

VERALLGEMEINERTE ÄHNLICHKEITSLÖSUNGEN FÜR DREIDIMENSIONALE LAMINARE KOMPRESSIBLE SCHIEBENDE FLÜGELGRENZSCHICHTSTRÖMUNGEN IM SUPERSONISCHEN BEREICH¹

V. Saljnikov, Z. Boričić, D. Nikodijević

(Eingegangen am 23.01.1991)

Einleitung

Vom Gesichtspunkt moderner fluidmechanischer Erforschungen hat die Grenzschichttheorie ihre Aktualität bis heute nicht verloren. Im Gegenteil, sie hat in letzterer Zeit, in Verbindung mit den Untersuchungen, die auf numerischer Integration des Navier-Stokesschen Gleichungssystem beruhen, noch eine bedeutende Rolle erworben. Man hat, nämlich, zum Schluß gekommen, daß die Lösungen dieses Systems anhand der Grenzschichtlösungen überprüft werden müssen und nicht umgekehrt, was im Hinblick auf die Näherungsnatur der Grenzschichttheorie zu erwarten wäre. Dies folgt aus der Tatsache, daß sie genau der Struktur der Lösung für große Reynolds-Zahlen entspricht, welche, demgemäß den Grenzschichtcharakter besitzt. Daher sollte, also, der Navier-Stokes-Code überprüft werden, ob er asymptotisch korrekt ist, bzw., ob er die Resultate liefert, die mit den Grenzschichtlösungen übereinstimmen [1].

Besondere Bedeutung haben dabei die „ähnlichen“ Lösungen, welche als Testfälle für Stabilitätsuntersuchungen dienen und deshalb häufig zur Entwicklung semiempirischer Transitionskriterien herangezogen werden. Aus diesem Grund hat die Methode verallgemeinerter Ähnlichkeit [2] die Aufmerksamkeit an sich in letzterer Zeit gezogen. Die entsprechenden Lösungen sind, nämlich, im Hinblick auf ihre Genauigkeit und Allgemeinheit, im Vergleich mit klassischen „ähnlichen“ Lösungen vom Falkner-Skansch Typus, für diese Aufgabe zweckmäßiger. Man soll dabei hervorheben, daß diese theoretisch fundierete analytisch-numerische Methode, welche in verschiedenen zweidimensionalen Grenzschichtproblemen vorher erfolgreich verwendet worden ist, ihren Eigenschaften nach, modernen Tendenzen in der Fluidmechanik entspricht [3]. Nämlich, die Lösungen verallgemeinerter Ähnlichkeit, außer ihren oben schon erwähnten Vorteilen ermöglichen:

¹This research was supported by Science Fund of Serbia, grant number 0402, through Mathematical Institute.

- bevor sie für die Grenzschichtberechnung in speziellen Druckverteilungsfällen verwendet werden, die Einflußanalyse einziger maßgebender Parameter in allgemeiner Form durchzuführen;
- die charakteristischen Grenzschichtgrößen in einem bestimmten Grenzschichtquerschnitt zu berechnen, ohne die Grenzschichtgleichungen immer von neuem schrittweise zu integrieren; die Vorgeschichte der Grenzschichtentwicklung ist, nämlich — für einen betrachteten Querschnitt — vermittels der Transformationen verallgemeinerter Ähnlichkeit in entsprechenden, aus den fertigen Tafeln entnommenen, universellen Lösungen enthalten;
- die zeitlichen als auch die finanziellen Ersparnisse, durch viel kürzere Computerzeitbenützung und Verwendung fertiger Formeln bei der Anwendung universeller Lösungen in speziellen Druckverteilungsfällen, zu gewinnen.

Physikalisches Modell betrachtetes Grenzschichtproblems

In dieser Arbeit werden die verallgemeinerte Ähnlichkeitslösungen für den Fall dreidimensionaler laminarer stationärer kompressibler schiebender Flügelgrenzschichtströmungen im supersonischen Bereich bestimmt und analysiert. Als physikalisches Modell wird der unendlich lange schiebende profilierte Zylinder zugrundegelegt (s. Abb. 1). Dabei nimmt man an, daß im betrachteten Diapason der Anströmungs-Machschen Zahlen ($1 \leq M_\infty \leq 5$) die Voraussetzung sowohl über idealem Zustand des umströmenden Gases, als auch über die von der Temperatur linear abhängigen dynamischen Viskosität noch zulässig ist.

