

ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ  
ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ  
НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Зоран Боричич и Драгиша Никодиевич*

(Поступило 20.04.1991)

Магнитная гидродинамика как часть физики в последних тридцать лет успешно справляется с широким кругом задач, возникающих в различных областях науки и техники. Одним из важных направлений современной магнитной гидродинамики является теория магнитогидродинамического (МГД) пограничного слоя.

Особенность течений проводящей жидкости при наличии магнитного поля проявляется в том, что на поверхности обтекаемого тела возможно образование как динамического, так и токового пограничных слоев. Возможность образования пограничного слоя того или иного рода определяется соотношением между обычным гидродинамическим числом Рейнольдса  $Re$  и электромагнитным числом Рейнольдса  $Re_m$ . В докладе рассматривается случай малых чисел  $Re_m$  и больших чисел  $Re$ ; при этом магнитогидродинамический пограничный слой образуется на поверхности обтекаемого тела за счет вязких сил, а величина напряженности магнитного поля, входящая в уравнения пограничного слоя, определяется решением внешней задачи.

В докладе рассматривается плоский нестационарный МГД пограничный слой в несжимаемой жидкости переменной электропроводности на проницаемой поверхности. Внешнее магнитное поле предполагается однородным, перпендикулярным к поверхности тела и в отношении к телу в относительном покое.

Эта проблема входит в семейство современных проблем для которых сегодня существует, в научном и техническом развитии, большой интерес. Пусть теперь электропроводность  $\sigma(x, y, t)$  изменяется по закону

$$\sigma = \sigma_0 S(u/U) \quad (1)$$

где:  $\sigma_0$  — постоянная электропроводность,

$u(x, y, t)$  — продольная компонента скорости в пограничном слое,  
 $U(x, t)$  — скорость на внешней границе пограничного слоя,  
 $S(u/U)$  — дифференцируемая функция,  
 $x, y$  — продольная и поперечная координаты в пограничном слое,  
 $t$  — время.

Уравнения нестационарного ламинарного МГД пограничного слоя, описанной задачи будут

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v u_y &= U_t + UU_x + \nu u_{yy} + N[US(1) - uS(u/U)] \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = v_w(x, t) \quad \text{при } y = 0, \quad u \rightarrow U(x, t) \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \\ u = u_1(x, y) \quad \text{при } t = t_0, \quad u = u_0(t, y) \quad \text{при } x = x_0. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом мы использовали следующие обозначения:  $v$  — поперечная компонента скорости,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости,  $N = \sigma_0 B^2 / \rho$  где  $\rho$  — плотность жидкости а  $B$  — магнитная индукция,  $u_1(x, y)$  — распределение скоростей в некотором заданном моменте времени  $t = t_0$ ,  $u_0(t, y)$  — распределение скоростей в некотором заданном сечении пограничного слоя  $x = x_0$ ,  $v_w(x, t)$  — скорость с которой жидкость с теми же физическими константами, что и в набегающем потоке, проникает твердую поверхность ( $v_w > 0$  при вдуве жидкости,  $v_w < 0$  при ее отсосе) в нормальном к ней направлении. Индексы  $x, y, t$  обозначают частные производные по соответствующим переменным.

Рассматривая избыточную поперечную составляющую скорости в пограничном слое  $v_1 = v - v_w$ , введем функцию тока  $\psi(x, y, t)$  следующим образом

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_1. \quad (4)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения

$$\psi_{ty} + \psi_y \psi_{xy} + (v_w - \psi_x) \psi_{yy} = U_t + UU_x + \nu \psi_{yyy} + NU \left[ S(1) - \frac{1}{U} \psi_y S \left( \frac{1}{U} \psi_y \right) \right] \quad (5)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \psi_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \psi_y \rightarrow U(x, t) \quad \text{при } y \rightarrow \infty \\ \psi_y = u_1(x, y) \quad \text{при } t = t_0, \quad \psi_y = u_0(t, y) \quad \text{при } x = x_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для расчета описаного МГД пограничного слоя можно применить метод [1, 2, 3, 4] «универсализации» уравнений ламинарного пограничного слоя, имеющий ряд несомненных преимуществ по сравнению с другими приближенными методами. Численное интегрирование универсального уравнения выполняется один раз навсегда. Результаты этого интегрирования сами по себе интересны тем, что позволяют выявить различные

тенденции в развитии нестационарного МГД пограничного слоя с отсосом или вдувом, а, кроме того, полученное семейство профилей можно использовать при решении конкретных задач.

В этом докладе будем расширить метод «универсализации» [5] на описанную задачу. Сначала перейдем от переменных  $x, y, t, \psi(x, y, t)$  к новым переменным  $x, t, \eta, \Phi(x, t, \eta)$  положив в (5)

$$x = x, \quad t = t, \quad y = \frac{\delta(x, t)}{D} \eta, \quad \psi(x, y, t) = \frac{1}{D} U(x, t) \delta(x, t) \Phi(x, t, \eta). \quad (7)$$

Здесь  $\delta(x, t)$  — некоторый характерный линейный масштаб поперечной координаты в пограничном слое;  $D$  — нормирующая константа, которая будет в дальнейшем определена.

Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ D^2; U_x z; \frac{U_t}{U} z; U_x z + \frac{1}{2} U z_x; \frac{\eta}{2} z_t - \vartheta_w D \sqrt{\frac{z}{\nu}} \right\} + NZ \mathcal{L}^*(S) \\ = z \Phi_{\eta t} + U z [\Phi, \Phi_{\eta}] (\eta, x) \end{aligned} \quad (8)$$

в котором  $z = \delta^2/\nu$ ,  $[\Phi, \Phi_{\eta}] (\eta, x)$  представляет скобки Пуассона, т.е.

$$[\Phi, \Phi_{\eta}] (\eta, x) = \Phi_{\eta} \Phi_{\eta x} - \Phi_{\eta \eta} \Phi_x, \quad (9)$$

оператор  $\mathcal{L}$  определяется выражением

$$\mathcal{L} \{ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \lambda_5 \} = \lambda_1 \Phi_{\eta \eta \eta} + \lambda_2 (1 - \Phi_{\eta}^2) + \lambda_3 (1 - \Phi_{\eta}) + \lambda_4 \Phi \Phi_{\eta \eta} + \lambda_5 \Phi_{\eta \eta} \quad (10)$$

а оператор  $\mathcal{L}^*$  выражением

$$\mathcal{L}^*(S) = S(1) - \Phi_{\eta} S(\Phi_{\eta}). \quad (11)$$

Граничные условия (6) записываются в форме:

$$\begin{aligned} \Phi = 0; \quad \Phi_{\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ \Phi_{\eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что граничные условия по переменным  $x$  и  $t$ , заключенные в последней строке равенств (6), используются лишь на последнем этапе решения задачи и при выводе универсального уравнения учитывать их не следует.

Предполагая, что функции  $U(x, t)$ ,  $\vartheta_w(x, t)$ ,  $N(x, t)$  и  $z(x, t)$  аналитические введем в рассмотрение бескончные совокупности параметров

$$\begin{aligned} f_{k,n} = U^{k-1} \frac{\partial^{k+n} U}{\partial x^k \partial t^n} z^{k+n}, \quad g_{k,n} = U^{k-1} \frac{\partial^{k-1+n} N}{\partial x^{k-1} \partial t^n} z^{k+n} \\ (k, n = 0, 1, 2, \dots; \quad k \vee n \neq 0) \\ \lambda_{k,n} = -U^k \frac{\partial^{k+n} \vartheta_w}{\partial x^k \partial t^n} \frac{z^{k+n+1/2}}{\sqrt{\nu}} \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

и постоянный параметр

$$g = \dot{z} = \text{const} \quad (14)$$

первые из которых имеют вид

$$f_{1,0} = U_x z; \quad f_{0,1} = \frac{U_t}{U} z; \quad g_{1,0} = Nz; \quad \lambda_{0,0} = -\vartheta_w \sqrt{\frac{z}{\nu}}. \quad (15)$$

Дифференцируя совокупность параметров (13) по  $x$  и  $t$  получаем соотношения которым удовлетворяют параметры

$$\left. \begin{aligned} Uz(f_{k,n})_x &= [(k-1)f_{1,0} + (k+n)F]f_{k,n} + f_{k+1,n} \equiv D_{k,n}, \\ z(f_{k,n})_t &= [(k-1)f_{0,1} + (k+n)g]f_{k,n} + f_{k,n+1} \equiv E_{k,n}, \\ Uz(g_{k,n})_x &= [(k-1)f_{1,0} + (k+n)F]g_{k,n} + g_{k+1,n} \equiv K_{k,n}, \\ z(g_{k,n})_t &= [(k-1)f_{0,1} + (k+n)g]g_{k,n} + g_{k,n+1} \equiv L_{k,n}, \\ Uz(\lambda_{k,n})_x &= [kf_{1,0} + (k+n+1/2)F]\lambda_{k,n} + \lambda_{k+1,n} \equiv M_{k,n}, \\ z(\lambda_{k,n})_t &= [kf_{0,1} + (k+n+1/2)g]\lambda_{k,n} + \lambda_{k,n+1} \equiv N_{k,n}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$F = Uz_x.$$

Выберем параметры  $f_{k,n}$ ,  $g_{k,n}$  и  $\lambda_{k,n}$  за новые независимые переменные и произведем в уравнении (8) замену дифференцирования по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0}^{\infty} \left[ (f_{k,n})_x \frac{\partial}{\partial f_{k,n}} + (g_{k,n})_x \frac{\partial}{\partial g_{k,n}} \right] + \sum_{k,n=0}^{\infty} (\lambda_{k,n})_x \frac{\partial}{\partial \lambda_{k,n}} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0}^{\infty} \left[ (f_{k,n})_t \frac{\partial}{\partial f_{k,n}} + (g_{k,n})_t \frac{\partial}{\partial g_{k,n}} \right] + \sum_{k,n=0}^{\infty} (\lambda_{k,n})_t \frac{\partial}{\partial \lambda_{k,n}} \end{aligned} \quad (17)$$

учитывая соотношения (16) получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \left\{ D^2; f_{1,0}; f_{0,1}; f_{1,0} + \frac{1}{2}F; \frac{\eta}{2}g + D\lambda_{0,0} \right\} + g_{1,0}\mathcal{L}^*(S) = \\ &= \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0}^{\infty} \{ E_{k,n}\Phi_{\eta f_{k,n}} + L_{k,n}\Phi_{\eta g_{k,n}} + D_{k,n}[\Phi, \Phi_{\eta}](\eta, f_{k,n}) + \\ &+ K_{k,n}[\Phi, \Phi_{\eta}](\eta, g_{k,n}) \} + \sum_{k,n=0}^{\infty} \{ N_{k,n}\Phi_{\lambda_{k,n}\eta} + M_{k,n}[\Phi, \Phi_{\eta}](\eta, \lambda_{k,n}) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

К уравнению (18) присоединяются граничные условия

$$\begin{aligned} &\Phi = 0; \quad \Phi_{\eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad \Phi_{\eta} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty, \\ \Phi = \Phi_0(\eta) \quad \text{при} \quad &\begin{cases} f_{k,n} = 0 & g_{k,n} = 0 & (k, n = 0, 1, 2, \dots, ; k \vee n \neq 0) \\ \lambda_{k,n} = 0, & g = 0 & (k, n = 0, 1, 2, \dots), \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\Phi_0(\lambda)$  является решением Блязиуса для стационарного пограничного слоя на пластине [6].

