TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 17, pp 59–71, 1991, UDK 532.1; 517.9

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В. П. Фильчакова

(Поступило 20.09.1991)

1. Введение. Эволюционные уравнения, допускающие решения в виде солитонов, хорошо известны математикам и механикам, как уравнения, обладающие замечательным свойством полной интегрируемости, а также как универсальные уравнения, пригодные для аппроксимации широкого круга разнообразных физических явлений [1]. Отметим, кстати, новую роль трансцендент Пенлеве (в частности P_1 и P_2, как более изученных) в современной теории солитонов [2, 3], так как последние стали служить критерием полной интегрируемости эволюционных ДУЧП.

В связи с исследованиями по физике плазмы [4, 5] в последнее время возродился интерес к уравнениям P-типа (или типа Пенлеве), относящимся к полиномиальному классу НОДУ второго порядка и обладающими P-свойствами: наличие среди особых точек только фиксированных критических точек и подвижных полюсов различной кратности. Еще в начале века французскими аналитиками (Пикаром, Пенлеве, Гамбье) был составлен канонический список из 50 уравнений с P-свойствами, так называемых трансцендент Пенлеве P_1–P_6 [6–8], которые при произвольных неподвижных параметрах этих уравнений не разрешаются в терминах классических функций и их решения не могут быть выражены в терминах линейных дифференциальных уравнений. Их точные решения, представляя собой существенно новые трансценденты P_1–P_6, в общем случае не находятся, за исключением ряда частных случаев параметров, например [9]. В [10, 11] построен алгоритм для приближенного поиска мероморфных интегралов Пенлеве — первой и второй трансцендент Пенлеве P_1 и P_2 на базе метода выделения особенностей типа «полюс» с помощью суперпозиции регулярных и нерегулярных степенных рядов [12], что существенно при исследовании физических процессов современной теории солитонов.

Приближенные решения уравнений Пенлеве находятся методом рекуррентных степенных рядов с учетом влияния возмущений исходных

данных на приближенное решение при аналитическом продолжении, осуществляемом склейкой регулярных и нерегулярных рядов в окрестности подвижных полюсов, для которых установлены точные критерии существования. Приведены рекуррентные формулы для первой и второй трансцендент Пенлеве.

2. Критерий полной интегрируемости эволюционных уравнений. К эволюционным уравнениям ДУЧП относятся такие уравнения:

1. *уравнение Кортевега-де Фриза* (КдФ), основное и ряд модифицированных уравнений, описывающих распространение волн в одном направлении по поверхности мелкого канала, с одной стороны, и плазму в сильном магнитном поле, с другой:

$$6u_t = 3uu_x - (1/2)u_{xxx}, \tag{1}$$

модифицированное уравнение МКдФ:

$$6v_t = 3v^2 v_x - (1/2)v_{xxx}, \tag{1'}$$

обобщенное уравнение ОКдФ:

$$u_t + u_\rho u_x + u_{xxx} = 0; \tag{1''}$$

2. *синус-уравнение Гордона* (СГ), характеризующее распространение волны в присутствии «закрепляющего» потенциала, описывающее дислокации, свойства ферромагнетиков, поверхностных эпитаксиальных структур и др.:

$$u_{xt} = \sin u; \tag{2}$$

являющееся частным случаем уравнения Клэйна-Гордона:

$$u_{xt} = f'(u), \qquad f(u) = -\cos u; \tag{2'}$$

3. *нелинейное уравнение Шрёдингера*, описывающее в общем случае эволюцию огибающей несущей волны в слабонелинейных системах:

$$iu_t = u_x^2 - 4iu^2 u_x + 8|u|^4 u. \tag{3}$$

4. *уравнение Буссинеска*, описывающее волны, перемещающиеся, как вправо, так и влево:

$$u_{tt} = u_{xx} + 6(u^2)_{xx} - u_{xxxx}, \tag{4}$$

уравнение Борна-Инфельда:

$$(1 - u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (1 + u_x^2)u_{tt} = 0 \tag{5}$$

возникающее при изучении некоторых моделей квантовых полей.