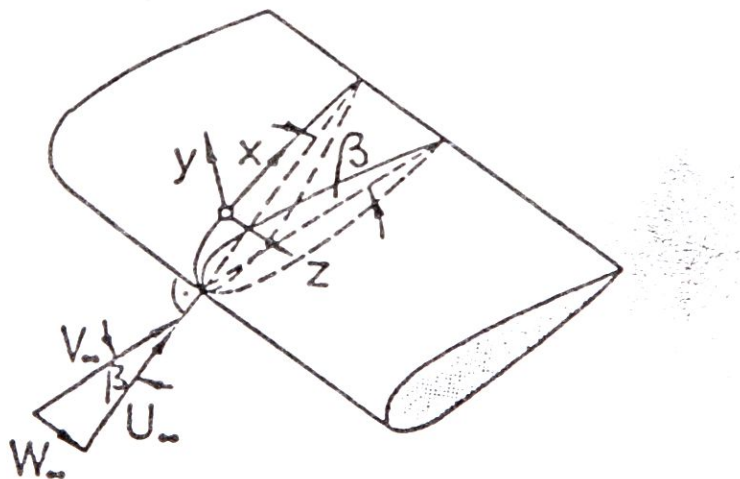


Abb. 1

Im Zusammenhang damit soll bemerkt werden, daß dieses Modell für die analogen Untersuchungen im transsonischen Bereich [4] schon verwendet wurde, wo außerdem die früheren analytischen Erforschungen dieses Problems ausführlich dargestellt sind.

Das entsprechende Ausgangsgleichungssystem

Das Gleichungssystem, welches das festgelegte Modell mit den in der Grenzschichttheorie üblichen Bezeichnungen:

$u; v; w$ — die Geschwindigkeitskomponenten in $x; y; z$ Richtung (s. Abb. 1)

ρ — Dichte

p — Druck

μ — dynamischer Viskositätskoeffizient

Pr — Prandtlsche Zahl

h — Enthalpie

beschreibt, besteht aus [5]:

— Bewegungsgleichungen: in x bzw. Profiltiefenrichtung

$$\rho uu_x + \rho vv_y = \rho u_e u'_e + (\mu u_y)_y, \quad (1)$$

und in z bzw. Spannweitenrichtung

$$\rho uw_x + \rho vw_y = (\mu w_y)_y, \quad (2)$$

— Kontinuitätsgleichung

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \quad (3)$$

— Energiegleichung

$$\rho u (h_0)_x + \rho v (h_0)_y = [(\mu/Pr)(h_0)_y]_y - \{[\mu(1-Pr)/Pr][(u^2 + w^2)/2]_y\}_y, \quad (4)$$

mit der totalen Enthalpie

$$h_0 = h + (u^2 + w^2)/2, \quad (5)$$

— Clapeyronscher Zustandsgleichung

$$p = \rho RT, \quad (6)$$

— linearem Viskositätsgesetz

$$\mu = (\mu_w/T_w)T, \quad (7)$$

— und entsprechenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad u = v = w = 0; \quad h_0 = h_{0w}; \\ y = \infty : \quad u = u_e; \quad w = w_e; \quad h_0 = h_{0e}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei werden die Staugrößen mit dem Index 0 , die Größen an der Wand mit w und die Größen an äußerem Grenzschichttrand mit e bezeichnet, während die Indizes x und y die partiellen Ableitungen nach entsprechenden Koordinaten bedeuten.