Для того чтобы уравнение (18) стало универсальным, необходимо функцию  $F$  выразить через величины, зависящие явно только от параметров  $f_{k,n}$ ,  $g_{k,n}$ ,  $\lambda_{k,n}$  и  $g$  т.е. должно существовать равенство

$$F = F[(f_{k,n}), (g_{k,n}), (\lambda_{k,n}), g]. \quad (20)$$

Функцию  $F$  определяем используя уравнение импульсов описанной задачи. Это уравнение будет иметь вид

$$(U\delta^*)_t + (U^2\delta^{**})_x + UU_x\delta^* + NU\tilde{\delta}^{**} - \vartheta_w U - (\tau_w/\rho) = 0 \quad (21)$$

где

$$\delta^*(x, t) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad \text{— толщина вытеснения,}$$

$$\delta^{**}(x, t) = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad \text{— толщина потери импульса,}$$

$$\tilde{\delta}^{**}(x, t) = \int_0^\infty \left[S(1) - \frac{u}{U}S\left(\frac{u}{U}\right)\right] dy \quad \text{— новая величина,}$$

$$\tau_w(x, t) = \nu\rho u_y(y=0) \quad \text{— напряжение трения на поверхности тела,}$$

что легко показать.

Для определения функции  $F$  раскрываем частные производные по  $x$  и  $t$  в уравнении (21) потом вводим функции

$$H^* = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{D} \int_0^\infty (1 - \Phi_\eta) d\eta; \quad H^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{D} \int_0^\infty \Phi_\eta(1 - \Phi_\eta) d\eta;$$

$$\tilde{H}^{**} = \frac{\tilde{\delta}^{**}}{\delta} = \frac{1}{D} \int_0^\infty \mathcal{L}^*(S) d\eta; \quad \zeta = \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \Big|_{y=0} = D\Phi_{\eta\eta} \Big|_{\eta=0}, \quad (22)$$

новые независимые переменные  $f_{k,n}$ ,  $g_{k,n}$ ,  $\lambda_{k,n}$  и замену дифференцирования по формулам (17). Тогда уравнение (21) приведет к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}FH^{**} &= \zeta - \left(f_{1,0} + f_{0,1} + \frac{1}{2}g\right)H^* - 2f_{1,0}H^{**} - g_{1,0}\tilde{H}^{**} - \lambda_{0,0} - \\ &- \left[ \sum_{\substack{k,n=0, \\ k \vee n \neq 0}}^\infty (k+n)(f_{k,n}H_{f_{k,n}}^{**} + g_{k,n}H_{g_{k,n}}^{**}) + \sum_{k,n=0}^\infty \left(k+n+\frac{1}{2}\right)\lambda_{k,n}H_{\lambda_{k,n}}^{**} \right] F - \\ &- \left[ \sum_{\substack{k,n=0, \\ k \vee n \neq 0}}^\infty A_{k,n}H_{f_{k,n}}^{**} + B_{k,n}H_{g_{k,n}}^{**} + E_{k,n}H_{f_{k,n}}^{**} + L_{k,n}H_{g_{k,n}}^{**} \right] - \\ &- \sum_{k,n=0}^\infty (C_{k,n}H_{\lambda_{k,n}}^{**} + N_{k,n}H_{\lambda_{k,n}}^{**}) \end{aligned} \quad (23)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_{k,n} &= (k-1)f_{1,0}f_{k,n} + f_{k+1,n}; & B_{k,n} &= (k-1)f_{1,0}g_{k,n} + g_{k+1,n} \\ C_{k,n} &= kf_{1,0}\lambda_{k,n} + \lambda_{k+1,n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнения (23) следует выражение для  $F$

$$F = \frac{M - \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0}^{\infty} S_{k,n} - \sum_{k,n=0}^{\infty} R_{k,n}}{\frac{1}{2}H^{**} + \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0} (k+n)M_{k,n} + \sum_{k,n=0}^{\infty} \left(k+n+\frac{1}{2}\right)\lambda_{k,n}H_{\lambda_{k,n}}^{**}} \quad (25)$$

где введены сокращения

$$\begin{aligned} M &= \zeta - (f_{1,0} + f_{0,1} + (1/2)g)H^* - 2f_{1,0}H^{**} - g_{1,0}\tilde{H}^{**} - \lambda_{0,0}, \\ M_{k,n} &= (f_{k,n}H_{f_{k,n}}^{**} + g_{k,n}H_{g_{k,n}}^{**}), \\ S_{k,n} &= A_{k,n}H_{f_{k,n}}^{**} + B_{k,n}H_{g_{k,n}}^{**} + E_{k,n}H_{f_{k,n}}^* + L_{k,n}H_{g_{k,n}}^*, \\ R_{k,n} &= C_{k,n}H_{\lambda_{k,n}}^{**} + N_{k,n}H_{\lambda_{k,n}}^*. \end{aligned} \quad (26)$$

Видно что величина  $F$ , является функцией только параметров  $f_{k,n}$ ,  $g_{k,n}$ ,  $\lambda_{k,n}$ ,  $g$ . Таким образом, доказано существование равенства (20).

