TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 19, pp 1–8, 1993, UDK 531.38

О ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО ТЕЛА НА ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

А.А. Буров, А.В. Карапетян

(Поступила 05.12.90; доработана 26.06.94)

Задача о движении твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости – классическая проблема теоретической механики. Выдающиеся ученые такие как Макмилан, Раус, Магнус посвящали свои статьи и трактаты исследованию этой проблемы. Эти исследования были продолжены в последние годы. Множества стационарных движений и их устойчивость были исследованы в [1]. Дополнительные частные интегралы аналогичные интегралу Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки были исследованы в [2]. Общая задача о существовании линейных дополнительных интегралов была изучена в [3]. Некоторые интересные результаты, касающиеся расщепления сепаратрис и интегрируемости уравнений движения эллипсоидального твердого тела, были исследованы в [4]. Существование неожиданного множества стационарных движений таких тел и его связь с возможной интегрируемостью уравнений движения обсуждались в [5].

Задача о движении упругого тела по горизонтальной гладкой плоскости несомненно намного сложнее. Для ее решения необходимо решать контактную задачу теории упругости с учетом сил ньютоновского притяжения и инерции. В настоящей работе предпринята попытка обойти эти трудности за счет рассмотрения случая, когда тело составлено из массивного твердого ядра и невесомой упругой оболочки достаточно большой толщины. Такой подход позволяет рассматривать контактную задачу не принимая во внимание силы инерции и притяжения, действующие на упругую оболочку, и кроме того позволяет применять с определенной степенью точности решение контактной задачи в рамках теории Герца. Исследование уравнений движения при соответствующих условиях показывает, что большинство свойств движения аналогично соответствующим свойствам движения твердого тела. Это косвенно подтверждает корректность применяемой в работе математической модели взаимодействия тела и подстилающей поверхности. Тем не менее, наличие дополнительной степени свободы определяет новые динамические свойства рассматриваемой системы по сравнению с движением твердого тела.

1. Рассмотрим движение тела, составленного из тяжелого недеформируемого элемента и безмассовой упругой выпуклой оболочки достаточно большой толщины, соприкасающейся с гладкой горизонтальной плоскостью π. Предположим, что $O_1 z_1 z_2 z$ – абсолютная система координат с осью $O_1 z$, направленной вертикально вверх, и плоскостью $O_1 z_1 z_2$, расположенной горизонтально. Будем считать, что эта плоскость совпадает с плоскостью π. Рассмотрим подвижную систему координат $O x_1 x_2 x_3$ с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции тела. Предположим, что (z_1, z_2, z) – координаты центра масс тела в абсолютной системе координат. Все остальные векторные и тензорные величины задаются своими проекциями на подвижные оси.

Определим потенциал упругих сил. Предположим, что он зависит лишь от расстояния z между центром масс тела и плоскостью π, а также от ориентации тела. Из теории Герца хорошо известно, что область контакта центрально симметрична. Пусть X_T – точка поверхности тела, расположенная в центре области контакта при его фиксированной ориентации. Пусть $X_0 = (X_1, X_2, X_3)$ – положение точки X_T в недеформированном состоянии при той же самой ориентации в случае отсутствия опорной плоскости. В силу симметрии задачи конфигурация области контакта и положение ее центра зависят лишь от ориентации тела относительно вертикальной оси.

Предположим, что уравнение поверхности тела в недеформируемом состоянии имеет вид

$$\varphi(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3.$$

Тогда единичный вектор, коллинеарный оси $O_1 z$, имеет вид

$$\gamma = -\frac{\operatorname{grad}\varphi(X_0)}{|\operatorname{grad}\varphi(X_0)|} \tag{1.1}$$

и величина α – максимальная деформация поверхности тела вдоль вертикали при фиксированной ориентации – определяется как

$$\alpha = -z - (X_0, \gamma).$$

Тогда упругий потенциал может быть записан как $U_0 = U_0(\alpha)$ с $\partial^2 U_0/\partial\alpha^2 > 0$. Этот факт следует из теории контактной задачи Герца [6], [7].

Тогда кинетическая и потенциальная энергия тела могут быть описаны как функции

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot z_1^2 + \dot z_2^2 + \dot z^2\right) + \frac{1}{2}(I\omega, \omega)$$
$$U = Mgz + U_0(\alpha)$$

где $I = \mathrm{diag}\,(I_1, I_2, I_3)$ – центральный тензор инерции тела, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, M – масса тела.