Приведем критерий полной интегрируемости эволюционных уравнений [1–5]: для того, чтобы ДУЧП вида (1)–(5) были разрешимы обратным методом рассеяния (Inverse Scattering Method), который еще называют методом спектральных преобразований, т.е. были вполне интегрируемы, необходимо чтобы сопутствующее НОДУ, полученное редукцией соответствующего эволюционного уравнения с помощью преобразований Бэклунда [13], обязательно принадлежало к уравнениям P-типа, т.е. являлось одной из шести трансцендент Пенлеве P_1–P_6.

Опыт последних лет [14–15] показал: для многих эволюционных уравнений решения чаще всего распадаются на конечное число солитонов (стабильные объекты, или решения в виде импульсов, относящиеся к точно интегрируемым одномерным гамильтоновым системам) и некоторый остаток, асимптотически стремящийся к решению вспомогательного НОДУ второго порядка полиномиального класса.

Оказалось, что решения этих вспомогательных уравнений не должны иметь подвижных точек ветвления или существенно особых точек, а могут в качестве особых подвижных точек иметь только полюса, т.е. их интегралы суть мероморфные функции. Это и подтверждает тот факт, что эти мероморфные функции должны быть решениями уравнений P-типа, т.е. трансцендентами Пенлеве.

Широко применямое при отыскании автомодельных решений эволюционных уравнений известное преобразование Миуры

$$f(z) = w'(z) + w^2(z), \qquad w(z) \equiv P_2, \tag{6}$$

представляет собой математическую комбинацию функции $w(z)$, тождественно равной второй трансценденте Пенлеве P_2, первая же трансцендента Пенлеве P_1 связана со специальным видом КдФ:

$$u_t + u_{xxx} - 6u_x u = 0, \qquad u(x,t) \equiv u, \tag{7}$$

где связь между автомодельным решением этого уравнения и P_1 удается выразить формулой

$$u(x,t) = 2[w(z) - t], \qquad z = x - 6t^2, \qquad w(z) \equiv P_1, \tag{8}$$

а также для P_1 установлена связь с автомодельным решением уравнения Буссинеска [4] следующеий заменой

$$u(x,t) = w(z), \qquad z = x - t, \tag{9}$$

где в зависимости от выбора константы интегрирования $w(z)$ — либо эллиптическая функция, либо P_1. Вторая трансцендента Пенлеве P_2 связана еще и с уравнением ОКдФ (1″), а также с уравнением вида (7) и такой разновидностмю МКдФ, которое описывает акустические волны в ангармонических решетках

$$v_t + v_{xx} - 6v_x v^2 = 0, \qquad v(x,t) \equiv v. \tag{10}$$

Имеется связь и между другими эволюционными уравнениями с трасцендентами Пенлеве P_3–P_6: с P_3 связано уравнение СГ [2], P_4 связано с уравнением Шредингера [3], P_5 связано с уравнением МКдФ (1′), а уравнение Борна-Инфельда (5) связано с P_6.

С момента выявления трансцендент Пенлеве и по сей день ведется тщательный качественный анализ последних, позволивший создать вполне осязаемый их теоретический портрет, свидетельством чему является большое число исследований на эту тему [16]. Практическая сторона этого вопроса во многом остается в тени. Тесная взаимосвязь трансцендент Пенлеве с вполне интегриремыми эволюционными ДУЧП (1–5) стимулировала необходимость создания конструктивных методов для построения трансцендент Пенлеве, которые являются мероморфными функциями. Для отыскания полюсов последних нами предложен эффективный алгоритм с использованием обобщенных степенных рядов. Покажем суть всего сказанного на примерах первой и второй трансцендент Пенлеве P_1 и P_2.

3. Вычислительная процедура. Разобъем весь вычислительный процесс на три этапа:

I. Определение области голоморфности решений исходных (P_1 и P_2) и инверсных ($\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$) уравнений; точные критерии существования подвижных полюсов.

II. Изучение влияния возмущения исходных данных на приближенное решение (в области голоморфности и в z-окрестности подвижных полюсов).