Die Umformungen des mathematischen Modells

Im Rahmen des analytischen Teils werden drei nacheinanderfolgenden Umformungen (I,II,III) des Gleichungssystems (1)–(8) durchgeführt. Nämlich:

I. Vermittels der Stewartsonschen Transformationen [4]

— für Koordinaten

$$X = \int_0^u (\mu_w T_0 / \mu_0 T_w) (c_e / c_0) (p_e / p_0) dx; \quad Y = (c_e / c_0) \int_0^y (\rho / \rho_0) dy, \quad (9)$$

— und Geschwindigkeitskomponenten

$$U = u(c_0 / c_e); \quad V = v(c_0 / c_e)(p_0 / p_e)(\rho / \rho_e) \quad (10)$$

werden die Gleichungen (1)–(8) in mathematisches Modell analoges inkompressiblen Problems überführt. Dabei wird eine isothermische Flügeloberfläche

$$T_w = \text{const.} \quad (11)$$

und für die äußere Strömung einen adiabatischen Zustand angenommen, mit der zugehörigen Energiegleichung

$$c_0^2 = c_e^2 + [(\kappa - 1)/2](u_e^2 + w_e^2) \quad (12)$$

II. Vermittels der Saljnikovshen Umformungen verallgemeinerter Ähnlichkeit [2]

$$\begin{aligned} X \equiv X; \quad \eta = U_e^{b/2} \left(a_0 \nu_0 \int_0^X U_e^{b-1} dX \right)^{-1/2} Y; \\ \Psi = U_e^{1-b/2} \left(a_0 \nu_0 \int_0^X U_e^{b-1} dX \right)^{1/2} \Phi(X, \eta) \end{aligned} \quad (15)$$

erhält man die entsprechenden Gleichungen verallgemeinerter Ähnlichkeit.

Im Spezialfall: für $a_0 = b = 2$, nämlich, folgen aus (15) zunächst die Görtlerschen Transformationen [6]

$$\eta = U_e \left(2\nu_0 \int_0^X U_e dX \right)^{-1/2} Y; \quad \Psi = \left(2\nu_0 \int_0^X U_e dX \right)^{1/2} \Phi(X, \eta) \quad (16)$$

die, für die Außengeschwindigkeitsverteilung and keilförmigen Profilen $U_e = CX^m$, in die wohlbekannten Falkner-Skanschen Koordinaten „ähnlicher“ Lösungen

$$\eta = [(m + 1)/2]^{1/2} (U_e / \nu_0 X)^{1/2} Y; \quad \Psi = [2\nu_0 U_e X / (m + 1)]^{1/2} \Phi(\eta) \quad (17)$$

danach übergehen.

III. Durch Einführen der Loitsianskischen Formparametermenge

$$f_k = U_e^{k-1} (d^k U_e / dX^k) [f_1 / (dU_e / dX)]^k; \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (18)$$

vermittels des Operators

$$(U_e f_1 / U'_e) \partial / \partial X = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k (\partial / \partial f_k) \quad (19)$$

wo

$$\Theta_k = [(k-1)f_1 + kF_x]f_k + f_{k+1} \quad (20)$$

die Rekursionsformel für Θ_k bedeutet und erster Parameter der Menge (18)

$$f_1 = a_0 B_x^2 U'_e U_e^{-b} \int_0^X U_e^{b-1} dX \quad (21)$$

das Integral entsprechender Impulsgleichung darstellt, mit charakteristischer dimensionsloser Impulsverlustdicke

$$B_x = \int_0^{\infty} \Phi_\eta (1 - \Phi_\eta) d\eta \quad (22)$$

man erhält

Universelles mathematisches Modell verallgemeinerter Ähnlichkeit [5]

welches aus

— Bewegungsgleichungen: in Profiltiefenrichtung

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2B_x^2} [a_0 B_x^2 + f_1(2-b)\Phi\Phi_{\eta\eta}] + \\ + \frac{f_1}{B_x^2} \left[1 + \frac{f_{0z}}{1-f_{0z}}(1-G^2) + \frac{(T_w/T_0)-1}{1-f_{0z}}(1-\theta) - \Phi_\eta^2 \right] = \\ = \frac{1}{B_x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k (\Phi_\eta f_k - \Phi_{\eta\eta} \Phi_{f_k}); \quad (23) \end{aligned}$$

und in Spannweitenrichtung

$$G_{\eta\eta} + \frac{1}{2B_x^2} [a_0 B_x^2 + f_1(2-b)] \Phi G_\eta = \frac{1}{B_x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k (G_{f_k} \Phi_\eta - G_\eta \Phi_{f_k}); \quad (24)$$