Упругий потенциал U_0 инвариантен относительно поворота системы вокруг вертикальной оси. Поэтому $U = U(\gamma, z)$. Тогда мы можем написать систему уравнений в виде уравнений Пуанкаре

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial L}{\partial \omega} \times \omega - \gamma \times \frac{\partial L}{\partial \gamma},$$
$$\frac{d}{dt}\gamma = \gamma \times \omega, \tag{1.2}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial z_i}, \quad i = 1,2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) = \frac{\partial L}{\partial z}$$

с лагранжианом

$$L = T - U. \tag{1.3}$$

Помимо интеграла энергии

$$H = \left(\frac{\partial L}{\partial \omega}, \omega\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot z_1}\dot z_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot z_2}\dot z_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot z}\dot z - L \tag{1.4}$$

уравнения движения допускают интегралы $P_i = \partial L/\partial \dot z_i$, $i = 1,2$, $J_1 = (\partial L/\partial \omega, \gamma)$, $J_2 = \gamma^2$. Мы можем считать, что постоянные интегралов P_i равны нулю, т.е. проекция центра масс на опорную плоскость неподвижна.

Утверждение. Если $X_0 = X_0(\gamma)$ – решение уравнений (1.1), то

$$\frac{\partial\,(X_0, \gamma)}{\partial \gamma_i} = X_i, \quad i = 1,2,3. \tag{1.5}$$

Доказательство. Продифференцируем (1.5). Тогда

$$\frac{\partial\,(X_0, \gamma)}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial X_j}{\partial \gamma_i}\gamma_j + X_i. \tag{1.6}$$

Но на поверхности тела соотношение

$$\varphi\,(X_0(\gamma)) \equiv 0$$

выполнено тождественно. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial X_j}{\partial \gamma_i} = -|\mathrm{grad}\,\varphi|\,\gamma_j\frac{\partial X_j}{\partial \gamma_i} \equiv 0.$$

Величина $|\mathrm{grad}\varphi|$ отлична от нуля на поверхности тела. Поэтому в силу соотношений (1.6) имеет место формула (1.5). Утверждение доказано.

Это Утверждение позволяет переписать уравнения движения (1.2) в виде

$$\frac{d}{dt}I\omega = I\omega \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U_0}{\partial \alpha},$$
$$\frac{d}{dt}\gamma = \gamma \times \omega, \tag{1.7}$$
$$m\ddot z = -mg + \frac{\partial U_0}{\partial \alpha}.$$

2. В общем случае уравнения движения неинтегрируемы: для того, чтобы их проинтегрировать требуется найти два дополнительных первых интеграла.

Можно указать некоторые случаи, когда уравнения движения допускают по крайней мере один такой интеграл.

1. Тело в недеформированном состоянии – шар с центром масс, совпадающим с геометрическим центром: $\varphi(x) = x^2 - R^2$. В этом случае дополнительные интегралы могут быть записаны как $J_3 = (\partial L/\partial\omega)^2$, $J_4 = (I\omega, \omega)$. Соответствующие уравнения движения интегрируются разделением переменных. Этот случай аналогичен случаю Эйлера в динамике твердого тела с неподвижной точкой.

2. Тело в недеформированном состоянии ограничено поверхностью вращения, два главных центральных момента инерции равны, а ось, соответствующая третьему моменту инерции, совпадает с осью вращения поверхности: $I_1 = I_2, \quad \varphi(x) = \varphi\left(x_1^2 + x_2^2, x_3\right)$. Тогда уравнения движения допускают по крайней мере один дополнительный интеграл $J_3 = I_3\omega_3$ аналогичный дополнительному интегралу в случае Лагранжа.

Кроме того, если $I_3 < I_2 < I_1$, то уравнения движения допускают частный интеграл, аналогичный интегралу Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот интеграл имеет вид

$$F(\omega) = \omega_1 I_1 \left(I_2^{-1} - I_1^{-1}\right)^{1/2} \pm \omega_3 I_3 \left(I_3^{-1} - I_2^{-1}\right)^{1/2}$$

то есть $\left.\dfrac{dF}{dt}\right|_{(1.7)} = 0$ на поверхности $\{F(\omega) = 0\}$. Этот интеграл имеет место если выполнено условие

$$\left(I_2^{-1} - I_1^{-1}\right)^{1/2} \left(x_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) \pm \left(I_3^{-1} - I_2^{-1}\right)^{1/2} \left(x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Это условие и условие существования аналогичного частного интеграла в задаче о движении твердого тела по гладкой плоскости совпадают [2], [3].

