

ÉTUDE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE À SYMÉTRIE DE REVOLUTION

R. Ašković

(Reçu le 03.03.1991)

1. Introduction

Depuis une vingtaine d'années il existe [1] une nouvelle variante de la théorie phénoménologique sémi-empirique de la couche limite turbulente plane, fondée sur une analogie avec des *lois rhéologiques de puissance* largement utilisées dans l'étude des écoulements des liquides de viscosité non linéaire. Il est à noter qu'on y néglige aussi bien la *sous-couche visqueuse* que celle située au-dessus de la zone où on utilise habituellement la loi universelle logarithmique, d'où donc une méthode assez simple et efficace „à une seule couche“ pour étudier la couche limite turbulente.

On a également démontré que, par l'intermédiaire juste de *deux constantes empiriques*: $n = 2/3$ et $\kappa_n = 0.55$, cette nouvelle variante de la théorie de la couche limite turbulente plane a permis de recalculer et de reconfirmer toutes les 33 couches limites turbulentes, étant choisies comme *etalonnées* pour la Conférence de Stanford, 1968 [2].

2. Couche limite turbulente à symétrie de revolution

2.1. Considérations générales. On a essayé tout récemment [3] d'élargir cette idée de la nouvelle variante de la théorie phénoménologique de Novozilov [1] au cas de la couche limite turbulente à symétrie de revolution dont les équations sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= u_e u_e' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y}, \\ \frac{\partial(r\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(r\bar{v})}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

où: x, y — coordonnées cartésiennes habituelles, \bar{u}, \bar{v} — composantes de la vitesse moyenne, $u_e(x)$ — vitesse extérieure, $r(x)$ — rayon de section normale d'un corps de revolution, $\tau_t = \mu \partial \bar{u} / \partial y - \rho \overline{u'v'}$ — contrainte de cisaillement globale, contenant en principe aussi bien la partie visqueuse que celle turbulente.

Si l'on néglige la partie visqueuse de la contrainte globale, le système d'équations (1) se réduit à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= -u_e u'_e + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \\ \frac{\partial(r\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(r\bar{v})}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

où d'après la loi de puissance de viscosité et le modèle choisi [3]:

$$\frac{1}{\rho} \tau = \nu \kappa_n T^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{\nu} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^3 : \left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|^2. \quad (4)$$

Le système d'équations (2) doit être résolu pour les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \rightarrow \infty & \quad (\text{condition de Karman}), \text{ pour } y = 0, \\ \bar{u} = u_e(x), \quad \tau = 0, & \quad \text{pour } y = \delta(x), \end{aligned} \quad (5)$$

ainsi que pour la condition initiale suivante:

$$u = u_0(y) \quad \text{pour } x = x_0, \quad (6)$$

où $\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche limite.

Pour calculer la couche limite turbulente, on utilise dans la pratique encore le plus souvent une relation intégrale obtenue du système d'équations (2) — dite équation de la perte de quantité de mouvement:

$$\frac{d\ddot{\delta}}{dx} + \frac{u'_e \ddot{\delta}}{u_e} (2 + H) + \frac{r'}{r} \ddot{\delta} = \tilde{\tau}_0, \quad (7)$$

où:

$$\dot{\delta} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy, \quad \ddot{\delta} = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{u_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy, \quad (8)$$

$$\frac{\tau_0}{\rho u_e^2} = \tilde{\tau}_0, \quad \frac{\dot{\delta}}{\ddot{\delta}} = H. \quad (9)$$

2.2. Sur une méthode approchée. Si l'on élimine du système d'équations (2) l'inconnue \bar{v} , alors on aura:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = u_e u'_e + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy - \frac{r'}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \bar{u} dy. \quad (10)$$

La méthode approchée est dans un certain sens une méthode des approximations successives qui consiste, en effet, d'oublier au départ dans l'équation (10) ce „ r'/r terme“, mais d'en tenir compte, juste après avoir calculé ainsi \bar{u} , par l'intermédiaire de l'équation intégrale complète (7).

