:

$$w = (3,75432 k^2 - 6,194 k + 1)^{1/2}, \quad (54)$$

c'est-à-dire, il y aura deux solutions réelles:

$$a_1 = \frac{-1 + w}{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-1 - w}{2},$$

pour toutes les autres valeurs de  $k$ , sauf pour:

$$0,18139 < k < 1,46844, \quad (55)$$

à savoir:

$$M_1(x) = \frac{a_1}{L+x}, \quad M_2(x) = \frac{a_2}{L+x}.$$

Si l'on fait, ensuite, un nouveau changement de fonction:

$$M(x) = \frac{1}{S(x)} + M_1(x), \quad (56)$$

alors l'équation différentielle pour la fonction  $S(x)$  sera la suivante:

$$S' - \frac{1+w}{L+x} S = -1, \quad (57)$$

avec une solution particulière déjà connue:

$$S_1(x) = \frac{1}{w}(L+x).$$

En calculant encore la solution homogène générale:

$$S_h = C(L+x)^{1+w},$$

alors la solution générale de l'équation différentielle complète (57) sera donc:

$$S(x) = C(L+x)^{1+w} + \frac{1}{w}(L+x).$$

Puis, on trouve de (56):

$$M(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{L+x} \frac{(w-1) - Cw(w+1)(L+x)^w}{1 + Cw(L+x)^w}. \quad (58)$$

Ainsi donc la fonction recherchée  $z(x)$  est définie par l'expression (51) avec les fonctions  $M(x)$  et  $N(x)$  données par (52) et (58). La constante d'intégration sera déterminée à l'aide de la condition initiale  $z(0) = 0$  comme suit:

$$C = \frac{w - 3,097k + 1}{w(w + 3,097k - 1)} L^{-w}. \quad (59)$$

Afin de revérifier les résultats obtenus précédemment et de trouver à la fois la solution aussi bien pour l'intervalle (55) interdit jusqu'à présent, nous allons réétudier le problème d'une autre manière. C'est-à-dire, on a d'après (49) que:

$$u_e(x) = C(x + L)^m, \quad (60)$$

avec:  $C = U_0 L^k$  et  $m = -k$ . En remplaçant (60) dans (40), on obtiendra:

$$(x + L) \frac{dQ}{dx} = 23,163 m Q^2 - (1 + 3,097 m) Q + 0,063 m, \quad (61)$$

soit en introduisant une nouvelle variable:

$$\lambda = 23,163 m \ln(x + L), \quad (62)$$

l'équation précédente se ramène à:

$$\frac{dQ}{d\lambda} = Q^2 - \left(0,1337 + \frac{0,04317}{m}\right) Q + 0,00272. \quad (63)$$

Il est facile de démontrer que les solutions de l'équation:

$$Q^2 - \left(0,1337 + \frac{0,04317}{m}\right) Q + 0,00272 = 0 \quad (64)$$

sont imaginaires si:

$$-1,46844 < m < -0,18139, \quad (65)$$

mais réelles pour toutes les autres valeurs de  $m$  en dehors de cet intervalle (65).

Or, si les deux solutions réelles de l'équation (64) sont:

$$Q_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \left(0,1337 + \frac{0,04317}{m}\right) \pm \left(0,00699 + \frac{0,01154}{m} + \frac{0,00186}{m^2}\right)^{1/2} \right], \quad (66)$$

alors dans ce cas l'équation différentielle (63) peut être transformée à:

$$\frac{1}{Q_1 - Q_2} \left( \frac{dQ}{Q - Q_1} - \frac{dQ}{Q - Q_2} \right) = d\lambda$$

dont la solution générale est la suivante:

$$\ln \frac{Q - Q_1}{Q - Q_2} = (Q_1 - Q_2)(\lambda + \lambda_0),$$

ou en choisissant la constante d'intégration sous la forme plus commode:

$$\lambda_0 = -23,163 m \ln C_0, \quad (67)$$

il s'ensuit, tenant compte de (62):

$$\frac{Q - Q_1}{Q - Q_2} = \left( \frac{x + L}{C_0} \right)^{23,163m(Q_1 - Q_2)} \quad (68)$$

D'où, enfin, pour  $m$  hors de l'intervalle (65):

$$Q(x) = \frac{Q_1 - q Q_2}{1 - q}, \quad (69)$$

avec une abréviation:

$$q = \left( \frac{x + L}{C_0} \right)^{23,163m(Q_1 - Q_2)}, \quad (70)$$

où la constante d'intégration  $C_0$ , ayant évidemment une unité de longueur sera déterminée à l'aide de la condition initiale (44) connue pour  $z(x)$ . Or, puisque d'après (30) et (60):

$$g(x) = -\frac{k}{R_e} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^{k-1},$$

donc  $g(0) = 0$ , alors la condition  $z(0) = 0$  implique que  $Q(0) = 0$ , c'est-à-dire, en tenant compte de (69) et (70), on obtiendra:

$$C_0 = L \left( \frac{Q_2}{Q_1} \right)^{\frac{1}{23,163k(Q_2 - Q_1)}} \quad (71)$$

Ainsi donc la solution (69), valable hors de l'intervalle (65), devient tout à fait complète.

