TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 17, pp 31-36, 1991, UDK 531.36

ОДНО ОБРАЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ РАУСА

Р. М. Булатович

(Поступило 03.12.1991)

1. Рассмотрим механическую систему, стесненую голономными не зависящими от времени связами с обобщенными координатами $(q_1, \dots, q_N) = \boldsymbol{q}$ и находящуюся под действием потенциальных сил. Динамика такой системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad L = T(q, \dot{q}) - \Pi(q)\,, \tag{1}$$

где $T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$-кинетическая, а $\Pi(\boldsymbol{q})$-потенциальная энергии системы. Обозначим $\boldsymbol{x} = (q_1, \dots, q_n)$, $\alpha = (q_{n+1}, \dots, q_N)$ и предположим, что координаты $\boldsymbol{\alpha}$ являются цилическими, т.е. $\partial L/\partial\alpha = 0$. Тогда уравнения (1) допускают первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \beta, \qquad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{N-n})$$

где β — постоянные. Игнорируя циклические координаты α по методу Рауса [1] уравнения движения для позиционных координат $\boldsymbol{x}$ запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} - \frac{\partial R_2}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial R_0}{\partial \boldsymbol{x}} - G\dot{\boldsymbol{x}}\,, \tag{2}$$

где:

$R_2 = \frac{1}{2}\langle A(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}\rangle$ — определенно положительная квадратичная форма скоростей $\dot{\boldsymbol{x}}$;

$R_0 = R_0(\boldsymbol{x}, \beta)$ — измененная силовая функция;

$G = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}$ — матрица Якоби векторной функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \beta)$.

После интегрирования системы (2), называемой приведенной системой, циклические координаты находятся квадратурами.

Пусть при некоторых фиксиравнных значениях постоянных $\beta = \beta_0$ приведенная система (2) допускает равновесное решение $\boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{x}} = 0$, т.е. $\partial R_0/\partial \boldsymbol{x}(0) = 0$. Этому решению отвечает стационарное движение в котором будут изменяться одни циклические координаты.

Если при данных $\beta = \beta_0$ измененная силовая функция R_0 в точке $\boldsymbol{x} = 0$ имеет строгий локальный максимум, то соответствующе стационарное движение устойчиво для возмущений не меняющих значений циклических интегралов (теорема Рауса). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (возможно явление гироскопической стабилизации). Поэтому выяснение достаточных условий неустойчивости представляет интерес. Содержащийся в [2] обзор результатов в области обращения теоремы Рауса в настоящее время можно дополнить работами [3], [4]. Мы докажем еще одно обращение теоремы Рауса.

2. Предположим, что приведенная силовая функция R_0, компоненты матрицы A и векторного поля v аналитические функции координат $\boldsymbol{x}$ (значения циклических интегралов β считаются постоянными).

Пусть

$$R_0(x) = R_{02}(x) + R_{0j}(x) + R_{0j+1}(x) + \cdots, \qquad j \geq 3,$$
$$G(x) = G_s(x) + G_{s+1}(x) + \cdots,$$

разложение функции R_0 и матрицы G в ряд Маклорена. Если $R_{02}(\boldsymbol{x})$ может принимать положительные значения и $s \geq 1$, то стационарное движение неустойчиво [5]. В дальнейшем предпологается, что $R_{02}(\boldsymbol{x}) \leq 0$. Пусть квадратичная форма $R_{02}(x)$ имеет l $(0 < l \leq n)$ нулевых собственных значений. Через $\widehat{R}_{0i}$ обозначим ограничение формы R_{0i} на l-мерную плоскость $\pi = \{\boldsymbol{x} : R_{02}(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

ТЕОРЕМА. *Если $s > [(r-2)/2]$, $\widehat{R}_{0j} = \ldots = \widehat{R}_{0r-1} \equiv 0$ и форма $\widehat{R}_r$ может принимать положительные значения, то равновесное решение $\boldsymbol{x} = \dot{\boldsymbol{x}} = 0$ приведенной системы неустойчиво.*

Из факта неустойчивости равновесного решения приведенной системы вытекает, конечно, неустойчивость соответствующего стационарного движения.