C'est donc ainsi que la méthode approchée pratique du calcul de la couche limite turbulente à symétrie de révolution consiste de faire les pas suivants:

— d'intégrer, tout d'abord, l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dz}{dx} - 6.46 \frac{\nu}{u_e^3} (u_e')^2 z^2 + 2.8 \frac{u_e'}{u_e} z + \frac{4}{3} \frac{r'}{r} z = 0.0337 \frac{u_e}{\nu}, \quad (11)$$

tenant compte de la condition initiale:

$$z = \left(\frac{u_e \delta''}{\nu} \right)^{4/3} = z_1 \quad \text{pour } x = x_1, \quad (12)$$

étant identique, au fond, à la prescription de δ'' pour $x = x_1$;

— ensuite, après avoir calculé $z(x)$, on trouve l'épaisseur de la perte de quantité de mouvement par:

$$\delta'' = \frac{\nu}{u_e} z^{3/4}, \quad (13)$$

et une fonction $\Gamma(x)$, introduite pareillement au cas plan classique [4], vérifiant ici l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d\Gamma}{dx} + (-0.0337 + 4.8\Gamma - 6.46\Gamma^2) \frac{u_e'}{u_e} = \frac{u_e''}{u_e'} \Gamma - \frac{4}{3} \frac{r'}{r} \Gamma, \quad (14)$$

par la formule suivante:

$$\Gamma = g(\ddot{R})^{2-n} = gz, \quad (15)$$

où: $\ddot{R} = u_e \delta''/\nu$, $g = (\nu/u_e^2)(du_e/dx)$;

— le pas suivant est la détermination des fonctions auxiliaires: $\varphi(\Gamma) \equiv \varphi(x)$ et $H(\Gamma) \equiv H(x)$, en utilisant les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma) &= 0.0516 + 0.472\Gamma + 1.64\Gamma^2 + 2.41\Gamma^3, \\ H(\Gamma) &= 1.37 - 5\Gamma; \end{aligned} \quad (16)$$

— enfin, les formules:

$$\begin{aligned} c_f(\ddot{R})^{1-n} &= \varphi(\Gamma), \\ H &= \dot{\delta}/\delta'' = H(\Gamma), \end{aligned} \quad (17)$$

offrent les deux caractéristiques particulièrement importantes de la couche limite turbulente respectivement $c_f(x)$ et $H(x)$.

2.3. Calcul de la vitesse moyenne et de la contrainte de cisaillement de la couche limite turbulente. Nous allons appliquer la loi-degré classique:

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/k}, \quad (18)$$

proposée initialement par Prandtl, avec $k = 7$; mais, en généralisant cette idée, l'exponent k peut être supposé variable et, par conséquent, considéré comme inconnu qui doit être déterminé.

Si l'on applique les définitions (8), alors la loi-degré (18) donnera:

$$\frac{\dot{\delta}}{\delta} = \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{\delta}}{\delta} = \frac{k}{(k+1)(k+2)},$$

d'où en utilisant (9):

$$H = \frac{\dot{\delta}/\delta}{\ddot{\delta}/\delta} = \frac{k+2}{k}. \quad (19)$$

En tenant compte que cette fois-ci la fonction H a été déjà préalablement déterminée, alors on peut essayer d'en profiter pour calculer le paramètre k de (19):

$$k = \frac{2}{H-1}, \quad (20)$$

ainsi que le rapport:

$$\frac{\ddot{\delta}}{\delta} = \frac{H-1}{H(H+1)}. \quad (21)$$

Maintenant, le profil de la vitesse moyenne (18) se ramène à:

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left(\frac{y}{\ddot{\delta}} \frac{\ddot{\delta}}{\delta} \right)^{(H-1)/2} = \left[\frac{y}{\ddot{\delta}} \frac{H-1}{H(H+1)} \right]^{(H-1)/2}, \quad (22)$$

où les fonctions $\ddot{\delta}(x)$ et $H(x)$ ont été déterminées précédemment par (13) et (16).