Так в нелинейном дифференциальном уравнении в частных производных третьего порядка (18) и в граничных условиях (19) нет явно величин, характеризующих данную конкретную задачу. Это уравнение и соответствующие ему граничные условия имеют один и тот же вид для любых аналитических значений распределений скорости  $U(x, t)$  на внешней границе пограничного слоя, скорости  $\vartheta_w(x, t)$  вдува (отсоса) и числа  $N(x, t)$ . В том смысле уравнение (18) при граничных условиях (19) служит универсальным уравнением описанной задачи.

Отметим, здесь, что уравнение (18) является точным для широкого класса задач, для которого  $z = At + C(x)$ , где  $A$  — произвольная постоянная, а  $C(x)$  — некоторая функция продольной координаты а в остальных задач служит приближенным универсальным уравнением.

Уравнение (18) при граничных условиях (19) должно быть один раз численно проинтегрировано на ЭВМ причем речь может идти лишь об «отрезке» уравнения.

Здесь надо заметить что до сих пор характерный линейный масштаб  $\delta(x, t)$ , поперечной координаты в пограничном слое не выбран. Его нужно каким-либо образом выбрать прежде интегрирования уравнения (18). Выбираем, в докладе, в качестве поперечного масштаба толщину потери импульса т.е.  $\delta = \delta^{**}$ , тогда выражение (25) принимает вид

$$\begin{aligned} F &= 2 \left[ \zeta - \left( f_{1,0} + f_{0,1} + \frac{1}{2}g \right) H - 2f_{1,0} - g_{1,0}\tilde{H}^{**} - \lambda_{0,0} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0}^{\infty} (E_{k,n}H_{f_{k,n}} + L_{k,n}H_{g_{k,n}}) - \sum_{k,n=0}^{\infty} N_{k,n}H_{\lambda_{k,n}} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

где

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{1}{D} \int_0^\infty (1 - \Phi_\eta) d\eta. \quad (28)$$

Нормирующую константу  $D$  выберем так, чтобы уравнение (18) в условиях (19) совпало с уравнением Блязиуса. Отсюда следует, что нормирующая константа  $D$  должна быть принята равной  $D = 0.470$ .

Надо заметить что универсальное уравнение (18), дает возможность получить универсальные уравнения для конкретных функций изменения электропроводности  $\sigma$  т.е. функции  $S$ . Так для  $\sigma = 0$ , случай электропроводных сред в электромагнитных полях, из уравнения (18) получаем универсальное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ D^2; f_{1,0}; f_{0,1}; f_{1,0} + \frac{1}{2}F; \frac{\eta}{2}g + D\lambda_{0,0} \right\} = & \sum_{k,n=0, k \vee n=0}^\infty \{ E_{k,n} \Phi_{\eta f_{k,n}} + \\ & + D_{k,n} [\Phi, \Phi_\eta](\eta, f_{k,n}) \} + \sum_{k,n=0}^\infty \{ N_{k,n} \Phi_{\eta \lambda_{k,n}} + M_{k,n} [\Phi, \Phi_\eta](\eta, \lambda_{k,n}) \}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} F = 2 \left[ \zeta - \left( f_{1,0} + f_{0,1} + \frac{1}{2}g \right) H - 2f_{1,0} - \lambda_{0,0} - \right. \\ \left. - \sum_{k,n=0, k \vee n \neq 0}^\infty E_{k,n} H_{f_{k,n}} - \sum_{k,n=0}^\infty N_{k,n} H_{\lambda_{k,n}} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

При этом граничные условия (19) принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi = 0; \quad \Phi_\eta = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \Phi_\eta \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \\ \Phi = \Phi_0(\eta) \quad \text{при} \quad \begin{cases} f_{k,n} = 0 & (k, n = 0, 1, 2, \dots; k \vee n \neq 0) \\ \lambda_{k,n}, \quad g = 0 & (k, n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Возьмем теперь  $S(u/U) = 1$ , т.е.  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ , случай постоянной электропроводности жидкости. Тогда уравнение (18) записываем в форме:

$$\mathcal{L} \left\{ D^2; f_{1,0}; f_{0,1} + g_{1,0}; f_{1,0} + \frac{1}{2}F; \frac{\eta}{2}g + D\lambda_{0,0} \right\} = \mathcal{D}, \quad (32)$$

а функция  $F$  совпадает с выражением (27) в котором теперь  $\tilde{H}^{**} = H$  и с  $\mathcal{D}$ , для краткости, обозначена правая сторона уравнения (18).

Если  $S(u/U) = 1 - u/U$ , случай переменной электропроводности в форме Росова [7], уравнение (18) принимает вид

$$\mathcal{L} \left\{ D^2; f_{1,0} - g_{1,0}; f_{0,1} + g_{1,0}; f_{1,0} + \frac{1}{2}F; \frac{\eta}{2}g + D\lambda_{0,0} \right\} = \mathcal{D}, \quad (33)$$

где функция  $F$  совпадает с выражением (27) в котором теперь  $\tilde{H}^{**} = -1$ .

Граничные условия для уравнения (32) и (33) задаются в форме (19).

Таким образом, из уравнения (18), можно получить универсальные уравнения и для других конкретных функций  $S$ .

