TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 18, pp 9-20, 1992, UDK 532.5

DEVELOPPEMENT DE LA COUCHE LIMITE MHD THERMIQUE LAMINAIRE AVEC ASPIRATION AUTOUR D'UN CORPS UNIFORMEMENT ACCELERE

R. Ašković

(Reçu le 03.03.1991.)

1. Introduction

Les équations et les conditions aux limites de la couche limite thérmique laminaire en régime instationnaire autour d'un corps quelconque cylindrique uniformement accéléré le long d'une trajectoire rectiligne, avec aspiration, d'un fluide conducteur à propriétés physique ρ et μ constantes[1], dans le cas où le nombre de Reynolds magnétique est petit, si bien que le champ magnétique induit par l'écoulement est négligeable par rapport à l'induction magnétique appliquée B et en absence du champ électrique - peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\sigma B^2}{\rho}(u-U),\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\
&u=U(x,t),\ \ v=0,\ \ \text{pour}\ \ y=0,\ \ \text{si}\ \ t=0,\\
&u=0,\ \ v=v_p(x,t),\ \ \text{pour}\ \ y=0,\ \ \text{si}\ \ t>0,\\
&u=U(x,t)\ \ \text{pour}\ \ y\to\infty,\ \ \text{si}\ \ t>0;
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\sigma B^2}{\rho c_p}(u-U)^2,\\
&T=T_W\ \ \text{ou}\ \ \frac{\partial T}{\partial y}=0\ \ \text{pour}\ \ y=0,\\
&T=T_\infty\ \ \text{pour}\ \ y\to\infty.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Toutes les fonctions faisant partie des équations et des conditions aux limites ci-dessus:

$$U(x,t)=f(t)V(x),\quad v_p(x,t),\ \ T_W\ \ \text{et}\ \ B,$$

sont des fonctions de la classe C^k, $0\le k\le\infty$, dans le domaine considéré. Pourtant dans ce travail nous limiterons nos considérations au cas: $T_w=const$ et $B=const$.

Il est évident que dans le cas considéré la partie dynamique de la couche limite puisse être traitée indépendemment de celle thérmique. Or il faut résoudre donc, tout d'abord, le système d'équations (1), tenant compte des conditions aux limites, afin de déterminer le champ des vitesses (u, v). Le calcul de la partie thérmique de la couche limite sera fait ensuite à l'aide de l'équation de l'énergie (2), avec les conditions aux limites correspondantes.

On va considérer dans ce travail le développement de la couche limite thérmique en fonction de temps, en supposant que la vitesse de l'écoulement extérieur puisse être exprimée par une série en $\sqrt{t}$. On va demontrer par la suite que toutes les grandeurs caractérisant l'écoulement à l'intérieur de la couche limite peuvent également être déterminées sous la forme des séries par rapport au même facteur $\sqrt{t}$. En effet, on va utiliser ici l'idée bien connue de Dorodnitsyn, appliquée à l'époque pour traiter le probléme de la convection naturelle. Il est à souligner encore que la même idée a été utilisée par Zeytounian ([1], [2]) pour traiter la couche limite laminaire tridimensionelle.

2. Partie dynamique ...

Supposons donc que les fonctions $f(t)$ et $v_p(x,t)$ s'expriment par les séries entières en $\sqrt{t}$, et essayons de déterminer toutes les grandeurs inconnues caractérisant l'écoulement à l'intérieur de la couche limite sous la forme des séries similaires en $\sqrt{t}$, avec les coefficients fonctions des coordonnées spatiales. Dans ce but on introduit, à la place de la variable y, une nouvelle variable sous la forme suivante:

$$\eta = \alpha y \tau^{\beta}, \tag{3}$$

où:

$$\tau = \sqrt{t}, \tag{4}$$

α et β étant deux constantes à déterminer par la suite. Soient également:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tau^{\gamma}\widetilde{u}(x,\eta,\tau), \\ v &= \frac{1}{\alpha}\tau^{\varepsilon}\widetilde{v}(x,\eta,\tau), \\ f(t) = f(\tau^2) &= \tau^{\gamma}\widetilde{f}(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où γ et ε sont aussi les constantes à déterminer. Il est facile d'établir les relations de transformation:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2\tau}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\beta\frac{\eta}{\tau^2}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \alpha\tau^{\beta}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \alpha^2\tau^{2\beta}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