3. Чтобы найти стационарные движения рассматриваемой системы, изучим стационарные точки функции

$$W = H - h - \lambda(J_1 - p) + \frac{\mu}{2}(J_2 - 1). \tag{3.1}$$

В силу (1.1) уравнения стационарных движений могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = I(\omega - \lambda\gamma) = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = -\frac{\partial U_0}{\partial \alpha} X(\gamma) - \lambda I \omega + \mu\gamma = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{z}} = M\dot{z} = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial U_0}{\partial \alpha} + Mg = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{\partial W}{\partial \mu} = 0. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.2), (3.4) обладают решениями

$$\omega = \lambda\gamma, \quad \dot{z} = 0.$$

Эти решения описывают стационарные движения упругого тела, на которых центр масс располагается на постоянной высоте и тело вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс с постоянной угловой скоростью, не меняя своей геометрии.

Утверждение 1. Конус осей перманентных вращений совпадает с аналогичным конусом в задаче о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости.

На самом деле, в силу уравнений (3.2), (3.3) направляющая конуса осей перманентных вращений описывается уравнениями (сравни с [1])

$$(I\gamma \times \gamma, X(\gamma)) = 0, \quad \gamma^2 = 1.$$

При этом каждому стационарному движению $y_0 = (\omega_0, \gamma_0, z_0)$ в рассматриваемой задаче соответствует единственное стационарное движение $x_0 = (\omega_0, \gamma_0)$ задачи о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости и наоборот.

4. Исследуем достаточные условия устойчивости перманентных вращений.

Предложение 2. Достаточные условия устойчивости решения y_0 уравнений (3.2) – (3.6) и соответствующие условия устойчивости решений x_0 уравнений движения твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости, получаемые на основании теоремы Рауса совпадают.

Доказательство. Вторая вариация функции (3.1) на решении y_0 может быть записано в виде

$$\begin{aligned} 2\delta^2 W = &\left((I\delta\omega, \delta\omega) - 2\lambda(I\delta\omega, \delta\gamma) + \mu(\delta\gamma)^2 - Mg\frac{\partial\,(X_0, \delta\gamma)}{\partial\gamma}\delta\gamma \right) + \\ &+ \left(M\delta\dot{z}^2 + \partial^2 U_0/\partial\alpha^2\, \delta\alpha^2 \right) \\ =&2\delta^2 W_0 + \left(M\delta\dot{z}^2 + \partial^2 U_0/\partial\alpha^2\, \delta\alpha^2 \right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Функция W_0 совпадает с функцией, аналогичной W, в задаче о движении твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости

$$\delta^2 W_0\big|_{y_0} \equiv \delta^2 W_0\big|_{x_0}.$$

Производная $\partial U_0/\partial\alpha^2$ положительна так что другая часть (4.1) всегда неотрицательна. Тогда корректность предложения следует из того факта, что линейные многообразия

$$\delta J_1 = 0, \quad \delta J_2 = 0$$

описываются одинаковыми уравнениями для любой пары решений y_0 и x_0 сравниваемых проблем.

Достаточные условия устойчивости в задаче о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости были изучены в [1].

5. Предположим, что система допускает вращения y_0 вокруг одной из главных центральных осей инерции, скажем, вокруг оси OX_3

$$y_0: \quad \omega = (0,0,\Omega), \quad \gamma = (0,0,\pm 1), \quad X = (0,0,X(\gamma)). \tag{5.1}$$

Предложение 3. Характеристическое уравнения для решений (5.1) может быть записано в виде

$$P(\lambda) = \left(M\lambda^2 + \frac{\partial^2 U_0}{\partial\alpha^2}\right) P_1(\lambda) = 0$$

где $P_1(\lambda)$ – соответствующий характеристический многочлен в задаче о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости.

Предложение доказывается непосредственной проверкой.

Следствие. Необходимые условия устойчивости для решения (5.1) и для решения x_0.

Доказательство. Уравнение $M\lambda^2 + \partial^2 U_0/\partial\alpha^2 = 0$ имеет ровно два чисто мнимых корня. Этот факт доказывает предложение.