Далее, в докладе, как пример, выполняем интегрирование уравнения (33) с граничными условиями (19) с ограниченным числом независимых переменных. Это приводит к необходимости применения известного метода урезания, который заключается в приравнивании нулю переменных, начиная с некоторого индекса. В силу уже сказанного уравнение (33) рассматриваем в локальном приближении с параметрами  $f_{1,0}$ ;  $f_{0,1}$ ;  $g_{1,0}$  и  $\lambda_{0,0}$ . В этом варианте предполагаем, что все параметры, с исключением указанных, равны нулю. Кроме того, считаются равными нулю также производные по параметрам  $f_{0,1}$  и  $\lambda_{0,0}$ . В этом приближении уравнение (33) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ D^2; f_{1,0} - g_{1,0}; \bar{f}_{0,1} + g_{1,0}; f_{1,0} + \frac{1}{2}F^{(4)}; \frac{\eta}{2}g + D\bar{\lambda}_{0,0} \right\} = \\ = gf_{1,0}\Phi_{\eta f_{1,0}}^{(4)} + F^{(4)}f_{1,0}[\Phi^{(4)}, \Phi_{\eta}^{(4)}](\eta, f_{1,0}) + gg_{1,0}\Phi_{\eta}^{(4)}\Phi_{g_{1,0}}^{(4)} + \\ + F^{(4)}g_{1,0}[\Phi^{(4)}, \Phi_{\eta}^{(4)}](\eta, g_{1,0}), \quad (34) \end{aligned}$$

а граничные условия для  $\Phi^{(4)}$  на основании (19) будут

$$\begin{aligned} \Phi^{(4)} = 0; \quad \Phi_{\eta}^{(4)} = 0 \quad \text{при } \eta = 0; \quad \Phi_{\eta}^{(4)} \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \\ \Phi^{(4)} = \Phi_0(\eta) \quad \text{при } f_{1,0} = 0, \quad \bar{f}_{0,1} = 0, \quad g_{1,0} = 0, \quad \bar{\lambda}_{0,0} = 0, \quad g = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

где верхний индекс означает принадлежность к соответствующему ему приближению.

Для численного интегрирования уравнения (34) с граничными условиями (35) применяется известный в литературе метод «прогонки» обоснованный на методе конечных разностей с неявной схемой.

Основные результаты расчетов уравнения (34) представлены в виде графиков на рисунках 1, 2, 3 и 4.

Из рассмотрения графиков, рис. 1 и 2, следует, что усиление магнитного поля (увеличение магнитного параметра  $g_{1,0}$ ) вызывает увеличение функции  $F$  и уменьшение функции  $\zeta$  как для положительного ускорения ( $\bar{f}_{0,1} > 0$ ), так и для отрицательного ускорения — торможение ( $\bar{f}_{0,1} < 0$ ). Так усиление магнитного поля способствует появлению отрыва пограничного слоя как при отсосе (рис. 1) так и при вдуве (рис. 2).

Отчетливо (рис. 3) наблюдается увеличение  $\zeta$  и естественно при этом смещение точки отрыва, вниз по потоку при наличии отсоса ( $\bar{\lambda}_{0,0} = 0.01$ ) и, наоборот, уменьшение  $\zeta$  и смещение точки отрыва вверх по потоку — при сдуве ( $\bar{\lambda}_{0,0} = -0.01$ ) пограничного слоя как для положительного так и для отрицательного ускорения. Отметим (рис. 4) и из результатов,