Когда $l = n$ $(R_{02} \equiv 0)$, то теорема совпадает с результатом [3, 4].

Когда $G \equiv 0$ (гироскопически несвязанная система) и $r = j$, из теоремы следует результат [6]. Поэтому, данная теорема для гироскопически несвязаной системы обобщает результат [6].

3. В идейном отношении доказательство теоремы близко к использованому в [4]. Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

ЛЕММА 1. *В предположениях теоремы можно считать, что в окрестности точки $x = 0$*

$R_2 = \frac{1}{2}\langle (E + B(x))\dot{x}, \dot{x}\rangle$,

$$R_0 = -\tfrac{1}{2}\langle Dy, y\rangle + W(z), \qquad W(z) = W_k(z) + W_{k+1}(z) + \cdots, \quad k > 2$$

где $x = (y, z)$, $y \in \mathrm{R}^{n-l}$, E *— единичная матрица,* $B(0) = 0$, $D = \mathrm{diag}(d_i)$, $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, n-l$, *а форма* $W_k(z)$ *может принимать положительные значения.*

Доказательство. В окрестности точки $x = 0$ можно ввести нормальные координаты, в которых

$$R_2 = \tfrac{1}{2}\langle (E + B(x))\dot{x}, \dot{x}\rangle, \quad E \text{ — единичная матрица}, \quad B(0) = 0,$$
$$R_0 = -\tfrac{1}{2}\langle Dy, y\rangle + \Pi_j(x) + \cdots, \quad D = \mathrm{diag}(d_i), \quad d_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n-l,$$
$$x = (y, z), \quad y \in \mathrm{R}^{n-l}, \quad z \in \mathrm{R}^l.$$

Согласно лемме о расщеплении [7], посредством нелинейной замены вида

$$\overline{y} = y + b(x), \qquad b(x) = b_{j-1}(x) + b_j(x) + \cdots,$$
$$\overline{z} = z,$$

можно привести разложение приведенной силовой функци к следующему виду

$$\overline{R}_0 = -\tfrac{1}{2}\langle Dy, y\rangle + W(z), \qquad W(z) = W_k(z) + \cdots, \quad k > 2.$$

Ясно, что

$$\widehat{R}_0(z) \equiv -\tfrac{1}{2}\langle Dc(z), c(z)\rangle + W(z),$$

где $c(z) = b(y = 0, z) = c_m(z) + \cdots$, $m \geq j - 1$. Елси $2m \leq r$, то $k = 2m$ и $W_k(z) \geq 0$ для $2m < r$, а для $2m = r$ форма W_k не имеет в точке $z = 0$ локального максимума. Если же $2m > r$, то $k = r$ и $W_r(z) \equiv R_{0r}(z)$. Следовательно в предположениях леммы первая нетривиальна форма $W_k(z)$ ряда Маклорена функции $W(z)$ принимает положительные значения. Лемма доказана.

Вводя «обобщенные импульсы» $p = \partial R_2/\partial \dot{x}$ представим уравнения (2) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + G(E + C(x))p, \tag{3}$$

где

$$H = \tfrac{1}{2}\langle (E + C(x))p, p\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Dy, y\rangle - W(z), \qquad C = (E + B)^{-1} - E.$$

Уравнения (3) допускают интеграл энергии $H(x, p) = \mathrm{const}$.

