TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 18, pp 21-25, 1992, UDK 531.36

ОДИН КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Р. М. Булатович

(Поступила 02.03.1993.)

Рассматривается задача о неустойчивости положений равновесия неголономных систем, совпадающих с критическими точками потенциала. Получены достаточные условия неустойчивости в случае, когда ряд Маклорена аналитического потенциала начианется с постоянно положительной формы.

1. Пусть $\mathbf{q} \in R^n$ – обобщенные координаты механической системы, $T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ – кинетическая енергия ($K(\mathbf{q})$ – положительно определенная симетрическая $n \times n$ матрица, индекс T означает транспониривание), $\Pi(\mathbf{q})$ – потенциал силового поля, $A^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$ – неголономные линейные связи наложенные на систему ($A(\mathbf{q})$ – $n \times m$ матрица составленная из векторов связай, $rank\, A(\mathbf{q}) = m < n$).

Пусть $\partial\Pi/\partial\mathbf{q}(0) = 0$, тогда $\mathbf{q} = 0$ является положением равновесия. Будем считать, что $\Pi(\mathbf{q})$, $K(\mathbf{q})$ и $A(\mathbf{q})$ аналитичны по $\mathbf{q}$ в окрестности начала координат. Рассмотрим ряды Маклорена потенциала и матрицы связей

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + \Pi_{k+1}(\mathbf{q}) + \cdots, \quad k \geq 2,$$
$$A(\mathbf{q}) = A_0 + A_s(\mathbf{q}) + \cdots, \quad s \geq 1,$$

где $\Pi_i(\mathbf{q})$ и компоненты матрицы $A_i(\mathbf{q})$ – однородные формы координат степени i. В. В. Козлов доказал, что если форма $\Pi_k(\mathbf{q})$ может принимать отрицательные значения на подпространстве $\{\mathbf{q} \in R^n : A_0^T\mathbf{q} = 0\}$, то равновесие $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ неустойчиво [1]. При $k = 2$ это результат Уиттекера [2]. Этот замечательный результат в [3] распространен на случай когда неаналитический потенциал допускает представление в виде суммы однородной функции и некоторой добавки более высокого порядка малости. Остается открытым вопрос: что будет, если форма $\Pi_k(\mathbf{q})$ неотрицательна? В етом случае, ниже будут указаны достаточные условия неустойчивости равновесия данных систем.

ТЕОРЕМА. *Если* $\Pi_k(\mathbf{q}) \geq 0$ *и выполнены предположения:*
1° $\exists \mathbf{e} \in R^n$, $A_0^T\mathbf{e} = 0$, $\Pi_k(\mathbf{e}) = 0$ *и* $\Pi_{k+1}(\mathbf{e}) < 0$;
2° $s > 1$;
то равновесие $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ *неголономной системы неустойчиво.*

В случае $k = 2$, в работах [4, 5] получены более сильные утверждения. Отметим, что в работе [4] неаккуратно сформулирована теорема неустойчивости, правильная формулировка которой содержится в [5]. В отличие от [1, 4, 5], доказательство данной теоремы основано на применении прямого метода Ляпунова и в идейном отношении близко к использованому в [3, 6].

2. Уравнения движения неголономной системы запишем в форме уравнений Лагранжа с множителями связей

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} + A(\mathbf{q})\lambda, \tag{2.1}$$

$$A^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \tag{2.2}$$

где λ — m вектор произвольных коэффициентов. Разрешив уравнения (2.1) относительно ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$ и исключив на основании (2.2) коэффициенты λ, приходим к уравнениям

$$K(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = -(I - B(\mathbf{q}))\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} + g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{2.3}$$

Здесь I — единичная $n \times n$ матрица, $B(\mathbf{q}) = A(A^T K^{-1} A)^{-1} A^T K^{-1}$ и $g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — некоторая вектор-функция, квадратичная по скоростям $\dot{\mathbf{q}}$. Ясно, что $F = A^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ — первые интегралы уравнений (2.3) и следовательно, функция $\mathbf{q}(t)$ — движение неголономной системы тогда и только тогда, когда эта функция является решением уравнений (2.3) с начальными условиями удовлетворяющими соотношениям $F(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) = 0$. Принимая во внимание и закон сохранения энергии заключаем, что многообразие

$$M_h = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi(\mathbf{q}) = h, A^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0\} \subset R^n\{\mathbf{q}\} \times R^n\{\dot{\mathbf{q}}\},$$

где h — постоянная, является инвариантным относительно системы уравнений (2.3). Пусть $h = 0$. Поскольку $\Pi(0)$ не есть локальный минимум, то $M_0 \neq (0, 0)$. Следовательно, неустойчивость нулевого решения уравнений (2.3). на многообразии M_0 влечет неустойчивость равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ данной системы.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{\mathbf{q}}^T K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + 2\Pi(\mathbf{q}) = 0. \tag{2.4}$$