Pour des valeurs de l'exposant  $m$ , situées dans l'intervalle (65), la solution générale de l'équation différentielle (63) est la suivante:

$$\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{1}{p} \left( Q - 0,06685 - \frac{0,02158}{m} \right) = \lambda + \lambda_0,$$

d'où la nouvelle fonction présentant le paramètre  $Q(x)$ , compte tenu de (67):

$$Q(x) = 0,06685 + \frac{0,02158}{m} + p \operatorname{tg} \left[ 23,163 m p \ln \left( \frac{x + L}{C_0} \right) \right], \quad (72)$$

avec:

$$p = \sqrt{-0,001747 - \frac{0,00288}{m} - \frac{0,000465}{m^2}}, \quad (73)$$

$$C_0 = L e^{-\frac{1}{23,163kp} \operatorname{arctg} \frac{0,06685k - 0,02158}{kp}} \quad (74)$$

### 3.2. Cas élémentaire particulier d'un DIFFUSEUR PLAN

En tenant compte de (49), on a de (30):

$$g(x) = -\frac{k}{R_e} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{k-1}, \quad (75)$$

ainsi que selon (45):

$$\ddot{\delta}(x) = \frac{L}{R_e} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^k z^{3/4}. \quad (76)$$

Ensuite, la relation (46) donne la paramètre  $Q(x)$ , ce qui détermine complètement les fonctions  $G(Q)$  et  $H(Q)$ , conformément à (39); enfin,  $c_f(x)$  sera calculé par (47) pour chaque valeur particulière de  $k$ .

À titre d'exemple, nous allons choisir maintenant  $k = 1$ , c'est-à-dire le cas de deux plaques radiales divergentes (fig. 3b). Puisque  $k = 1$  se trouve dans l'intervalle (65), alors la solution sera donnée par (72):

$$Q(x) = 0,04527 - 0,02584 \operatorname{tg} \left[ \ln \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{0,59853} + 1,05211 \right], \quad (77)$$

avec, selon (73) et (74):

$$p = 0,02584 \quad \text{et} \quad C_0 = 0,17242 L.$$

La relation (41) offre  $z(x)$  et l'épaisseur de perte de quantité de mouvement (76) se ramène à:

$$\frac{\ddot{\delta} \cdot R_e^{1/4}}{L} = \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left\{ 0,02584 \operatorname{tg} \left[ \ln \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{0,59853} + 1,05211 \right] - 0,04527 \right\}^{3/4}. \quad (78)$$

Le calcul continue, ensuite, suivant l'ordre d'opérations, cité ci-avant.

$x/L$	$z(x)$	$Q(x)$	$G(Q)$	$(\ddot{\delta} \cdot R_e^{1/4})/L$	$c_f(x)$	$H(x)$
0,10	3335	-0,00667	0,08102	0,02567	0,01066	1,66747
0,25	9235	-0,01847	0,06087	0,06262	0,00621	1,69308
0,40	16710	-0,03342	0,02670	0,10942	0,00235	1,72552
0,44	19065	-0,03813	0,01108	0,12426	0,00094	1,73574
0,45	19685	-0,03937	0,00643	0,12815	0,00054	1,73843
0,46	20315	-0,04063	0,00145	0,13213	0,00012	1,74117
0,465	20640	-0,04128	-0,00123	0,13416	-	1,74258
0,50	22980	-0,04596	-	0,14889	-	1,75273
0,75	46890	-0,09378	-	0,29657	-	1,85650
1,00	101370	-0,20274	-	0,60428	-	2,09294

Tableau 1

Les caractéristiques de la couche limite turbulente, ainsi calculées, dans un cas particulier numérique:  $R_e = 500\,000$ , sont présentées au tableau 1 et aux figures 4 et 5.

Il est à souligner que, dans le cas considéré, d'après les résultats numériques présentés par le tableau 1, le point de décollement de la couche limite turbulente ( $G(Q) = 0$ ) apparaît à  $x = 0,465 L$  environ. À noter que, dans le cas analogue [5] laminaire, le point de décollement de la couche limite apparaîtrait pour  $x = 0,161 L$ .