Finalement, il est possible de trouver aussi de (3) et (4), tenant compte de (22), la contrainte de cisaillement dans la couche limite turbulente à symétrie de révolution.

2.4. Exemple: Couche limite turbulente autour d'une sphère. Dans le cas d'une sphère de rayon R (Fig. 1) on a que:

$$u_e(x) = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{x}{R}, \quad r(x) = R \sin \frac{x}{R}, \quad (23)$$

et la solution approchée de l'équation différentielle (11) du type Riccati, tenant compte de la condition initiale (12), est la suivante:

$$z(x) = \frac{U_\infty D}{\nu} \left[0.00665 \left(\sin \frac{x}{R} \right)^{-4.13} \left(\cos \frac{x}{R} \right)^3 - 0.02 \left(\sin \frac{x}{R} \right)^{-4.13} \cos \frac{x}{R} - 0.005 \left(\sin \frac{x}{R} \right)^{-0.13} \cos \frac{x}{R} \right] + \frac{1.552 \cdot 10^3}{[\sin(x/R)]^{4.13}}. \quad (24)$$

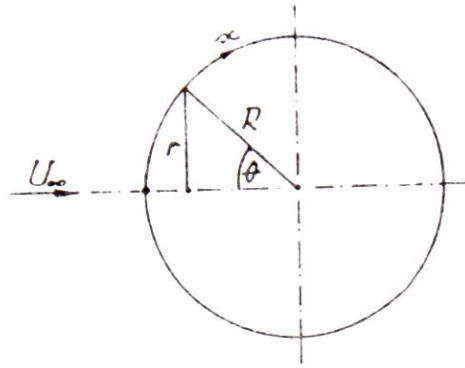


Fig. 1

Cette expression analytique (24) donne, ensuite, d'après (15) :

$$\Gamma(x) = \left(\sin \frac{x}{R} \right)^{-6.13} \left[0.00887 \left(\cos \frac{x}{R} \right)^4 - 0.02667 \left(\cos \frac{x}{R} \right)^2 - 0.00667 \left(\sin \frac{x}{R} \right)^4 \left(\cos \frac{x}{R} \right)^2 + 0.0126 \cos \frac{x}{R} \right], \quad (25)$$

ainsi que d'autres caractéristiques de la couche limite turbulente sur une sphère en utilisant (13), (16), et (17) :

$$\ddot{\delta}(x) = \frac{\nu}{u_e(x)} z^{3/4}, \quad c_f(x) = (\ddot{R})^{-1/3} \varphi(\Gamma), \quad H(x) = 1.37 - 5\Gamma(x).$$

Nous avons calculé numériquement toutes ces caractéristiques de la couche limite turbulente le long d'une sphère, en utilisant les solutions ci-dessus issues de la méthode proposée ici, ce qui est illustré par le tableau et la figure 2 ci-dessous.

$\theta[^\circ]$	Γ	$\ddot{\delta}$ [mm]	c_f	H
75	0.00137	0.26	0.0098	1.3631
80	0.00133	0.34	0.0095	1.3633
90	0.	0.50	0.0082	1.37
95	-0.00037	0.60	0.0077	1.372
100	-0.00340	0.71	0.0071	1.387
110	-0.01160	1.02	0.0059	1.428
120	-0.03220	1.60	0.0043	1.531
130	-0.09510	2.78	0.0019	1.845
135	-0.17460	3.93	0.0006	2.243
137	-0.22670	4.58	0.00007	2.503

Comparés aux cas — directement analogue [1] ou indirectement analogue (par exemple, l'ident. 2500 de Bradshaw ou l'ident. 3600 de Moses [2]) — tous nos résultats, illustrés par la Fig. 2 (on a calculé aussi les profils de vitesse moyenne et la contrainte de cisaillement), manifestent un accord qualitatif, ce qui témoigne vraisemblablement en faveur de la méthode proposée ici. Il est à espérer que cette