III. Склейка решений в окрестности подвижных полюсов методом обобщенных степенных рядов, аналитическое продолжение.

В основе первого этапа лежит идея последовательного решения исходных (P_1 и P_2) и инверсных ($\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$) уравнений. Переход от исходных к инверсным уравнениям осуществляется при выполнении точных критериев существования подвижных полюсов, нахождение которых сводится к нахождению нулей инверсной задачи, [17]. Второй этап позволяет строить аналитические продолжения решений рассматриваемых уравнений, находясь в заданной ε-окрестности точного решения. Третий этап позволяет конкретизировать подвижные параметры (x^*, α, β) первой и второй трансцендент Пенлеве и коэффициенты регулярных и нерегулярных рядов, аппроксимирующих трансценденты Пенлеве P_1 и P_2 на участках аналитических продолжений.

I: Рассмотрим начальную задачу Коши для первого уравнения Пенлеве P_1:

$$w'' = 6w^2 + \lambda x, \qquad \lambda \text{ — фиксированный параметр,} \tag{11}$$

и для второго уравнения Пенлеве P_2:

$$w'' = 2w^3 + xw + \mu, \qquad \mu \text{ — фиксированный параметр} \tag{12}$$

при соответствующих начальных условиях

$$w(x_0) = w_0 = \text{const}; \qquad w'(x_0) = w_1 = \text{const}. \tag{13}$$

Для инверсных уравнений $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$ имеем аналогичные задачи Коши:

$$u'' \cdot u = 2(u')^2 - \lambda x u^3 - 6u, \tag{11'}$$

$$u'' \cdot u = 2(u')^2 - \mu u^3 - x u^2 - 2, \tag{12'}$$

$$u(x_0) = u_0 = \text{const}; \qquad u'(x_0) = u_1 = \text{const}, \tag{13'}$$

где с помощью инверсии введена функция

$$u = 1/w. \tag{14}$$

Теорема 1. *Решение задачи* (11), (13) *голоморфно в области*

$$|x - x_0| < 1/(M+1),$$

где $M = \max\{|x_0|, |w_0|, |w_1|, |\lambda|\}$, *а задачи* (12), (13) — *в области*

$$|x - x_0| < 1/(M_1+1),$$

где $M_1 = \max\{|x_0|, |w_0|, |w_1|, |\mu|\}$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x)$ — *решение задачи* (11′), (13′), $|u(x_0)| \geq 1$, *тогда это решение голоморфно в области*

$$|x - x_0| < 1/(\overline{M}+1)^{5/2},$$

где $\overline{M} = \max\{|x_0|, |u_0|, |u_1|, |\lambda|\}$, *если* $u(x)$ — *решение инверсной задачи* (12′), (13′), *тогда это решение голоморфно в области*

$$|x - x_0| < 1/(\overline{M}_1+1)^2,$$

где $\overline{M}_1 = \max\{|x_0|, |u_0|, |u_1|, |\mu|\}$.

Доказательства теорем 1, 2 основаны на формальном построении рядов методом неопределенных коэффициентов и дальнейшем доказательстве сходимости построенных рядов в соответствующих областях. Доказательство следующих ниже теорем основано на исследовании решении задач (11), (13) и (12), (13) в окрестности подвижного полюса x^* и применении теоремы Больцано-Коши.

Теорема 3. *Пусть* $w(x)$ — *решение задачи* (11), (13). *Для того, чтобы точка* x^* *была подвижным полюсом* $w(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

существовал промежуток $[a,b]$, *на котором решение задачи* (11′), (13′), *было бы непрерывной функцией и такой, что* $u(x^*) = u'(x^*) = 0$, $u''(x^*) = 2$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $w(x)$ — *решение задачи* (12), (13). *Для того, чтобы* x^* *была подвижным полюсом* $w(x)$, *необходимо и достаточно существование промежутка* $[a,b]$, $x^* \in [a,b]$, *на котором* $u(x)$ — *решение* (12′), (13′), *было бы непрерывной функцией, причем* $u(a) \cdot u(b) < 0$.

II. В связи с тем, что приходится строить аналитические продолжения решений рассматриваемых уравнений, необходим математический аппарат, позволяющий решать прямую и обратную задачи теории погрешности для приближенных решений как в области голоморфности, так и в окрестности подвижных полюсов. Сделать это позволяют приведенные ниже теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть*: 1. $w(x)$ — *решение задачи* (11), (13); 2. x^* — *подвижный полюс. Тогда для приближенного решения*

$$w(x) = (x - x^*)^\rho \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x^*)^n, \qquad \rho = -2, \tag{15}$$

задачи (11), (13) *в области*

$$|x - x^*| < 1/(|x^*| + |\alpha| + |\lambda|), \tag{16}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta w_N(x) \le \frac{(|x^*| + |\alpha| + |\lambda|)^{N+1} \cdot |x - x^*|^{N-1}}{1 - (|x^*| + |\alpha| + |\lambda|) \cdot |x - x^*|}.$$

Доказательство следует из оценки остатка ряда, комбинации методов неопределенных коэффициентов, математической индукции и мажорант.