à l'aide desquelles les équations de base (1) se ramènent à:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2} - \frac{\beta}{2\nu\alpha^2}\tau^{-2(1+\beta)}\eta\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\gamma}{2\nu\alpha^2}\tau^{-2(1+\beta)} \cdot \widetilde{u} = \\
&= \frac{1}{2\nu\alpha^2}\tau^{-2(1+\beta)+1}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} - \frac{1}{2\nu\alpha^2}\tau^{-2(1+\beta)} \cdot V\left(\gamma\widetilde{f} + \tau\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \tau}\right) \\
&+ \frac{1}{\nu\alpha^2}\tau^{\gamma-2\beta}\left[\widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \tau^{\beta+\varepsilon-\gamma}\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} - \widetilde{f}^2 VV'\right] + \frac{1}{\nu\alpha^2}\frac{\sigma B^2}{\rho}\tau^{-2\beta}(\widetilde{u} - \widetilde{f}V), \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \tau^{\beta+\varepsilon-\gamma}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \eta} = 0. \qquad (7)
$$

Si l'on impose que: $1 + \beta = 0$, $-\frac{\beta}{2\nu\alpha^2} = 2$, alors il s'ensuit qu'au premier membre de l'équation (6) on peut introduire un opérateur différential: $\lambda_m(X) = X" + 2\eta X' - 2mX$, $(m = \gamma)$, où:

$$
\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \qquad (8)
$$

ce qui représente, en effet, la variable classique η de la couche limite instationnarie. Vue la structure de l'équation de continuité (7), il est commode d'accepter que: $\beta + \varepsilon - \gamma = 0$, c'est à dire: $\varepsilon - \gamma = 1$, $(\beta = -1)$. Aprés ces quelques dernieres interventions logiques, l'équation (6) devient:

$$
\begin{aligned}
\lambda_m(\widetilde{u}) &= 2\tau\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} - 2V\left(\gamma\widetilde{f} + \tau\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \tau}\right) \\
&\quad + 4\tau^{\gamma+2}\left(\widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} - \widetilde{f}^2 VV'\right) + 4\frac{\sigma B^2}{\rho}\tau^2(\widetilde{u} - \widetilde{f}V),
\end{aligned}
$$

d'où on voit bien que tous les termes non linéaires (convectifs) contiennent le facteur $\tau^{\gamma+2}$. En acceptant pour γ la valeur minimale: $\gamma = 0$, c'est à dire $\varepsilon = 1$, ce facteur à coté des termes non linéaires et "magnétiques" se réduit à τ^2. Par conséquent, le système d'équations de base et les conditions aux limites sont devenus maintenant les suivantes:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0(\widetilde{u}) &= 2\tau\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \tau} - 2\tau V\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \tau} \\
&\quad + 4\tau^2\left(\widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} - \widetilde{f}^2 VV'\right) + 4\frac{\sigma B^2}{\rho}\tau^2(\widetilde{u} - \widetilde{f}V), \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \eta} = 0, \qquad (10)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\widetilde{u} = 0, \quad \widetilde{v} = \widetilde{v}_p(x,t), \quad \eta = 0, \\
&\widetilde{u} = \widetilde{f}(\tau)V(x), \quad \eta \to \infty.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

La structure des équations (9) et (10) assure la conclusion que leurs solutions peuvent être recherchées sous la forme des séries par rapport à la variable $\tau = \sqrt{t}$, ainsi que, dans ce cas, les termes non linéaires et "magnétiques" n'influenceront les solutions que dans des approximations de deuxiéme ordre dont les équations différentielles seront *linéaires*.