Можно считать, что $K(\mathbf{q}) = I + \overline{K}(\mathbf{q})$, $\overline{K}(0) = 0$. В противном случае этого можно добиться линейным преобразованием координат. Тогда для кинетической энергии справедливо неравенство

$$\dot{\mathbf{q}}^T K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \geq (1 - \Delta(\mathbf{q}))|\dot{\mathbf{q}}|^2, \tag{2.5}$$

где $0 \leq \Delta(\mathbf{q}) = o(1)$ [6]. Так как $\Pi_k(\mathbf{q}) \geq 0$ и $\Pi_{k+1}(\mathbf{q}) \geq \mu|\mathbf{q}|^{k+1}$, где в силу условия 1° $\mu = \min\limits_{|\mathbf{q}|=1} \Pi_{k+1}(\mathbf{q}) < 0$, из равенства (2.4), учитывая неравенство (2.5) следует следующая лемма.

Лемма 1. *В предположениях теоремы на* M_0 *спроведлива оценка*

$$|\dot{\mathbf{q}}| \leq \sqrt{-2\mu}|\mathbf{q}|^{(1+k)/2}(1+o(1)), \quad \mu = \min_{|\mathbf{q}|=1} \Pi_{k+1}(\mathbf{q}) < 0.$$

В дальнейшем потребуется следующий результат являющися следствием общего утверждения [7].

Лемма 2. *На множестве*

$$N = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : |\mathbf{q}| + |\dot{\mathbf{q}}| < \varepsilon,\ \mathbf{q}^T K \dot{\mathbf{q}} - f(\mathbf{q}) > 0\},$$

где $f(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|^{(3+k)/2}(1-2c^{-2}|\mathbf{q}|^{\alpha})^{1/2}$, $\alpha \in]1, 1/4[$, $0 < c = const.$, *и* ε *достаточно мало, справедливо неравенство*

$$\frac{k+3}{2}\dot{\mathbf{q}}^T K^2 \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} > |\mathbf{q}|^{1+k+\alpha}.$$

В качестве вспомагательной функции возьмем

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{q}^T K \dot{\mathbf{q}} - f(\mathbf{q}) - (\mathbf{q}^T A_0 A_0^T \mathbf{q})^{(k+3)/9}, \tag{2.6}$$

где $c < \sqrt{-2\Pi_{k+1}(\mathbf{e})}$, $\mathbf{e}$ — единичный вектор из условия 1° (ср. с [3]). Очевидно, что $V(0,0) = 0$. Пусть

$$\mathbf{q} = u\mathbf{e}, \quad \dot{\mathbf{q}} = pK^{-1}(u\mathbf{e})(I - B(u\mathbf{e}))\mathbf{e}, \tag{2.7}$$

где $u, p \in R$. Тогда $A^T(u\mathbf{e})K^{-1}(u\mathbf{e})(I - B(u\mathbf{e}))\mathbf{e} \equiv 0$, т.е. уравнения связей выполнены. С другой стороны, представляя выражения (2.7) в уравнение (2.4) и учитывая, что $\Pi_k(\mathbf{e}) = 0$, получим уравнение

$$|p| = \sqrt{-2\Pi_{k+1}(\mathbf{e})}|u|^{(1+k)/2}(1+o(1)),$$

в соответствии с которым

$$V(\mathbf{q} = |u|\mathbf{e}, \dot{\mathbf{q}} = |p|K^{-1}(u\mathbf{e})(I - B(u\mathbf{e}))\mathbf{e}) = \left(\sqrt{-2\Pi_{k+1}(\mathbf{e})} - c\right)|u|^{(k+3)/2}(1+o(1)).$$

Следовательно, область положительности функции V на многообразии M_0 не пуста в сколь угодно малой окрестности состояния равновесия.

Используя теорему Эйлера об однородных функциях и разрешая равенство (2.4) относительно Π_{k+1}, учитывая, что $K = I + \overline{K}(\mathbf{q})$, производной по времени вспомагательной функции V в силу системы (2.3) можно придать форму

$$\dot{V} = \frac{k+3}{2}\dot{\mathbf{q}}^T K^2 \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} K \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \Pi_k(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^T B \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \overline{K} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \sum_{j>2} (j-1)\Pi_{k+j}$$
$$- \frac{2(k+3)}{9}(\mathbf{q}^T A_0 A_0^T \mathbf{q})^{(k-6)/9} \dot{\mathbf{q}}^T A_0 A_0^T \mathbf{q} + G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{2.8}$$