ТЕОРЕМА 6. *Для приближенного решения* (15) *задачи* (12), (13) *при* $\rho = -1$, $C_0 \ne 0$, *в области*

$$|x - x^*| < \frac{1}{2(M + |\mu| + 1)}, \tag{17}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta w_N(x) \le \frac{(M + |\mu| + 1)^{N+1} \cdot |x - x^*|^N \cdot 2^N}{1 - 2(M + |\mu| + 1) \cdot |x - x^*|}.$$

Замечание. Так как существующие методы позволяют, в основном, находить подвижные полюса x^* приближенно, то следует ввести в приближенное решение (15) приближенные значения $\widetilde{x}^*$ и $\widetilde{C}_n$. Для уточненного приближенного решения

$$\widetilde{w}_N(x) = (x - \widetilde{x}^*)^\rho \cdot \sum_{k=0}^{N} \widetilde{C}_n (x - x^*)^n \tag{18}$$

справедливы теоремы 7 и 8.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть для случая P_1 выполняются п.п. 1, 2 теоремы 5 и $\Delta\widetilde{x}^* < 1/\rho_1$. Тогда для приближенного решения (18) задачи (11), (13), $\rho = -2$, в области $(\widetilde{x}^* - 1/\rho_1, \widetilde{x}_1^*)$ справедлива оценка погрешности*

$$\Delta\widetilde{w}_N \le \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{2\Delta\widetilde{x}^*}{|x - \widetilde{x}_1^*|^3}, \qquad \Delta_1 \le \frac{(\rho_1 - 2\Delta\delta)^{N+1} \cdot |x - \widetilde{x}^*|^{N-1}}{1 - (\rho_1 - 2\Delta\delta)|x - \widetilde{x}^*|};$$

$$\Delta_2 \le \frac{\Delta\delta \cdot \rho_1^4 \cdot |x - \widetilde{x}_2^*|^2}{1 - \rho_1|x - \widetilde{x}_2^*|}, \qquad \Delta_3 \le \frac{\Delta\widetilde{x}^*\rho_1^4|x - \widetilde{x}_2^*| \cdot (2 - \rho_1|x - \widetilde{x}_2^*|)}{(1 - \rho_1|x - \widetilde{x}_2^*|)^2}$$

и, кроме того, $\widetilde{x}_1^* = \widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^*$, $\widetilde{x}_2^* = \widetilde{x}^* + \Delta\widetilde{x}^*$.

При доказательстве для оценки $|w - \widetilde{w}|$ применено неравенство

$$|w - \widetilde{w}| \le \sup_{G,F}\left|\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\widetilde{x}^*}\right| \cdot \Delta\widetilde{x}^* + \sum_0^\infty \sup_G\left|\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\widetilde{C}_n}\right|\Delta\widetilde{C}_n,$$

где

$$G = \{x : |x - \widetilde{x}^*| \le \Delta\widetilde{x}^*\}, \qquad F = \{\alpha : |\alpha - \widetilde{\alpha}| \le \Delta\widetilde{\alpha}\}.$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть для случая P_2: 1. Известна оценка погрешности значения $\widetilde{x}^*$: $|x^* - \widetilde{x}^*| \le \Delta\widetilde{x}^*$, 2. $\Delta M \le 1/2$, 3. $\widetilde{x}^* \le x^*$, $\Delta\widetilde{x}^* < 1/(2(\rho_2 + \Delta L - \Delta M))$, где $\rho_2 = M + \Delta M + |\mu| + 1$. Тогда для приближенного решения (18), $\rho = -1$, задачи (12), (13), в области $(\widetilde{x}^* - 1/(2(\rho_2 + \Delta L - \Delta M)), \widetilde{x}_1^*]$ справедлива оценка*