Supposons donc à priori que les fonctions connues $\widetilde{f}(\tau)$ et $\widetilde{v}_p(x,\tau)$ puissent être présentées par les séries:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{f}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \tau^n, \\ \widetilde{v}_p(x,\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_{pn}(x) \cdot \tau^n, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

et cherchons les solutions des équations (9) et (10) sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{u} &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \tau^n, \\ \widetilde{v} &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot \tau^n. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Si l'on rapporte ces expressions dans les équations (9) et (10), en faisant passer à la fois le premier terme du deuxiéme membre de l'équation (9) au premier membre et en l'insérrant dans l'operateur λ_n, on obtiendra pour les fonctions $u_n(x,\eta)$ et $v_n(x,\eta)$ – tenant compte des séries doubles exprimant les termes non linéaires, le systéme suivant d'équations differentielles:

$$\begin{aligned} \lambda_n(u_n) = -2nf_nV + 4\sum_{k=0}^{n-2}\left(u_k\frac{\partial u_{n-2-k}}{\partial x} + v_k\frac{\partial u_{n-2-k}}{\partial \eta} - f_k f_{n-2-k}VV'\right) \\ + 4\frac{\sigma B^2}{\rho}(u_{n-2} - Vf_{n-2}), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0, \tag{15}$$

avec les conditions aux limites:

$$\left.\begin{aligned} &u_n = 0, \quad v_n = v_{pn} \quad \text{pour } \eta = 0, \\ &u_n = f_nV \quad \text{pour } \eta \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Il est commode d'.écrire le systéme d'équations (14) aussi bien sous la forme décomposée:

$$u"_0 + 2\eta u_0' = 0, \tag{17.1}$$

$$u"_1 + 2\eta u_1' - 2u_1 = -2Vf_1, \tag{17.2}$$

$$\begin{aligned} u"_2 + 2\eta u_2' - 4u_2 = -4Vf_2 + 4u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + 4v_0u_0 - 4VV'f_0^2 \\ + 4\frac{\sigma B^2}{\rho}u_0 - 4\frac{\sigma B^2}{\rho}Vf_0. \end{aligned} \tag{17.3}$$

....

Considérons, tout d'abord, les deux premiéres équations de ce systéme donc $n = 0, 1$, avec les conditions aux limites suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 0, \quad v_0 = v_{p0} \quad \text{pour } \eta = 0, \\ u_0 = f_0 V \quad \text{pour } \eta \to \infty, \end{array}\right\} \tag{18.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 0, \quad v_1 = v_{p1} \quad \text{pour } \eta = 0, \\ u_1 = f_1 V \quad \text{pour } \eta \to \infty, \end{array}\right\} \tag{18.2}$$

Vue la forme des équations (17.1) et (17.2), ainsi que des conditions (18.1) et (18.2), il est utile d'introduire le changement de fonctions sous la forme suivante:

$$u_n - f_n V = X_n \qquad (\text{pour } n = 0, 1). \tag{19}$$

Il est facile de vérifier que, dans ce cas, les équations différentielles et les conditions aux limites ci-dessus se raménent à:

$$n = 0: \quad X"_0 + 2\eta X'_0 = 0, \tag{20.1}$$

$$X_0(0) = -f_0 V, \quad X_0(\infty) \to 0, \tag{20.2}$$

$$n = 1: \quad X"_1 + 2\eta X'_1 - 2X_1 = 0, \tag{21.1}$$

$$X_1(0) = -f_1 V, \quad X_1(\infty) \to 0, \tag{21.2}$$

d'où on voit bien que, pour $n = 0, 1$, en effet, il faudra résoudre l'équation différentielle homogéne suivante:

$$X"_n + 2\eta X'_n - 2n X_n = 0, \tag{22.1}$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$X_n(0) = -f_n V, \quad X_n(\infty) \to 0, \quad (n = 0, 1) \tag{22.2}$$

afin de déterminer les fonctions $X_n = u_n - f_n V$ $(n = 0, 1)$. La solution générale de l'.équation (22.1) est:

$$X_n = C_1 \mathcal{P}_n(\eta) + C_2 \mathcal{L}_n(\eta), \tag{23}$$

où la première solution $\mathcal{P}_n(\eta)$ est un polynôme d'ordre n, relié avec le polynôme H_n de Hermitte-Tchebichev par:

$$\mathcal{P}_n(\eta) = \frac{H_n(i\eta)}{i^n 2^n n!} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{\eta^{n-2k}}{2^{2k} k! \, (n-2k)!} \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{24}$$

et la deuxième solution est:

$$\mathcal{L}(\eta) = \frac{A_n}{n!} \int_\infty^\eta (\eta - \gamma)^n e^{-\gamma^2} \, d\gamma, \tag{25}$$

où les coefficientes A_n sont définis par $\mathcal{L}_n(0) = 1$. Pour que, d'après (22.2), $X_n(\infty) = 0$, à cause du polynôme $\mathcal{P}_n(\eta)$, on aura que: $C_1 = 0$, et puisque: $\mathcal{L}_n(0) = 1$, la deuxième condition (22.2) se réduit à: $X_n(0) = C_2\mathcal{L}_n(0) = -f_nV$, d'où: $C_2 = -f_nV$. Par conséquent, il s'.ensuit maintenant:

$$X_n = -f_nV\mathcal{L}_n(\eta), \tag{26}$$

c'est à dire, à cause de (19):

$$u_n = f_nV[1 - \mathcal{L}_n(\eta)] \quad (n = 0, 1). \tag{27}$$

De l'équation de continuité (15) on trouve la composante normale de la vitesse v_n qui satisfait la condition d'aspiration (16):

$$v_n = v_{pn} + \frac{A_n}{A_{n+1}}V'f_n\left[\mathcal{L}_{n+1}(\eta) - \frac{A_{n+1}}{A_n}\eta - 1\right] \quad (n = 0, 1). \tag{28}$$

Pour $n \geq 2$, il est nécessaire de résoudre l'équation non homogène du type: $\lambda_n(X_n) = N(\eta)$, où la fonction $N(\eta)$ s'exprime par le produit des fonctions $\mathcal{L}_n(\eta)$:

$$N(\eta) = \sum_{i,j,\ldots,k} c_{ij\ldots k}\mathcal{L}_i(\eta)\mathcal{L}_j(\eta)\ldots\mathcal{L}_k(\eta).$$

Pour illustrer la méthode, voici meintenant juste le cas: $n = 2$. En utilisant les solutions déjà trouvées (27) et (28), l'équation (17.3) devient:

$$\begin{aligned} &u"_2 + 2\eta u_2' - 4u_2 = -4f_2V - 4f_0Vv_{p0}\mathcal{L}_0' + \\ &+ 4f_0^2VV'\left[\mathcal{L}_0^2 - 2\mathcal{L}_0 + \left(\eta + \frac{A_0}{A_1}\right)\mathcal{L}_0' - \frac{A_0}{A_1}\mathcal{L}_0'\mathcal{L}_1\right] - 4\frac{\sigma B^2}{\rho}f_0V\mathcal{L}_0 \end{aligned} \tag{29}$$

et doit être résolue en satisfaisant les conditions aux limites suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &u_2 = 0, \quad v_2 = v_{p2} \quad \text{pour } \eta = 0, \\ &u_2 = f_2V \quad \text{pour } \eta \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Par l'intermédiaire du changement des fonctions:

$$u_2 - f_2V = X_2, \tag{31}$$

en utilisant encore la formule recurente:

$$\frac{d^k\mathcal{L}_m}{d\eta_k} = \frac{A_m}{A_{m-k}}\mathcal{L}_{m-k}, \tag{32}$$

ainsi que les valeurs des constantes A_n:

$$A_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad A_1 = 2, \quad A_{2k} = -\frac{2^{k+1}}{\sqrt{\pi}}(2k)!!,$$

$$A_{2k-1} = (2k-1)!!\,2^k, \quad A_m = 2mA_{m-2}, \quad (A_{-1} = 1),$$

l'équation précédente (29) et ses conditions aux limites se ramènent à:

$$X''_2 + 2\eta X'_2 - 4X_2 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} f_0 V v_{p0} \mathcal{L}_{-1}$$
$$+ f_0^2 V V' \left[4\mathcal{L}_0^2 - 8\mathcal{L}_0 - \frac{8}{\pi}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \eta\right)\mathcal{L}_{-1}\right] - 4\frac{\sigma B^2}{\rho} f_0 V \mathcal{L}_0, \tag{33}$$

$$X_2(0) = -f_2 V, \quad X_2(\infty) \to 0. \tag{34}$$

Une intégrale particulière de l'équation inhomogène (33) est:

$$X_{2p} = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} f_0 V v_{p0} \mathcal{L}_{-1}(\eta) + 2 f_0^2 V V' \mathcal{L}_0(\eta) + \frac{2}{\pi} f_0^2 V V' \mathcal{L}_1^2(\eta)$$
$$- \frac{1}{2} f_0^2 V V' \mathcal{L}_0(\eta)\mathcal{L}_2(\eta) + f_0^2 V V' \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta - \frac{4}{3\pi}\right)\mathcal{L}_{-1}(\eta) + \frac{\sigma B^2}{\rho} f_0 V \mathcal{L}_0(\eta) \tag{35}$$

et la solution homogène de la même équation est la suivante: $X_2 = C_1 \mathcal{P}_2(\eta) + C_2 \mathcal{L}_2(\eta)$, où: $\mathcal{P}_2(\eta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\eta^2$. Evidemment, à cause de $X_2(\infty) \to 0$, on doit imposer que: $C_1 = 0$, de sorte que la solution générale de l'équation complète (33) devient:

$$X_2(\eta) = C_2 \mathcal{L}_2(\eta) + X_{2p}, \tag{36}$$

où la constante C_2 sera déterminée par la deuxième condition (34), c'est à dire par: $X_2(0) = -f_2 V$, sous la forme:

$$C_2 = -f_2 V + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} f_0 V v_{p0} - 2 f_0^2 V V'$$
$$-\frac{2}{\pi} f_0^2 V V' + \frac{1}{2} f_0^2 V V' + \frac{4}{3\pi} f_0^3 V V' - \frac{\sigma B^2}{\rho} f_0 V. \tag{37}$$

En replaçant (37) dans (36), on trouve ensuite de (31):

$$u_2 = f_2 V[1 - \mathcal{L}_2(\eta)] - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} f_0 V v_{p0}[\mathcal{L}_2(\eta) - \mathcal{L}_{-1}(\eta)]$$
$$+ 2 f_0^2 V V' \left[\frac{1}{\pi}\mathcal{L}_1^2(\eta) + \mathcal{L}_0(\eta) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3\pi}\right)\mathcal{L}_2(\eta)\right. \tag{38}$$
$$\left. - \frac{1}{4}\mathcal{L}_0(\eta)\mathcal{L}_2(\eta) + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta - \frac{2}{3\pi}\right)\mathcal{L}_{-1}(\eta)\right] + \frac{\sigma B^2}{\rho} f_0 V[\mathcal{L}_0(\eta) - \mathcal{L}_2(\eta)].$$

Enfin, de l'équation (15): $\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = 0$, par intégration en η, il s'ensuit que:

$$v_2 = -\int \frac{\partial u_2}{\partial x} d\eta + C, \tag{39}$$

où la constante C sera calculée par la condition d'aspiration (16): $v_2 = v_{p2}$ pour $\eta = 0$. Il est possible, bien sûr, de continuer ainsi de traiter les équations suivantes (14) et (15), tenant compte toujours des conditions aux limites (16).

Par conséquent, la solution de la partie dynamique de la couche limite thérmique étudiée, c'est à dire du système d'équations (1), tenant compte des conditions aux limites correspondantes, y compris les troisièmes termes des séries (13), conformement à (5), est présentée par:

$$\begin{aligned} u &= \tau^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tau^n = u_0 + u_1\tau + u_2\tau^2 + \dots \\ &= fV[1 - \mathcal{L}_0(\eta)] + f_1 V[1 - \mathcal{L}_1(\eta)]\tau + \\ &\quad + \left\{ f_2 V[1 - \mathcal{L}_2(\eta)] - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} f_0 V v_{p0} [\mathcal{L}_2(\eta) - \mathcal{L}_{-1}(\eta)] + \right. \\ &\quad + 2 f_0^2 V V' \left[\frac{1}{\pi} \mathcal{L}_1^2(\eta) + \mathcal{L}_0(\eta) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3\pi} \right) \mathcal{L}_2(\eta) - \frac{1}{4} \mathcal{L}_0(\eta) \mathcal{L}_2(\eta) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \eta - \frac{2}{3\pi} \right) \mathcal{L}_{-1} \right] + \frac{\sigma B^2}{\rho} f_0 V [\mathcal{L}_0(\eta) - \mathcal{L}_2(\eta)] \right\} \tau^2 + \dots \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\alpha} \tau^\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} v_n \tau^n = 2\sqrt{\nu}\tau(v_0 + v_1\tau + v_2\tau^2 + \dots) \\ &= 2\sqrt{\nu} \left\{ v_{p0} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_0 V' [1 - \sqrt{\pi}\eta - \mathcal{L}_1(\eta)] \right\} \tau + \\ &\quad + 2\sqrt{\nu} \left\{ v_{p1} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} f_1 V' \left[\mathcal{L}_2(\eta) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \eta - 1 \right] \right\} \tau^2 + \dots \end{aligned} \tag{41}$$