Лемма 2 [4]. *Имеет место оценка*

$$|p|^2(1 - \Delta_1(x)) \leq \langle (E + C(x))p, p\rangle \leq |p|^2(1 + \Delta_2(x)), \tag{4}$$

где $0 \leq \Delta_i(x) = o(1)$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 3. *В предположениях теоремы на инвариантном множестве* $M = \{(x,p) : H(x,p) = 0\} \subset \mathbf{R}^n\{x\} \times \mathbf{R}^n\{p\}$ *имеют место оценки*

$$|y| \le c_1 |z|^{k/2}(1 + o(1)), \tag{5}$$

$$|p| \le \sqrt{2\lambda_1}\, |z|^{k/2}(1 + o(1)), \tag{6}$$

где $c_1 = \sqrt{2\lambda_1/\min(d_i)}$, $\lambda_1 = \max_{|z|=1} W_k(z) > 0$.

Доказательство. Поскольку $\langle (E + C(x))p, p\rangle \ge 0$, $\langle Dy, y\rangle \ge |y|^2 \min(d_i)$ и

$$W_k(z) \le \lambda_1 |z|^k, \qquad \lambda_1 = \max_{|z|=1} W_k(z) > 0, \tag{7}$$

то из равенства $H(x,p) = 0$ получаем оценку (5). Оценка (6) следует на основании леммы 2 с учетом неотрицательности формы $\langle Dy, y\rangle$ и неравенства (7).

Рассмотрим множество функции

$$f(\zeta) = c|\xi|^{1+k/2}\phi(\xi), \qquad 0 < c = \text{const.}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad \xi \in \mathbf{R}^m \tag{8}$$

$$\phi(\zeta) = \left[1 - \frac{2}{c^2}\int_0^{|\xi|} \left(\Phi(v)/|v|^{k+1}\right) dv\right]^{1/2},$$

где $\Phi \ge 0$, $\lim \Phi(v)/|v|^{k+a}$, $a \in (0,1)$.

Отметим, что вспомогательная функция из работы [4] принадлежит множеству функции (8).

ЛЕММА 4. *На множестве*

$$K = \{(\xi,\eta) : |(\xi,\eta)| < \varepsilon,\ \langle \xi,\eta\rangle - f(\xi) > 0\} \subset \mathbf{R}^m\{\xi\} \times \mathbf{R}^m\{\eta\},$$

при достаточно малом ε, *имеет место неравенство*

$$F(\xi,\eta) = \left(1 + \frac{k}{2}\right)|\eta|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \xi}, \eta \right\rangle > \Phi(|\xi|).$$

Доказательство. Так как, согласно определению множества K, $|\eta| > f/|\xi|$, то представляя функцию $F(\xi,\eta)$ в виде

$$F = |\eta|\left[\left(1 + \frac{k}{2}\right)|\eta| - \frac{df}{d|\xi|}u\right], \qquad u = \frac{\langle \xi,\eta\rangle}{|\xi|\,|\eta|},$$

имеем

$$F_{|K} > \min_u [c^2(1 + k/2)|\xi|^k(1 - u)\phi^2 + u\Phi(|\xi|)] = \Phi(|\xi|).$$

Доказательство теоремы. Пусть $p = (Y, Z)$, где $Y = \partial R_2/\partial \dot{y}$, $Z = \partial R_2/\partial \dot{z}$. Достаточно доказать неустойчивость равновесного решения $x = p = 0$ системы (4) на многообразии M. Учитывая, что $s > [(r-2)/2]$, а также оценки (6), (7) часть системы уравнений (4) по отношению к переменным z, Z, на множестве M можно представить в виде

$$\frac{dz}{dt} = Z + O(|z|^{1+k/2}), \qquad \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial W_k}{\partial z} + O(|z|^k). \tag{9}$$

В качестве вспомогательной функции возьмем $V = \langle z, Z\rangle - f(z)$, где $f(z)$ функция вида (8). Постоянная c и функция Φ выбираются из условий, чтобы область $V > 0$ на M не была пустой в сколь угодно малой окрестности начала и чтобы dV/dt была определенно положительная функция в области $V > 0$.