$$\Delta\widetilde{w}_N(x) \le \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\widetilde{x}^*}{(x - \widetilde{x}_1^*)^2}, \qquad \Delta_1 \le \frac{(\rho_2 - \Delta M)^{N+1} \cdot |x - \widetilde{x}^*|^N \cdot 2^N}{1 - 2(\rho_2 - \Delta M)|x - \widetilde{x}^*|},$$

$$\Delta_2 \le \frac{\Delta\widetilde{x}^* \cdot 2(\rho_2 + \Delta L - \Delta M)^2}{(1 - 2(\rho_2 + \Delta L - \Delta M)|x - \widetilde{x}_2^*|)^2}, \qquad \Delta_3 \le \frac{\Delta M \cdot 2\rho_2^2 \cdot |x - \widetilde{x}_2^*|}{1 - 2\rho_2|x - \widetilde{x}_2^*|},$$

при этом $\Delta L = \max\{\Delta\widetilde{x}^*, \Delta\beta\}$, $\widetilde{x}_1^* = \widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^*$, $\widetilde{x}_2^* = \widetilde{x}^* + \Delta\widetilde{x}^*$.

Теоремы 7 и 8 относились к вопросу исследования погрешности исходных данных на приближенное решение в окрестности подвижных полюсов. Для построения полной топологической картины во всеи области существования трансцендент Пенлеве P_1 и P_2 приведем теоремы, работающие в областях их голоморфности.

Теорема 9. *Для приближенного решения задач* (11)–(13) *в виде отрезка регулярного степенного ряда в окрестности начальной (регулярной) точки* x_0 :

$$w_N(x) = \sum_0^N a_n(x - x_0)^n \tag{19}$$

в области, опредееленной теоремой 1, $|x - x_0| < 1/(M + 1)$ *справедливы оценки:*

$$\Delta w_N(x) \le \frac{(M+1)^2((M+1)\cdot|x-x_0|)^{N+1}}{1-(M+1)|x-x_0|} \qquad \text{для задачи (11), (13)}$$

и

$$\Delta w_N(x) \le \frac{M_1(M_1+1)^{N+1}\cdot|x-x_0|^{N+1}}{1-(M_1+1)|x-x_0|} \qquad \text{для задачи (12), (13)}$$

где M *и* M_1 *взяты из теоремы* 1.

Исходя из того, что полное решение задач (11)–(13) обеспечивается аналитическим продолжением за пределы особых точек и, следовательно, в дальнейшем придется иметь дело с приближенными начальными данными поэтапных задач Коши (в каждом последующем шаге аналитического продолжения):

$$\widetilde{w}(x_0) = \widetilde{w}_0 = \text{const}, \qquad \widetilde{w}'(x_0) = \widetilde{w}_1 = \text{const} \tag{20}$$

рассмотрим задачу Коши для P_1 и P_2 при приближенных начальных условиях (20) и оценим приближенное решение

$$\widetilde{w}_N(x) = \sum_{n=0}^N \widetilde{a}_n(x - x_0)^n\,. \tag{21}$$

Теорема 10. *Пусть* $\Delta M \le 1$, *тогда для приближенного решения* (21) *задач* (11), (20) *и* (12), (20) *в областях*

$$|x - x_0| < 1/(2(M + \Delta M + 1))$$

справедливы такие оценки:

$$\Delta\widetilde{w}_N(x) \le \frac{(M+1)^2\cdot((M+1)|x-x_0|)^{N+1}}{1-(M+1)|x-x_0|} + \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^2}{2(1-2(M+\Delta M+1)|x-x_0|)}\,,$$

для задачи (11), (20) *и*

$$\Delta\widetilde{w}_N(x) \le \frac{M(M+1)^{N+1}\cdot|x-x_0|^{N+1}}{1-(M+1)(x-x_0)} + \frac{\Delta M}{4(1-2(M+\Delta M+1)|x-x_0|)}$$

для задачи (12), (20), *где* $\Delta M = \max\{\Delta\widetilde{w}_0, \Delta\widetilde{w}_1\}$, $M = \max\{|x_0|, |\widetilde{w}_0|, |\widetilde{w}_1|, |\lambda|\}$ *для* (11), (20), *и для* (12), (20): $M = \max\{|x_0|, |\widetilde{w}_0|, |\widetilde{w}_1|, |\mu|\}$.