3. Partie thérmique ...

Après l'introduction des solutions (40) et (41) de la partie dynamique dans l'équation de l'énergie (2), on obtiendra:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial \eta^2} + \frac{\mu C_p}{\lambda} 2\eta \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \eta} - 2 \frac{\mu C_p}{\lambda} \tau \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \tau} \\ &\quad + 4 \frac{\mu C_p}{\lambda} \{ f_0 V [\mathcal{L}_0(\eta) - 1] + + f_1 V [\mathcal{L}_1(\eta) - 1] \tau + \dots \} \tau^2 \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x} \\ &\quad + 4 \frac{\mu C_p}{\lambda} \left\{ \left[-v_{p0} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_0 V (\mathcal{L}_1 + \sqrt{\pi}\eta - 1) \right] \tau + \dots \right\} \tau^2 \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \eta} \\ &= -\frac{\mu C_p}{\lambda} \frac{1}{C_p} \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} \right)^2 - 4 \frac{\mu C_p}{\lambda} \frac{\sigma B^2}{\rho C_p} [f_0^2 V^2 \mathcal{L}_0^2(\eta) + 2 f_0 f_1 V^2 \mathcal{L}_0(\eta) \mathcal{L}_1(\eta) \tau + \dots] \tau^2, \end{aligned} \tag{42}$$

où par analogie avec (5):

$$T = \tau^\gamma \widetilde{T}(x, \eta, \tau) = \widetilde{T}(x, \eta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \tau_n. \tag{43}$$

En tenant compte de la présence dans l'équation (42) du nombre de Prandtl: $P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda}$, après l'introduction de l'expression (43), il s'ensuit le système suivant d'équations différentielles:

$$T"_0 + 2P_r\eta T'_0 = -\frac{4}{\pi}\frac{P_r}{c_p} f_0^2 V^2 \mathcal{L}_{-1}^2, \tag{44}$$

$$T"_1 + 2P_r\eta T'_1 - 2P_r T_1 = -4\frac{P_r}{c_p} f_0 f_1 V^2 \mathcal{L}_0\mathcal{L}_{-1}, \tag{45}$$

$$\begin{aligned} T"_2 &+ 2P_r\eta T'_2 - 4P_r T_2 = 4P_r f_0 V\frac{\partial T_0}{\partial x}(1-\mathcal{L}_0)+ \\ &+ 4P_r v_{p0} T'_0 + \frac{32}{3\pi}\frac{P_r}{C_p} f_0^2 V^2 v_{p0}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_1 - \eta\mathcal{L}_{-1}^2\right)- \\ &- \pi\frac{P_r}{C_p} f_1^2 V^2\mathcal{L}_0^2 - \frac{16}{\pi}\frac{P_r}{C_p} f_0 f_2 V^2 \mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_2 - \frac{P_r}{C_p} f_0^2 V^2 V'\left[\frac{16}{\pi}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 + \right. \\ &+ \frac{16}{\pi}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{4}{\pi}\mathcal{L}_{-1}^2\mathcal{L}_2 - \frac{32}{\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3\pi}\right)\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_1 - \frac{8}{\pi}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1 - \\ &\left. - \frac{4}{\pi}\mathcal{L}_{-1}^2 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta^2 - \frac{4}{3\pi}\eta\right)\mathcal{L}_{-1}^2\right] - \frac{P_r}{C_p}\frac{\sigma B^2}{\rho} f_0^2 V^2\left[\frac{8}{\pi}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{16}{\pi}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_1\right]. \end{aligned} \tag{46}$$

Toutes ces équations pourraient être traitées soit analytiquement soit numériquement pour des différentes valeurs du nombre de Prandtl dans les deux cas caractéristiques: problème de rechauffement ou de refrodissement et problème de thermomètre, definis par les conditions aux limites (2).