— Energiegleichung

$$\begin{aligned} \theta_{\eta\eta} + \frac{\text{Pr}}{2B_x^2} [a_0 B_x^2 + f_1(2-b)] \Phi \theta_\eta - \frac{1-\text{Pr}}{1-(T_w/T_0)} [f_{0z}(\Phi_\eta^2)_{\eta\eta} + f_{0z}(G^2)_{\eta\eta}] = \\ = \frac{\text{Pr}}{B_x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k (\theta_{f_k} \Phi_\eta - \theta_\eta \Phi_{f_k}) \quad (25) \end{aligned}$$

— und entsprechenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad \Phi = \Phi_\eta = G = \theta = 0; \quad \eta = \infty: \quad \Phi_\eta = G = \theta = 1 \\ f_1 = f_2 = \dots = 0: \quad \Phi = \Phi_0; \quad G = G_0; \quad \theta = \theta_0. \quad (26) \end{aligned}$$

besteht.

Da das Gleichungssystem (23)–(26) von der einen konkreten Strömungsfall betrachtetes Problems definierenden Außengeschwindigkeitsverteilung befreit ist, wird dieses Modell als universell betrachtet. Zwar bis auf die Werte von Parameter: a_0 ; b , Pr , T_w/T_0 und f_{0x} ; f_{0z} , welche erst bei der numerischen Integration festgelegt werden sollen.

Die von Reshotko & Beckwith [8] abgeleitete Gleichungen „ähnlicher“ Lösungen betrachtetes Grenzschichtproblems folgen aus dem System (23)–(26) im Spezialfall der Konstantenwerte $a_0 = b = 2$ und durch die Vernachlässigung der Ableitung nach dem ersten Parameter f_1 ($\partial/\partial f_1 = 0$), d.h. unter der Bedingung sogenannter Lokalisierung der Differentialgleichungen nach diesem Parameter.

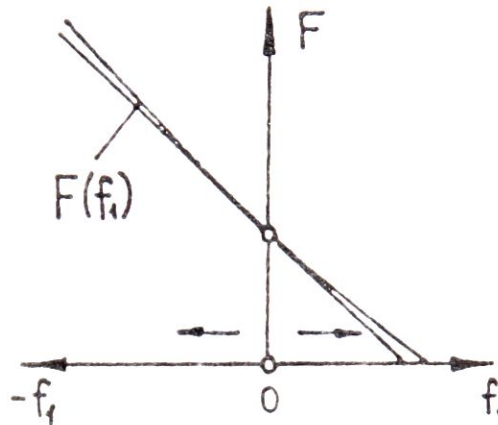


Abb. 2

Man soll dabei bemerken, daß die Konstanten a_0 ; b im Ausgangsintegrationspunkt ($f_1 = 0$) die Lage der Tangente an die charakteristische Grenzschichtverteilung $F(f_1)$ bestimmen (s. Abb. 2), welche eine bedeutende Rolle in entsprechender Impulsgleichung spielt. Damit werden, erfahrungsgemäß, die optimalen Resultate, im Vergleich mit exakten Lösungen, bei der Anwendung universeller Lösungen auf die speziellen Strömungsfälle gewonnen. Diese, bei der numerischen Integration durch ein sukzessives Näherungsverfahren berechneten und danach verwendeten optimalen Konstantenwerte sind: $a_0 = 0.4408$; $b = 5.714$.

Mit f_{0x} und f_{0z} sind die Kompressibilitätsparameter für Profiltiefenrichtung und für Spannweitenrichtung bezeichnet, welche vermittels der Anströmungs-Machzahl M_∞ und des Schiebewinkels β durch die folgenden Beziehungen wie folgt ausgedrückt sind:

$$f_{0x} = \bar{u}_e^2 (f_{0x})_\infty = \bar{u}_e^2 \frac{[(\kappa - 1)/2] M_\infty^2 \cos^2 \beta}{1 + [(\kappa - 1)/2] M_\infty^2} \quad (27)$$

$$f_{0z} = (f_{0z})_\infty = \frac{[(\kappa - 1)/2] M_\infty^2 \sin^2 \beta}{1 + [(\kappa - 1)/2] M_\infty^2} \quad (28)$$

wo (f_{0x}) und (f_{0z}) die Anströmungskompressibilitätsparameter bedeuten und

$$\bar{u}_e = u_e / U_\infty \quad (29)$$

die dimensionlose Außengeschwindigkeit in Profiltiefenrichtung darstellt.