Доказательство основано на неравенстве

$$|w - \widetilde{w}_N(x)| \le |w - \widetilde{w}| + |\widetilde{w} - \widetilde{w}_N(x)|$$

с учетом теоремы 9.

III: Чтобы довести задачу построения трансцендент Пенлеве P_1 и P_2 до логического конца, надо сначала решить задачу Коши для уравнений (11) и (12) при точных начальных условиях (13), представив приближенное решение $w_N(x)$ в виде отрезка ряда (19) с неизвестными коэффициентами a_n, для определения которых найдены такие рекуррентные формулы:

$$a_{n+2} = \frac{6a_n^{(2)} + \lambda\gamma_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}, \qquad \gamma_0 \equiv x_0, \quad \gamma_1 = 1 \quad (\text{случай } P_1) \tag{22}$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_n = 0, \quad a_0 = w_0, \quad a_1 = w_1,$$

и для случая P_2 имеем:

$$a_{n+2} = \frac{2a_n^{(3)} + b_n + \mu_n}{(n+1)(n+2)}$$

где

$$a_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(2)} a_{n-k}, \qquad a_k^{(2)} = \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i}, \tag{23}$$

$$a_0 = w_0, \quad a_1 = w_1, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} l_k a_{n-k}, \quad l_0 = x_0, \quad l_1 = 1,$$

$$l_2 = l_3 = \ldots = l_n = 0, \quad \mu_0 = \mu, \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n \equiv 0.$$

Затем для реализации алгоритма выделени полюса рассмотрим некоторую последовательность аналитических продолжений в виде рядов для мероморфных интегралов

$$w_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{[l]} (x - x_0^{[l]})^n, \qquad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

с разными значениями точек разложения $x_0^{[l]}$ (причем $x_0^{[1]} \equiv x_0$), имеющими тенденцию движения к ближайшему полюсу x_1^*. С увеличением l (l — количество аналитических продолжений) коэффициенты $a_n^{[l]}$ начинают быстро расти по модулю, а радиусы сходимости $R^{[l]}$, соответственно, уплотняться. Начиная с некоторого $l = 4, 5, \ldots$ по мере приближения к полюсу для полюса m-го порядка справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ l\to L}} \frac{a_{(m-1)}^{[l]}{}_{n-m+1}}{a_{(m-1)}^{[l]}{}_{n-m+2}} = \cdots = \lim_{\substack{n\to\infty \\ l\to L}} \frac{\ddot{a}_{n-1}^{[l]}}{\ddot{a}_n^{[l]}} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ l\to L}} \frac{a_{n-1}}{a_n} = R^{[L]}, \tag{25}$$

где $\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{n-m+1}$ — коэффициенты такого представления

$$W = \underbrace{\int \cdots \int}_{(m-1)} w(x)\, \underbrace{dx \ldots dx}_{(m-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{n-m+1} (x - x_0^{[l]})^n, \tag{26}$$

которые связаны с коэффициентами $a_n^{[l]}$ такими связями:

$$\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{-m+1} = \alpha_{m-1}, \qquad \ldots, \qquad \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{-1} = \frac{\alpha_1}{(m-2)!},$$

$$\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{k} = \frac{a_k^{[l]} \cdot k!}{(k+m-1)!}, \qquad \ldots, \qquad \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{0} = \frac{a_0^{[l]}}{(m-1)!}$$

где $\alpha_{m-1}, \alpha_{m-2}, \ldots, \alpha_1$ — константы интегрирования, $\ddot{a}_{n+2}^{[l]} = (n+1)(n+2)$ $a_{n+2}^{[l]}$, $\dot{a}_{n+1}^{[l]} = (n+1)a_{n+1}^{[l]}$. После нахождения $R^{[L]}$ мероморфные интегралы (трансценденты Пенлеве) представим в виде суммы

$$w(x) = P_\nu(x) + R_\nu(x), \tag{28}$$

где ν — тот номер, с которого начинает функционировать предельное соотношение (25).