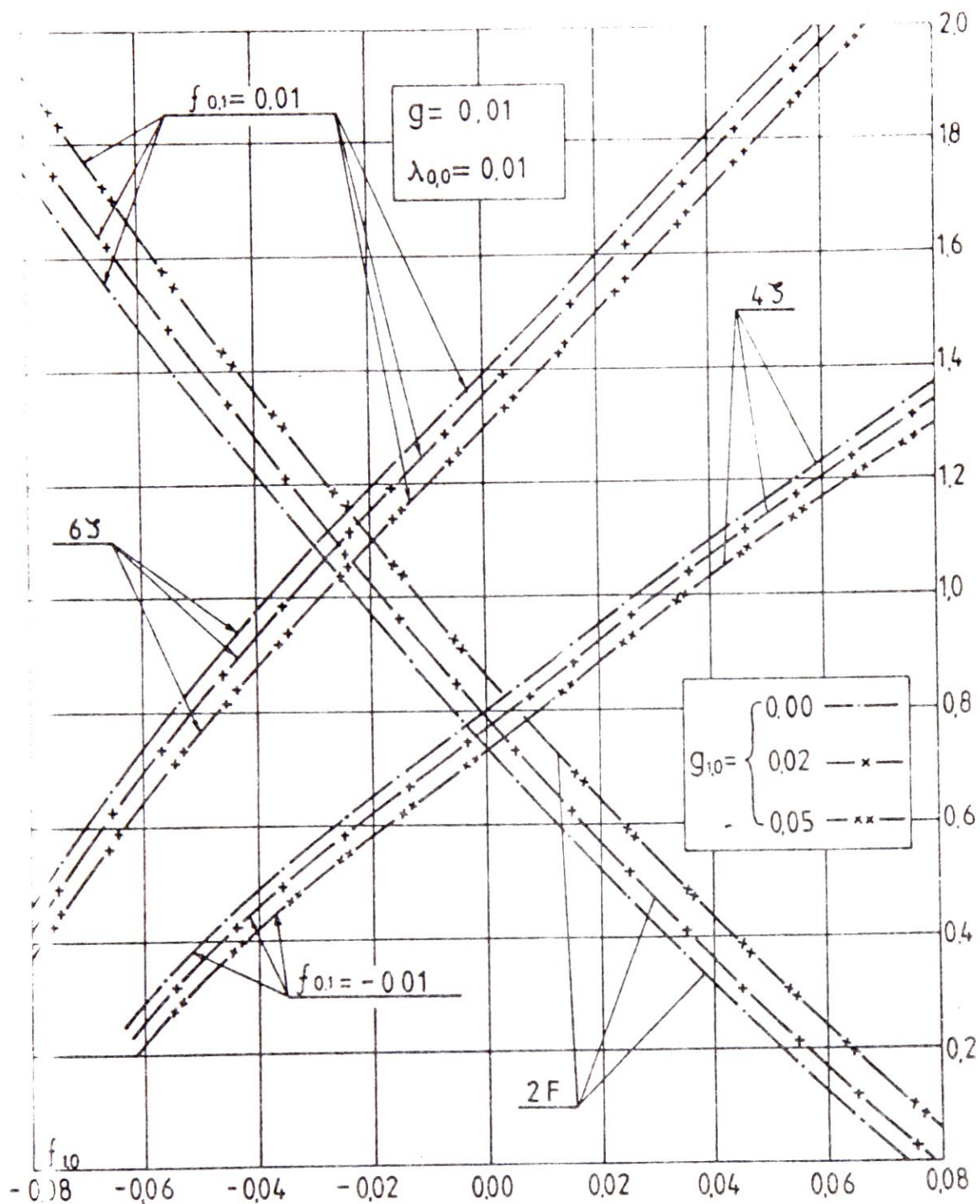


Рис. 1

которые из-за объемности в докладе не приводим, что с увеличением положительного ускорения величина трения растет, так возможность возникновения отрыва в диффузорной области уменьшается. Наоборот, с увеличением отрицательного ускорения (торможение) величина трения убывает, так отрицательное ускорение способствует появлению отрыва потока. Последний вывод справедлив как при наличии отсоса так и при сдуве.