где $G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – квадратичная форма относительно $\dot{\mathbf{q}}$, такая, что $G(\mathbf{q} = 0, \dot{\mathbf{q}}) = 0$. Разложим матрицу $B(\mathbf{q})$ в ряд Маклорена

$$B(\mathbf{q}) = B_0 + B_1(\mathbf{q}) + B_2(\mathbf{q}) + \cdots$$

Пользуясь условием 2° найдем, что $B_0 = A_0 D_0$ и $B_1(\mathbf{q}) = A_0 D_1(\mathbf{q})$, где D_i – некоторые $m \times n$ матрицы-формы степени i. Принимая во внимание леммы 1 и 2 ($(V > 0 \cap M_0) \subset N$) и неотрицательность формы Π_k получим, что на множестве $V > 0 \cap M_0$ выполнено неравенство

$$\dot{V} > |\mathbf{q}|^{1+k+\alpha} + \mathbf{q}^T A_0((D_0 + D_1(\mathbf{q}))\frac{\partial \Pi_k}{\partial \mathbf{q}} + D_0 \frac{\partial \Pi_{k+1}}{\partial \mathbf{q}}$$
$$- \frac{2(k+3)}{9}|A_0^T \mathbf{q}|^{2(k-6)/9} \mathbf{q}^T A_0 A_0^T \dot{\mathbf{q}} + o(|\mathbf{q}|^{1+k+\alpha}). \tag{2.9}$$

Оценим теперь второе и третье слагаемые в неравенстве (2.9). Из неравенства $V > 0$, очевидно, имеем $|\mathbf{q}^T A_0|^{2(k+3)/9} < \mathbf{q}^T K(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, откуда, на основании леммы 1, следует оценка

$$|\mathbf{q}^T A_0| < c_1 |\mathbf{q}|^{9/4}(1 + o(1)), \quad c_1 - const., \tag{2.10}$$

согласно которой второе слагаемое по модулю не превосходит $c_2|\mathbf{q}|^{1+k+1/4}(1 + o(1))$, c_2 – const. Используя уравнения связей и учитывая условие 2° и лемму 1, найдем

$$|A_0^T \dot{\mathbf{q}}| \le c_3 |\mathbf{q}|^{(k+5)/2}(1 + o(1)), \quad c_3 - const. \tag{2.11}$$

Третье слагаемое в силу (2.10) и (2.11) меньше, чем $c_4|\mathbf{q}|^{1+k+3/4}(1 + o(1))$, c_4 – const. В итоге получаем неравенство $\dot{V} > |\mathbf{q}|^{1+k+\alpha} + o(|\mathbf{q}|^{1+k+\alpha})$. Таким образом, все условия теоремы Четаева [8] выполняются и нулевое решение системы (2.3) на многообразии M_0 неустойчиво. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Козлов, В. В., *Об устойчивости равновесий неголономных систем.* Докл. АН СССР, 1986, Т.288, No.2, с. 289-291.

[2] Whittaker, E. T., *A treatise on the analyticcal dynamics of particles and rigid bodies.* Dover-New York. 1944.

[3] Сосницкий, С. П., *Об устойчивости равновесий неголономных систем в одном частном случае.* Укр. мат. журн. 1991, Т.43, No 4, с. 440–447.

[4] Виннер, Г. М., *Асимптотические движения механических систем с неголономными связями.* ПММ. 1989, Т. 53, Вып. 4, с. 549–555.

[5] Булатович, Р. М., *Замечания об асимптотических движениях механических систем.* ПММ (в печати).

[6] Сосницкий С. П., *О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем.* Укр. мат. журн. 1985, Т.37, No 1, с. 124–127.

[7] Булатович, Р. М., *Одно обращение теоремы Рауса.* Теор. и прим. мех. 1991, No 17, с. 31–36.

[8] Rouche, N., Habets, P., Laloy, M., *Stability theory by Lyapunov's direct method.* New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

AN NONSTABILITY CRITERION OF EQULIBRIUM FOR NONHOLONOMIC SYSTEM

Let $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + \Pi_{k+1}(\mathbf{q}) + \cdots$, $\Pi_k(\mathbf{q}) \geq 0$, $k \geq 2$ and $A(\mathbf{q}) = A_0 + A_s(\mathbf{q}) + \cdots$, $s > 1$, be McLaurin series of analytic potential and vector matrix of nonholonomic constraints. It can be proved that if there exist unit vector $\mathbf{e} \in R^n\{\mathbf{q}\}$ for which conditions $A_0^T e = 0$, $\Pi_k(\mathbf{e}) = 0$ and $\Pi_{k+1}(\mathbf{e}) < 0$ are satisfied, then the equilibrium $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ is nonstable.

JEDAN KRITERIJUM NESTABILNOSTI RAVNOTEŽE NEHOLONOMNIH SISTEMA

Neka su $\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + \Pi_{k+1}(\mathbf{q}) + \cdots$, $\Pi_k(\mathbf{q}) \geq 0$, $k \geq 2$ i $A(\mathbf{q}) = A_0 + A_s(\mathbf{q}) + \cdots$, $s > 1$, Maklorenovi redovi analitičkog potencijala i matrice vektora neholonomnih veza. Dokazuje se da ako postoji jedinični vektor $\mathbf{e} \in R^n\{\mathbf{q}\}$ koji zadovoljava uslove $A_0^T e = 0$, $\Pi_k(\mathbf{e}) = 0$ i $\Pi_{k+1}(\mathbf{e}) < 0$, ravnoteža $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ je nestabilna.

Ranislav Bulatović
Mašinski fakultet
81000 Podgorica