В окрестности полюса $x_1^* = \sum_{i=1}^{i=L} x_0^{[i]} + R^{[L]}$ трансценденты Пенлеве представляются суперпозицией (28) конечного полинома $P_\nu(x)$ и некоторой обобщенной геометрической прогрессии $R_\nu(x)$, которая легко суммируется. $P_\nu(x)$ и $R_\nu(x)$ находятся непосредственно из соотношений:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{(m-1)} P_\nu(x)\, \underbrace{dx \ldots dx}_{(m-1)} = \sum_{k=0}^{\nu+(m-1)} \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{k-\rho+1} (x - x_0^{[l]})^k, \tag{29}$$

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{(m-1)} R_\nu(x)\, \underbrace{dx \ldots dx}_{(m-1)} = \frac{\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{\nu+1} (x - x_0^{[l]})^{\nu+m}}{1 - g(x - x_0^{[l]})} + \omega(\varepsilon), \tag{30}$$

где m — кратность полюса, $g = 1/R^{[l]}$.

Для первой трансценденты Пенлеве имеем ($m = 2$):

$$P_\nu = \sum_{n=0}^{\nu} a_n^{[l]} (x - x_0^{[l]})^n,$$

$$R_\nu = a_{\nu+1}^{[l]} (x - x_0)^{\nu+1} \cdot \frac{1 - ((\nu+1)/(\nu+2)) g(x - x_0^{[l]})}{[1 - g(x - x_0^{[l]})]^2},$$

$$|\omega(\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon \left| \underset{(1)}{a}{}^{[l]}_{\nu+1} (x - x_0^{[l]})^{\nu+1} \right|}{\left| [1 - g(x - x_0^{[l]})]\, [1 - (g+\varepsilon)(x - x_0^{[l]})] \right|}, \tag{31}$$

$\varepsilon = 10^{-r}$, r — степень точности вычислений.

Параметр λ, входящий в уравнение (11) существенно влияет на расстояние $\Delta = x_2^* - x_1^*$ (если $x_2^* > x_1^*$) между действительными полюсами первой трансценденты Пенлеве P_1. Числовые эксперименты потвердили теоретическое утврждение Бутру о том, что Δ стремится асимптотически к нулю, как корень четвертой степени из расстояния x_2^* от начала координат

$$\Delta \sim \Omega(\lambda)(x_2^*)^{-1/4}\,. \tag{32}$$

Зная положение полюса x_1^*, можно в его окрестности применить лорановское разложение и искать интеграл $w(x)$ в виде (18), $\rho = -2$, коэффициенты $\widetilde{C}_n$ которого определяются такими рекуррентными формулами

$$\widetilde{C}_n = \frac{6}{n(n-1)-12}\cdot\sum_{k=-1}^{n-3} C_k C_{n-k-2}, \quad n \geq 6, \quad \widetilde{C}_{-2} = 1,$$

$$\widetilde{C}_{-1} = \widetilde{C}_0 = \widetilde{C}_1 = 0, \quad \widetilde{C}_2 = -\frac{\lambda x^*}{10}, \quad \widetilde{C}_3 = -\frac{\lambda}{6}, \quad \widetilde{C}_4 = \alpha, \quad \widetilde{C}_5 = 0. \tag{33}$$

Здесь α скрытый подвижный параметр, зависящий от начальных условий (13).

Для второй трансценденты P_2 получены такие рекуррентные формулы ($\rho = -1$ в формуле (18)):

$$\widetilde{C}_n = \frac{2\sum\limits_{k=2}^{n-2}\widetilde{C}_k\widetilde{C}_{n-k} + 2\sum\limits_{k=2}^{n-2}\widetilde{C}_k^{(2)}\widetilde{C}_{n-k} + x^*\widetilde{C}_{n-2} + \widetilde{C}_{n-3}}{(n-1)(n-2)-6} \qquad n \geq 5\,, \tag{34}$$

$$\widetilde{C}_0 = 1, \quad \widetilde{C}_1 = 0, \quad \widetilde{C}_2 = -\frac{x^*}{6}, \quad \widetilde{C}_3 = \frac{-1+\mu}{4}, \quad \widetilde{C}_4 = \beta$$

(скрытый подвижный параметр).