Pour illustrer la méthode, on va exposer par la suite juste la solution du problème de rechauffement ou de refroidissement pour $P_r = 1$, donc avec les conditions aux limites suivantes:

$$T = T_w \text{ pour } \eta = 0 \text{ et } T = T_\infty \text{ pour } y \to \infty. \tag{47}$$

Or la solution homogène de l'équation (44), tenant compte des conditions $T_0 = 1$ pour $\eta = 0$ et $T_0 = 0$ pour $\eta = \infty$, est la suivante: $T_0 = \mathcal{L}_0(\eta)$. En supposant, ensuite, la solution inhomogène de l'équation (44) comme suit: $T_0 = C\mathcal{L}_0^2(\eta)$, après l'introduction d'une telle expression dans l'équation elle-même, on aura, d'abord:

$$2C\mathcal{L}_0(\mathcal{L}"_0 + 2\eta\mathcal{L}'_0) + 2C{\mathcal{L}'_0}^2 = -\frac{4}{\pi c_p} f_0^2 V^2 \mathcal{L}_{-1}^2,$$

mais puisque: $\mathcal{L}"_0 + 2\eta\mathcal{L}'_0 = 0$, $\mathcal{L}'_0 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}_{-1}$, $\mathcal{L}'_1 = -\sqrt{\pi}\mathcal{L}_0$, cette équation précédente nous offre: $C = -\frac{1}{2c_p} f_0^2 V^2$, et l'intégrale particulière de l'équation inhomogène (44) devient ainsi tout à fait déterminée. La solution générale de l´équation complète (44) se présente maintenant sous la forme:

$$T_0 = C_1\mathcal{L}_0(\eta) - \frac{1}{2c_p} f_0^2 V^2 \mathcal{L}_0^2(\eta), \tag{48}$$

où on trouve C_1 à l'aide de la condition: $T_0(0) = 0$: $C_1 = \frac{1}{2c_p} f_0^2 V^2$. Par conséquement, la solution cherchée de l'équation (44), tenant compte des conditions de rechauffement ou de refroidissement (47), est la suivante:

$$T_0 = T_\infty + (T_w - T_\infty)\mathcal{L}_0(\eta) + \frac{1}{2c_p} f_0^2 V^2 [\mathcal{L}_0(\eta) - \mathcal{L}_0^2(\eta)]. \tag{49}$$

Et puisque cette expression (49) satisfait donc déjà toutes les deux conditions aux limites (47), alors le procédé de la détermination des solutions des approximations suivantes est considérablement allégé. Ainsi si l'on cherche la solution particulière de l'équation (45) sous la forme: $T_1 = C\mathcal{L}_0(\eta)\mathcal{L}_1(\eta)$, on aura la relation suivante:

$$C(\mathcal{L}"_0 + 2\eta\mathcal{L}'_0)\mathcal{L}_1 + C(\mathcal{L}'_1 + 2\eta'_1 - 2\mathcal{L}_1)\mathcal{L}_0 + 2C\mathcal{L}'_0\mathcal{L}'_1 = -\frac{4}{c_p} f_0 f_1 V^2 \mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_0.$$

Grâce aux propriétés bien connues des fonctions $\mathcal{L}$, tous les facteurs entre les parenthèses dans la relation ci-dessus s'annulent, et il reste: $C = -\frac{1}{c_p} f_0 f_1 V^2$. Or la solution générale de l'équation (45) est ainsi:

$$T_1 = -\frac{1}{c_p} f_0 f_1 V^2 \mathcal{L}_0(\eta)\mathcal{L}_1(\eta) + C_1\mathcal{L}_1(\eta),$$

où C_1 se trouve de $T_1(0) = 0$: $C_1 = \frac{1}{c_p} f_0 f_1 V^2$. Finalement, la solution cherchée de l'équation (45) est déterminée:

$$T_1 = \frac{1}{c_p} f_0 f_1 V^2 \mathcal{L}_1(\eta)[1 - \mathcal{L}_0(\eta)]. \tag{50}$$

Le procédé de la détermination de la solution de l'équation (46), ainsi que d'autres équations issues de la série fonctionnelle (43), pourrait être continué d'une façon analogue sans trop de difficultés.