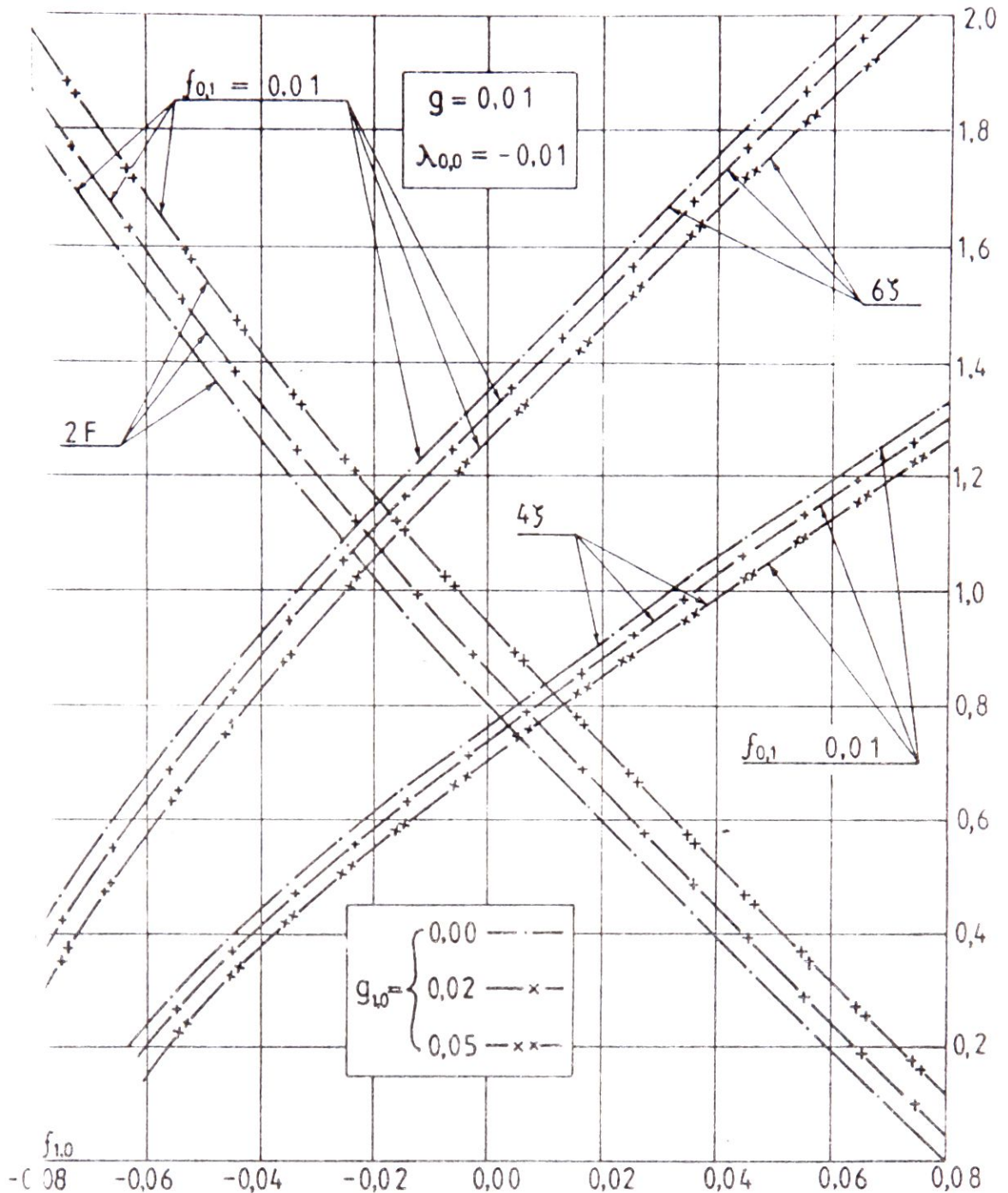


Рис. 2

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шкадов, В. Я., *Пограничный слой с градиентом давления в потоке сжимаемой жидкости*, Известия Академии Наук СССР, ОТН, Механика и машиностроение № 2 (1963), 28-32.
- [2] Лойцянский, Л. Г., *Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя*, АН СССР, Прикладная математика и механика 29 (1) (1965), 70-87.
- [3] Saljnikov, V. N., *A contribution to universal solutions of the boundary layer theory*, Teorijska i primenjena mehanika 4, (1978), 139-163.

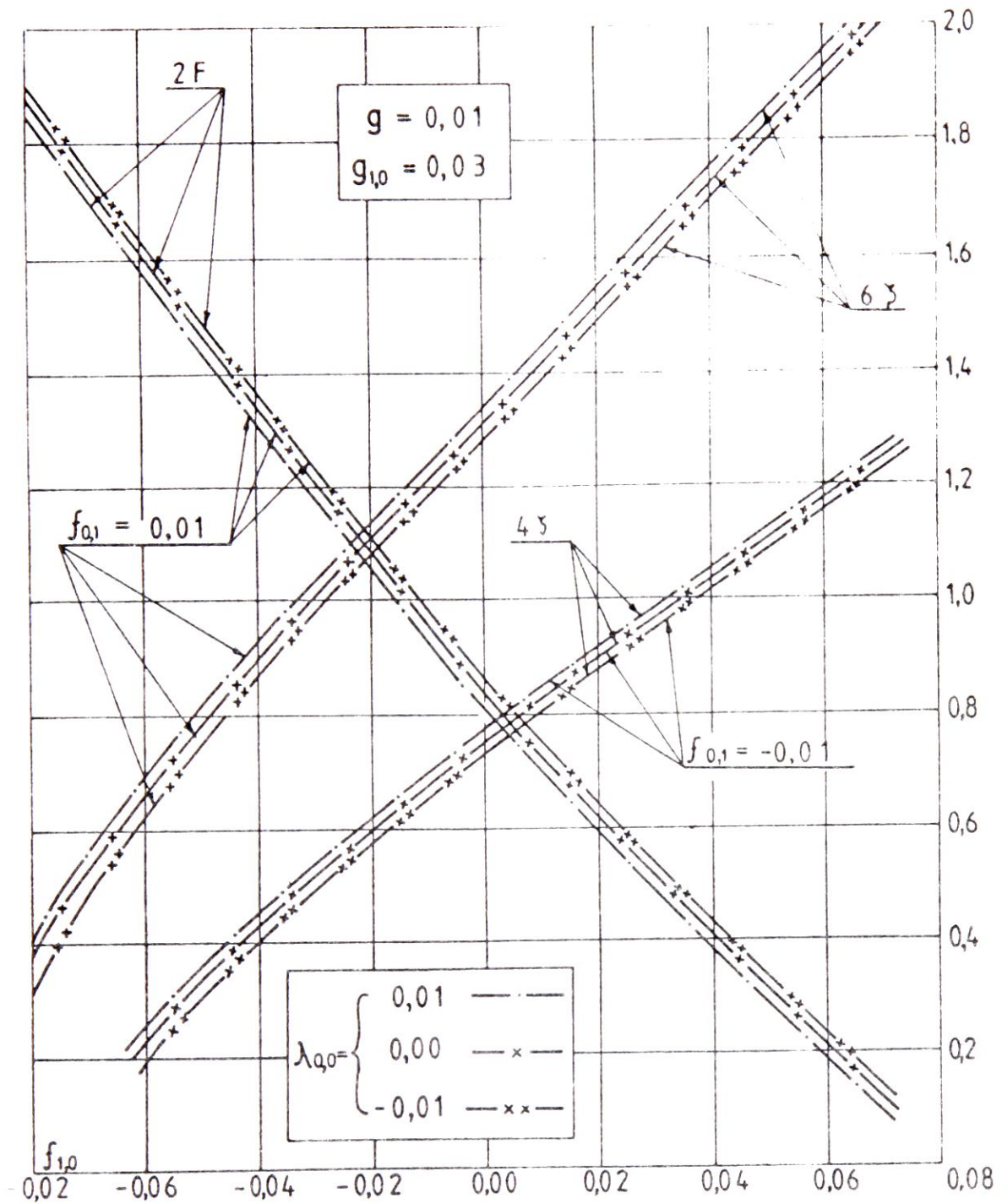


Рис. 3

- [4] Попков, А. Н., *Параметрические уравнения ламинарного пограничного слоя и методы расчета основанные на их решениях*, Изв. ВУЗ-ов, Авиационная техника № 4 (1979), 63-69.
- [5] Бушмарин, О. Н., Сараев, Ю. В., *Параметрический метод в теории нестационарного пограничного слоя*, Инженерно-физический журнал 27 (1) (1974), 110-118.
- [6] Шлихтинг, Г., *Теория пограничного слоя*, Наука, Москва, 1974.
- [7] Rossov, J., *On flow of electively counducting fluids over a plate in presence of a transverse magnetic field*, NASA RP No. 1358, 1958.