Для второй трансценденты P_2 значения полюса x^* имеют тенденцию движения к началу координат с возрастанием параметра μ. Как и в случае с первой трансцендентой Пенлеве наблюдается тот факт, что расстояние между действительными полюсами x_1^* и x_2^*- для P_2 стремится асимптотически к нулю, как корень квадратный из расстояния полюса от начала координат: только для P_1 оно зависит от параметра λ, а для P_2 не зависит от параметра μ:

$$\Delta_1 \sim \Omega_1(x^{-1/2}), \qquad \Omega_1 \neq f(\mu)\,. \tag{35}$$

Переход через полюс x^* удобно осуществлять при помощи склейки решений (при этом появляется реальная возможность определения скрытых параметров α и β, соответственно, для P_1 и P_2), представленных просуммированными рядами вида (28), с выделенной геометрической прогрессией, и отрезком ряда Лорана вида (18), в общих точках z-окрестности полюса.

Следует отметить в заключение, что задача продолжения решения трансцендент Пенлеве за их особые точки (полюса) на действительной оси является одной из очень интересных и сложных задач аналитической теории дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Солитоны в действии*, под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта, Москва, Мир, 1981.

[2] Ablowitz, M. J., Ramani, A., Segur, H., *A connection between nonlinear evolution equations and ODE of P-type*, J. Math. Phys. **21** (4) (1980), 1006.

[3] Фильчакова, В. П., *Уравнения Пенлеве и нелинейные волновые процессы*, в: *Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред*, Наукова думка, Киев, 1986, 190.

[4] Zabusky, N. J., Kruscal, M. D., *Interaction of solitons in a collisionless and reccurence of initial states*, Phys. Rev. Letters **15** (1965), 240.

[5] Gardner, C. S., Morikawa, G. M., *Similarity in the asymptotic behavior of collisionfree hydromagnetic wave and water-waves*, Courant Inst. of Math. Sc. Rep. **40** (1969), 9082.

[6] Painleve, P. M., *Memoire sur les equations différentielles dont integrale générale est uniforme*, Bull. de la Soc. Math. **28** (1900), 201.

[7] Айнс, Э., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Харьков, Гостехиздат Украины, 1939.

[8] Голубев, В. В., *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.

[9] Airault, N., *Rational solutions of Painleve equations*, Stud. in Appl. Math. and Physics **61** (1) (1979), 31.

[10] Фильчакова, В. П., *Определение полюсов мероморфных интегралов регулярными степенными рядами*, в: *Методы количественного и качественного исследования интегральных уравнений*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1975, 154.

[11] Фильчакова, В. П., *Об одном приближенном методе решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка полиномиального класса*, в: *Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1979, 85.

[12] Фильчаков, П. Ф., *Численные и графические методы прикладной математики*, Наукова думка, Киев, 1972.

[13] Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and their Applications, ед. Р. М. Миура, Спрингер, Берлин, 1976, пп. 456.

[14] Калоджеро, Ф., Дегасперис, А., *Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений*, Мир, Москва, 1985.

[15] Додд, Р., Эйлбэк, Дж., Гиббон, Дж., Моррис, Х., *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Москва, Мир, 1988.

[16] Еругин, Н. П., *Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка*, Диф. уравнения **12** (3) (1976), 387.

[17] Лукашевич, Н. А., Орлов, В. Н., *Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве*, Диф. уравнения **25** (10) (1989), 1829.

ON A METHOD OF SOLUTION AND ANALYSIS OF EVOLUTION EQUATIONS

In this article the connection between transcendents of Penleve and evolution equations is discussed. An approximate method of building transcendents of Penleve of first and second order by means of the general power series with unknown

coefficients is established. This method is then applied to study the Korteweg-de Vries equations and its modifications which describe the interaction of waves in the water and soliton processes in the plasma.

O JEDNOM METODU REŠAVANJA I IZUČAVANJA EVOLUCIONIH JEDNAČINA

U radu se razmatra veza između Penleveovih transcendenata i evolucionih jednačina. Dat je jedan približan metod konstruisanja Penleveovih transcendenata prvog i drugog reda korišćenjem metoda opštih stepenih redova sa nepoznatim koeficijentima. Ovaj se metod zatim primenjuje na izučavanje Korteveg-de Frizovih jednačina i njihovih modifikacija koje opisuju interakciju talasa u vodi i solitonske procese u plazmi.

В. П. Фильчакова
252601 Киев – 4
Ул. Репина 3
Институт математики АН Украины
Украина