4. Conclusion

Les solutions analytiques déterminées dans ce travail, présentées par les expressions (40) et (43), c'est à dire (49) et (50), peuvent servir : pour calculer les profils de la vitesse dans la couche limite autour des corps cylindriques, pour suivre le phénoméne de décollement de la couche limite, et en particulier, pour étudier l'influence du champ magnétique appliqué de l'extérieur sur les caractéristiques de la couche limite, y compris le transfert de chaleur, d'un fluide conducteur, et dans le cadre des hypothèses choisies. A noter, enfin, qu'il sera interessant de comparer les résultates obtenus ici avec ceux trouvés auparavant [3] mais par une autre méthode d'universalisation des équations de la couche limite.

1) Condition satisfaite en bonne approximation pour l'air, par exemple, dans un écoulement dont les vitesses ne dépassent pas $50\,m/s$ tandis que les différences de temperature dans le fluide restent en dessous de $50°K$environ.

REFERENCES

[1] Zeytounian, R. Kh., *Couche limite tridimensionnelle laminaire incompressible en régime instantionnaire*, C. R. Acad. Sc. SSSR (Ddoklady), t. 133, N0. 6, 1960.

[2] Zeytounian, R. Kh., *Contribution à l'étude de la couche limite tridimensionnelle laminaire incompressible en régime instationnaire*. Publ. de l'Office National d'études et de recherches aérospatiales, Chatillon (France), 1968.

[3] Ašković, R., *Sur une méthode approchée de traiter la couche limite laminaire magnétohydrodynamique en régime instationnaire*. Acad. royale de Belgique, Bull. de la classe des sciences, 5ᵉ série - t. LX, 1974 - 10.

ON THE DEVELOPMENT OF THE MHD THERMAL LAMINAR BOUNDARY LAYER WITH SUCTION

In this paper the problem of a thermal laminar magnetohydrodynamic (MHD) boundary layer with suction developing from rest around a body is studied. The analysis includes the case of small temperature differences, when the wall temperature is constant, as well as for the small values of the magnetic Reynolds number. Supposing a priori that the velocity of the external flow can be developed in series of $\sqrt{t}$, it is then shown that the various quantities characterizing both dynamic and thermal unsteady boundary layers can be determined by a power series expansion of $\sqrt{t}$. Finaly, as a particular case, the thermal MHD boundary layer with suction on a uniformly accelerated cylindrical body and for the Prandtl number equal to unity is calculated.

RAZVITAK MHD TEMPERATURSKOG LAMINARNOG GRANIČNOG SLOJA SA USISAVANJEM OKO CILINDRIČNOG TELA PRI UBRZANOM KRETANJU

U radu se rešava problem razvitka magnetohidrodinamičkog (MHD) temperaturskog laminarnog graničnog sloja sa usisavanjem oko cilindričnog tela proizvoljnog oblika pri ubrzanom kretanju počev iz stanja mirovanja. Analiza podrazumeva relativno slabe temperaturske razlike između tela i okolnog fluida, kao i male vrednosti magnetnog Rejnoldsovog broja. Predstavljajući brzinu spoljašnjeg potencijalnog strujanja u vidu reda po $\sqrt{t}$, u radu se pokazuje da se u tom slučaju razne veličine oba granična sloja, dinamičkog i temperaturskog, mogu izraziti, takođe, stepenim redovima po $\sqrt{t}$, čime se problem svodi na rekurzivne sisteme običnih

diferencijalnih jednačina, sa rešenjima u obliku polinoma Hermit-Čebišev-ljevog tipa i integrala Gausove funkcije. Konačno, u radu su nađena analitička rešenja MHD temperaturskog graničnog sloja sa usisavanjem za slučaj jedinične vrednosti Prandtl-ovog broja.

R. Ašković
Laboratoire de Méchanique des fluides - ENSIMEV
Université de Valenciennes
France