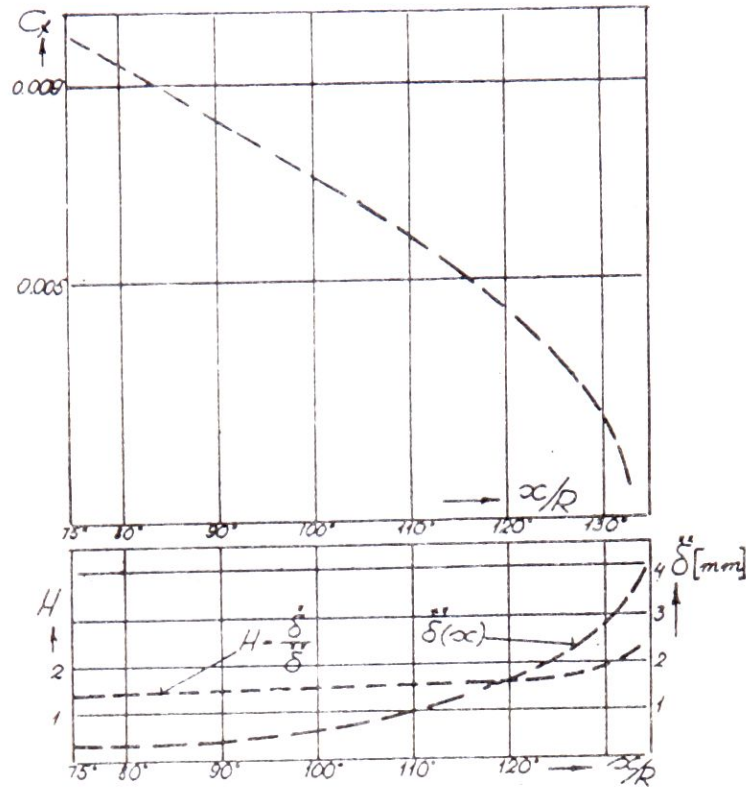


Fig. 2

même tendance sera conservée dans d'autres cas particuliers des corps à symétrie de révolution que nous sommes en train d'étudier.

REFERENCES

- [1] Novozilov, V. V., *Théorie de la Couche Limite Turbulente Plane d'un Fluide Incompressible (en russe)*, Sudostroenie, Leningrad, 1977.
- [2] *Proceedings — Computation of Turbulent Boundary Layers — 1968*, AFOSR — IFP — Stanford Conference.
- [3] Ašković, R., *Sur une méthode approchée de traiter la couche limite turbulente à symétrie de révolution*, paraîtra prochainement à Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl. 3-4 (1991), Bucarest.
- [4] Buri, A., *Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung*, Diss. Zürich, 1931.

SIMPLIFIED TURBULENT BOUNDARY-LAYER CALCULATIONS FOR BODIES OF REVOLUTION

An analysis is made of the turbulent boundary layer on a body of revolution in the sense of the well known phenomenologic semi-empiric plane boundary-layer theory, based on an analogy with the power rheologic laws widely used in the study of the non linear viscous flows. So a simple "one layer method" to calculate the turbulent boundary layer on the bodies of revolution is first prepared, and then tested on a sphere, including the evaluation of the separation point.

PRIBLIŽNA METODA ZA REŠAVANJE
OSNOSIMETRIČNOG TURBULENTNOG GRANIČNOG SLOJA

U radu se predlaže jedna približna metoda za proračun osnosimetričnog turbulentnog graničnog sloja, u smislu poznate fenomenološke poluempirijske teorije turbulentnog strujanja, zasnovane na analogiji sa strujanjima tečnosti nelinearnih stepenih reoloških zakona viskoznosti. Prvo testiranje ovog relativno jednostavnog postupka na primeru analize turbulentnog graničnog sloja na sferi, uključujući i problem odvajanja graničnog sloja, dalo je ohrabrujuće rezultate. U toku je primena metode i na neka druga obrtna tela od interesa za praksu.

R. Ašković
Professeur à l'Université de Valenciennes
Res. Verley, ent. 13, app. 120
59300 Valenciennes Cedex, France