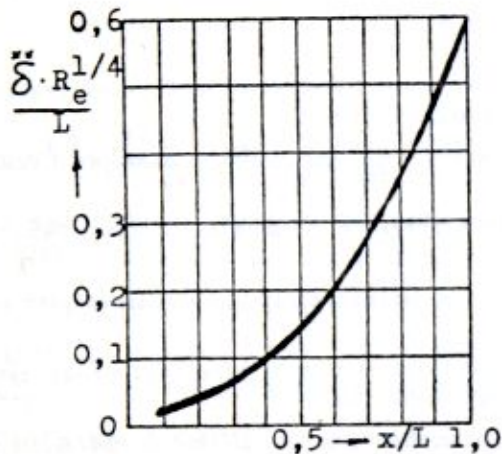


Figure 4

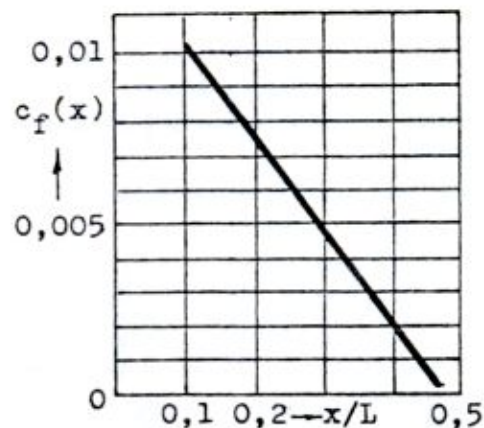


Figure 5

#### 4. Conclusion

Dans le cadre des hypothèses choisies, on peut continuer le calcul de la couche limite turbulente en utilisant les solutions trouvées (51) ou (72), pour d'autres valeurs de l'exposant  $k$ , en faisant varier ainsi le ralentissement de l'écoulement. À chaque valeur particulière de  $k$  on associera un tableau correspondant, pour le nombre de Reynolds imposé, par analogie avec le tableau 1, d'où on pourra tirer les caractéristiques globales de la couche limite turbulente et, en particulier, les positions du point de décollement.

$k$	1	2	3	4
$(x/L)_{\text{déc turbulente}}$	0,465	0,195	0,125	0,091
$(x/L)_{\text{déc laminaire}}$	0,161	0,075	0,048	0,036

Tableau 2

Ainsi, le tableau 2 ci-dessus donne les abscisses du point de décollement de la couche limite turbulente, obtenues par la présente méthode, aussi bien que

celles du cas analogue laminaire [5]. D'où on constate que le décollement de la couche limite turbulente apparaît systématiquement en aval par rapport au cas laminaire quelque soit le degré de ralentissement de l'écoulement, ce qui est physiquement acceptable.

À noter, enfin, que nous sommes en train d'étudier la couche limite turbulente dans un canal rectangle divergent (fig. 3b). D'ores et déjà, les résultats intéressants s'annoncent [6] comme, par exemple, que le décollement de la couche limite apparaît plus tôt sur les parois que sur le fond du canal quelque soit le degré de ralentissement de l'écoulement.

#### R E F E R E N C E S

- [1] Novozilov, V. V., *Théorie de la couche limite turbulente plane d'un écoulement incompressible* (monographie en russe), Edition "Sudostroenie", Leningrad, (1977).
- [2] Proceedings - Computation of turbulent boundary layers - AFOSR - IFP - Stanford Conference, (1968).
- [3] Clauser, F.H., *Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients*, J. Aero. Sci., **21** (1954), 91-108.
- [4] Buri, A., *Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Stromung*, Diss. Zurich, (1931).
- [5] Gortler, H., und Witting, H., *Einige laminare Grenzschichtströmungen, berechnet mittels einer neuen Reihenmethode*, ZAMP, IXb, Fasc. 5/6, (1958), S.293-306.
- [6] Ašković, R., *Contribution à l'étude de la couche limite turbulente*, RAPPORT N°94/A/01 du Laboratoire de Mécanique des fluides de l'Univ. de Valenciennes, (1994).

#### SIMPLIFIED TURBULENT BOUNDARY-LAYER CALCULATION IN A DIFFUSOR

An analysis is made of the turbulent boundary layer in the sense of the well known phenomenologic semi-empiric plane boundary-layer theory, based on an analogy with the power rheologic laws widely used in the study of the non linear viscous flows. So a simple "one layer method" to calculate the plane turbulent boundary layer using Prandtl's model of turbulence is first prepared, and then tested in the case of a plane diffusor with the satisfactory results.

#### PRIBLIŽNI PRORAČUN TURBULENTNOG GRANIČNOG SLOJA U DIFUZORU

U radu se, najpre, predlaže jedna približna metoda za proračun ravanskog turbulentnog graničnog sloja, u smislu poznate fenomenološke poluempirijske teorije turbulentnog strujanja zasnovane na analogiji sa strujanjima tečnosti nelinearnih stepenih reoloških zakona viskoznosti i koristeći Prantlov model turbulencije. Potom je metoda testirana na primeru ravanskog difuzora, uključujući i problem odvajanja turbulentnog graničnog sloja, sa zadovoljavajućim rezultatima.