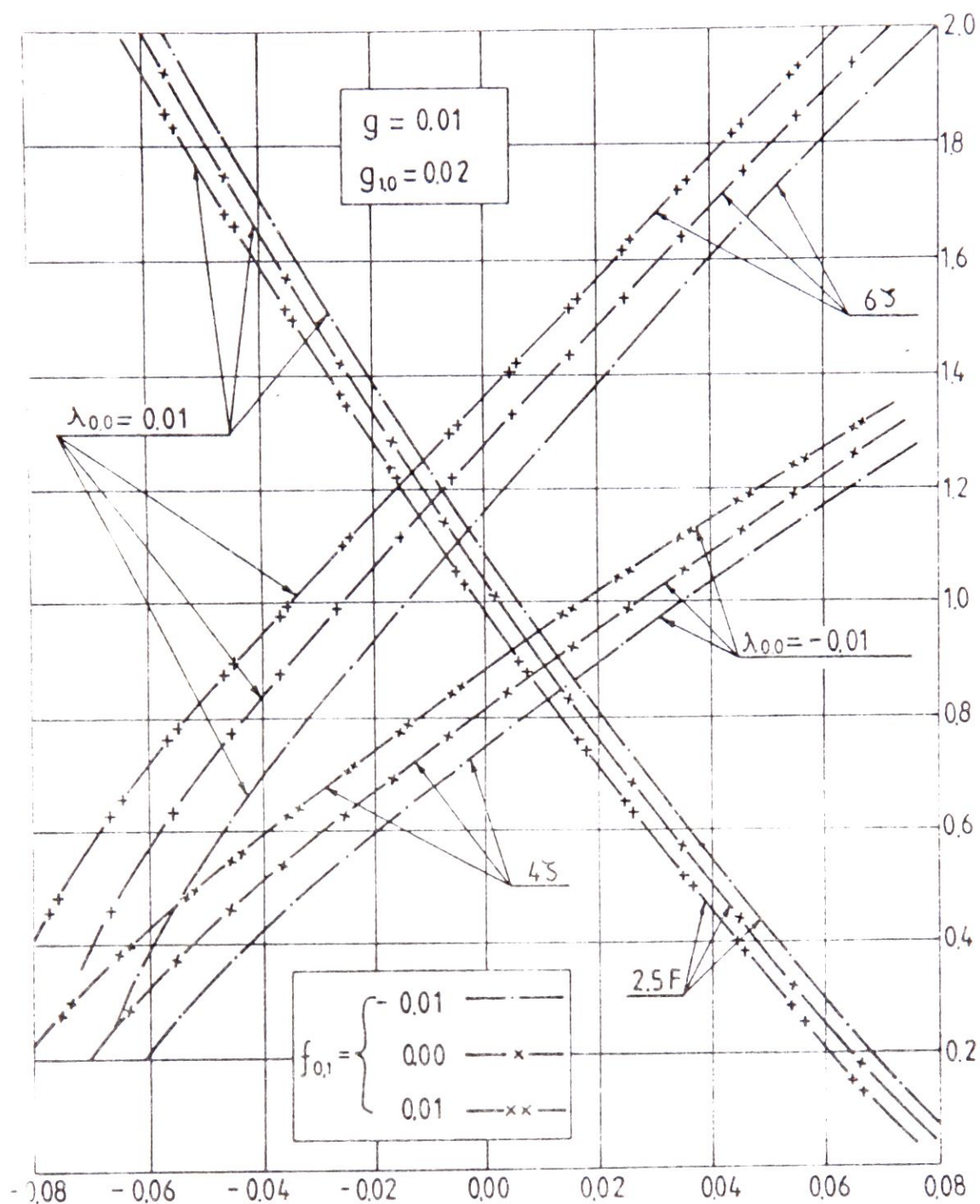


Рис. 4

CONDUCTING FLUID FLOW IN NON-STATIONARY  
 LAMINAR BOUNDARY LAYER ON THE POROUS SURFACE  
 IN THE PRESENCE OF THE TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

This paper discusses the non-stationary MHD boundary layer on the porous surface. The external magnetic field is homogeneous, perpendicular to the surface and stationary with respect to it. The electro-conductivity of the fluid is the function of the velocities ratio. The problem is in the plane. The described

problem equation is reduced to the universal equation by using three infinite sets of parameters and one constant parameter. For different functions of the electroconductivity change the universal equations are given. A part of the obtained results is presented graphically in the paper.

#### STRUJANJE PROVODNOG FLUIDA U NESTACIONARNOM LAMINARNOM GRANIČNOM SLOJU NA POROZNOJ POVRŠINI U PRISUSTVU POPREČNOG MAGNETNOG POLJA

U radu se razmatra nestacionarni MHD granični sloj na poroznoj površini. Spoljašnje magnetno polje je homogeno, upravno na površinu i miruje u odnosu na nju. Elektroprovodnost fluida je funkcija odnosa brzina. Zadatak je u ravni. Jednačina opisanog problema svodi se na univerzalnu jednačinu korišćenjem tri beskonačna skupa parametara i jednog konstantnog parametra. Za različite funkcije promene elektroprovodnosti daju se univerzalne jednačine. Deo dobijenih numeričkih rezultata daje se u radu grafički.

Zoran Boričić, Dragiša Nikodijević  
Mašinski fakultet u Nišu  
Ul. Beogradska 14  
18000 Niš, Yugoslavia