6. Предположим, что два главных центральных момента инерции I_1 и I_2 равны и тело ограничено поверхностью вращения с осью, совпадающей с осью третьего главного центрального момента инерции (см. п.**2**). В этой ситуации уравнения движения допускает один дополнительный интеграл $J_3 = I_3\omega_3$. Рассмотрим достаточные условия устойчивости движения

$$y_0: \quad \omega_0 = (0,0,\Omega), \quad \gamma_0 = (0,0,1), \quad X_0 = (0,0,X_3(\gamma)).$$

Рассмотрим функцию

$$W_1 = \left(H - \omega J_1 + \frac{1}{2}\left(I_3\omega^2 + mgX_3(\gamma_0)\right) J_2\right)\Big|_{\omega=\omega_0}.$$

Тогда для этих решений выражение для ограничения второй вариации функции Ляпунова W_1 на линейное многообразие

$$\delta J_1 = 0, \quad \delta J_2 = 0$$

может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \delta^2 W_1\big|_{\delta J_1=\delta J_2=0} &\equiv \delta^2 W_1\,\big|_{\delta\gamma_3=0} = \\ &= M(\delta z^{\cdot})^2 + \partial^2 U_0/\partial\alpha^2(\delta z)^2 + \\ &+ I_1\left[(\delta\omega_1 - \omega\delta\gamma_1)^2 + (\delta\omega_2 - \omega\delta\gamma_2)^2\right] + \\ &+ \left[(I_3 - I_1)\,\omega^2 + Mg\,(\varrho + X_3(\gamma_0))\right]\left((\delta\gamma_1)^2 + (\delta\gamma_2)^2\right) \end{aligned}$$

где ϱ – радиус кривизны меридианального сечения поверхности тела.

Предложение 4. Если упругое тело таково, что

- его главные центральные моменты инерции I_1 и I_2 равнины,
- поверхность тела осесимметрична и ось поверхности совпадает с осью Ox_3 центрального эллипсоида инерции,

то достаточные условия устойчивости вращений тела вокрог его оси симметрии совпадают с достаточными условиями устойчивости вращения соответствующих вращений твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости и могут быть записаны в виде

$$(I_3 - I_1)\,\omega^2 + Mg\,(\varrho + X_3(\gamma_0)) > 0.$$

Доказательство. Производная $\partial^2 U_0/\partial\alpha^2$ положительна. Поэтому вторая вариация функции W_1 также положительна, если коэффициент при последнем слагаемом положителен.

Наши исследования показывают, что для рассмотренных классов движений предложенная модель взаимодействия между упругим телом и гладкой горизонтальной плоскостью дает фактически те же самые качественные результаты, что и модель абсолютно твердого тела.

Признательность. Эта статья была подготовлена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект **No.** 93 – 013 – 16242 и при материальной поддержке фирмы *Троя*, **Москва.**

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карапетян, А. В., *Об устойчивости стационарных движений твердого тела на идеальной горизонтальной плоскости без трения*, Прикл. Матем. и Механика. Т.45, 3 (1981), 504–511.

[2] Сумбатов, А. С., *Некоторые инвариантные соотношения в задаче о движении тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости без трения*, Прикл. Матем. и Механика. Т.52, 1 (1988), 34–41.

[3] Буров, А. А., *О частных интегралах уравнений движения твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости*, Изв. Акад. наук СССР. Механика тв. тела, 5 (1986), 72–73.

[4] Буров, А. А., Карапетян, А. В., *О несуществовании дополнительных интегралов в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости*, Прикл. Матем. и Механика. Т.49, 3 (1985).

[5] Карапетян, А. В., Рубановский В. Н., *О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого эллипсоида на гладкой плоскости*, Прикл. Матем. и Механика. Т.51, 2 (1987).

[6] Hertz, H., *Ueber die Beruhrung fester elastischer Korper*, J. Reine und Angewandte Math. **Bd.92.S.** (1882) 156–172.

[7] Тимошенко, С. П., *Теория упругости*, Москва: ОНТИ, (1937).

ON THE MOTION OF AN ELASTIC BODY ON A SMOOTH PLANE

A problem on the motion of an elastic body on a smooth plane is considered. Mathematical model, describing the elastic interaction between a body and a plane, is proposed. In the frame of this model equations of the motion are written. First integrals of these equations are investigated. Steady motions and their stability are studied. Results of this investigation are compared with analogous results in the problem on the motion of a rigid body on a smooth plane.

А.А. Буров, А.В. Карапетян
Вычислительный центр
Российской Академии наук
Вавилова 40,
Мсква, Россия