Пусть $e \in \mathrm{R}^l\{z\}$ единичный вектор, на котором достигает своего максимума форма $W_k(z)$ на единичной сфере, $W_k(e) = \lambda_1 > 0$. Подставляя $y = 0$, $z = ue$, $Y = 0$, $Z = Ue$, в равенство $H(x,p) = 0$, на основании (5) приходим к неравенству

$$|U|^2 \geq 2\lambda_1 |u|^k (1 + o(1)),$$

в соответствии с которым имеем

$$V(z = ue, Z = Ue) > |u|^{1+k/2}\big(\sqrt{2\lambda_1} - c\big)\big(1 + o(1)\big).$$

Следовательно, для $c < \sqrt{2\lambda_1}$ область положительности функции V на M не является пустой.

Рассмотрим производную от функции $V(z, Z)$ в силу уравнений (9)

$$\frac{dV}{dt} = |Z|^2 + \left\langle z, \frac{\partial W_k}{\partial z}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, Z\right\rangle + O(|z|^{k+1}).$$

Используя теорему Эйлера об однородных функциях и разрешая уравнение $H(x,p) = 0$ относительно W_k, учитывая, что $\langle Dy, y\rangle \geq 0$ в соответствии с леммой 4, получаем

$$\frac{dV}{dt} > \Phi(|z|) + O(|z|^{k+1}).$$

Если положить $\Phi = |z|^{k+b}$, $b \in (a, 1)$, то в соответствии с теоремой Четаева [8] заключаем, что нулевое решение системы (4) неустойчиво. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Anđelić, T., Stojanović, R., *Racionalna mehanika*, Beograd, 1966.

[2] Карапетян, А. В., Румянцев В. В., *Устойчивость консервативных и диссипативных систем*, Москва, 1983.

[3] Фурта, С. Д., *Об асимптотических решениях уравнений движения механических систем*, ПММ 50 (6) (1986), 938–944.

[4] Сосницкий С. П., *О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем*, Укр. мат. журн. 37 (1) (1985), 124–127.

[5] Salvadori, L., *Criteri d'instabilità per i moti merostatici di un sistema olonomo*, Rend. Accad. Sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett. ed arti Napoli **27** (4) (1960), 535–542.

[6] Козлов, В. В., *Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа-Дирихле*, ПММ **50** (6) (1986), 928–938.

[7] Gilmore, R., *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, Wiley-Interscience, New York, 1981.

[8] Rouche, N., Habets, P., Laloy, M., *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

AN INVERSION OF ROUT'S THEOREM

Let $R_0 = R_{02} + R_{0j} + \cdots$, $R_{02} \le 0$, $j > 2$ and $G = G_j + \cdots$, be McLaurin series of reduced force function and matrices of gyroscopic forces for the system reduced from holonomic conservative system with cyclic coordinates. By Direct Liapunov method nonstability of the stationary motion is proved for the case $s > [(r-2)/2]$ when the first nontrivial form $\widehat{R}_{0r}$ can be positive ($\widehat{R}_0$ is a restriction of R_0 function to the hyperspace $R_{02} = 0$).

JEDNA INVERZIJA RAUTOVE TEOREME

Neka su $R_0 = R_{02} + R_{0j} + \cdots$, $R_{02} \le 0$, $j > 2$ and $G = G_j + \cdots$, Maklorenovi razvoji redukovane funkcije sile i matrice giroskopskih sila sistema dobijenog postupkom redukcije iz holonomnog konzervativnog sistema sa cikličnim koordinatama. Direktnim metodom Ljapunova dokazuje se nestabilnost odgovarajućeg stacionarnog kretanja ako je $s > [(r-2)/2]$ i prva netrivijalna forma $\widehat{R}_{0r}$ suženja funkcije R_0 na hiperprostor $R_{02} = 0$ može uzimati pozitivne vrijednosti.

Ranislav Bulatović
Mašinski fakultet
81000 Podgorica