Man kann, also, die folgenden Parameter willkürlich wählen: Pr , M_∞ , β , T_w/T_0 und \bar{u}_e (29), bzw. f_{0x} (27).

Numerische Integration

Das „Unabhängigkeitsprinzip“, welches im Falle des analogen inkompressiblen Grenzschichtproblems benützt werden konnte, gilt für das System (23)–(26) nicht. Die entsprechenden Gleichungen sind, nämlich, gekoppelt und deshalb müssen simultan integriert werden.

Da man in einparametrischer Näherung die befriedigende Genauigkeit der Lösungen, im Vergleich mit exakten Resultaten — sogar in unmittelbarer Nähe des singulären Ablösungspunktes — erfahrungsgemäß [2] erreicht, wird nur erster Formparameter (21) aus der Menge (18) behalten ($f_1 \neq 0$; $f_2 = f_3 = \dots = 0$).

Für die numerische Integration man verwendet das Differenzenverfahren mit implizitem Schema [4], in westlicher Literatur unter dem Namen „Tridiagonal Algorithm“ (TDA) bekannt und in russischer als „Progonka“ — Methode bezeichnet.

Um die Untersuchungen der Grenzschichtentwicklungen zweckmäßiger durchführen zu können man hat die numerischen Berechnungen für verschiedene Kombinationen der Parameterwerte durchgeführt. Und zwar für: $Pr = 0.72$ (Luftumströmungsfall), $M_\infty = 1; 3; 5$, $\beta = 0^\circ; 20^\circ; 40^\circ$, $T_w/T_0 = 0.50$ (gekühlter Wand); 0.98 (wärmeundurchlässiger Wand); 1.20 (geheizter Wand) und $f_{0x} = 0.50; 0.95$, wobei die entsprechenden Werte von \bar{u}_e aus der Beziehung (27) folgen.

Analyse der Parametereinflüsse

Aus der Fülle erhaltener und vertafelten Lösungen werden einige interessante Resultate als Veranschaulichung für die Analyse der Parametereinflüsse graphisch dargestellt und diskutiert. Dabei wird man sich auf diejenigen Varianten beschränken, bei welchen sowohl die Pr -Zahl für die Luftumströmung ($Pr = 0.72$), als auch der angenommenen mittleren Schiebewinkel ($\beta = 20^\circ$) unverändert bleiben.

Aus der Verteilungen der Profiltiefenwandschubspannung $\zeta'_x = (\partial^2 \Phi / \partial \eta^2)_{\eta=0}$ (s. Abb. 3) folgt zunächst, daß die Änderung des Kompressibilitätsparameters f_{0x} bedeutungslosen Einfluß auf diese Funktionen ausübt. Deshalb stimmen die Verteilungen, die auf dem Diagramm mit dem Index 1 ($f_{0x} = 0.5$) und mit dem Index 2 ($f_{0x} = 0.95$) bezeichnet sind fast überein. Diese Erscheinung wird übrigens bei allen charakteristischen dynamischen Grenzschichtgrößen festgestellt. Was, aber, den Einfluß der M_∞ -Zahl und der dimensionlosen Wandtemperatur T_w/T_0 betrifft, er ist viel bedeutender. Besonders, wenn sich T_w/T_0 bei festem M_∞ ($M_\infty = \text{const.}$) ändert, wobei die Ablösungslinie ($\zeta'_x = 0$) sich vom Fall gekühlter Wand ($T_w/T_0 = 0.50$) über den Fall wärmeundurchlässiger Wand ($T_w/T_0 = 0.98$) bis zum Fall geheizter Wand ($T_w/T_0 = 1.20$) stromaufwärts verschiebt. Die selbe Tendenz, obwohl in kleinerem Maße, wird in dem Fall bemerkt, wenn sich bei fester Temperatur T_w/T_0 ($T_w/T_0 = \text{const.}$) M_∞ vergrößert ($M_\infty : 1 \rightarrow 5$).

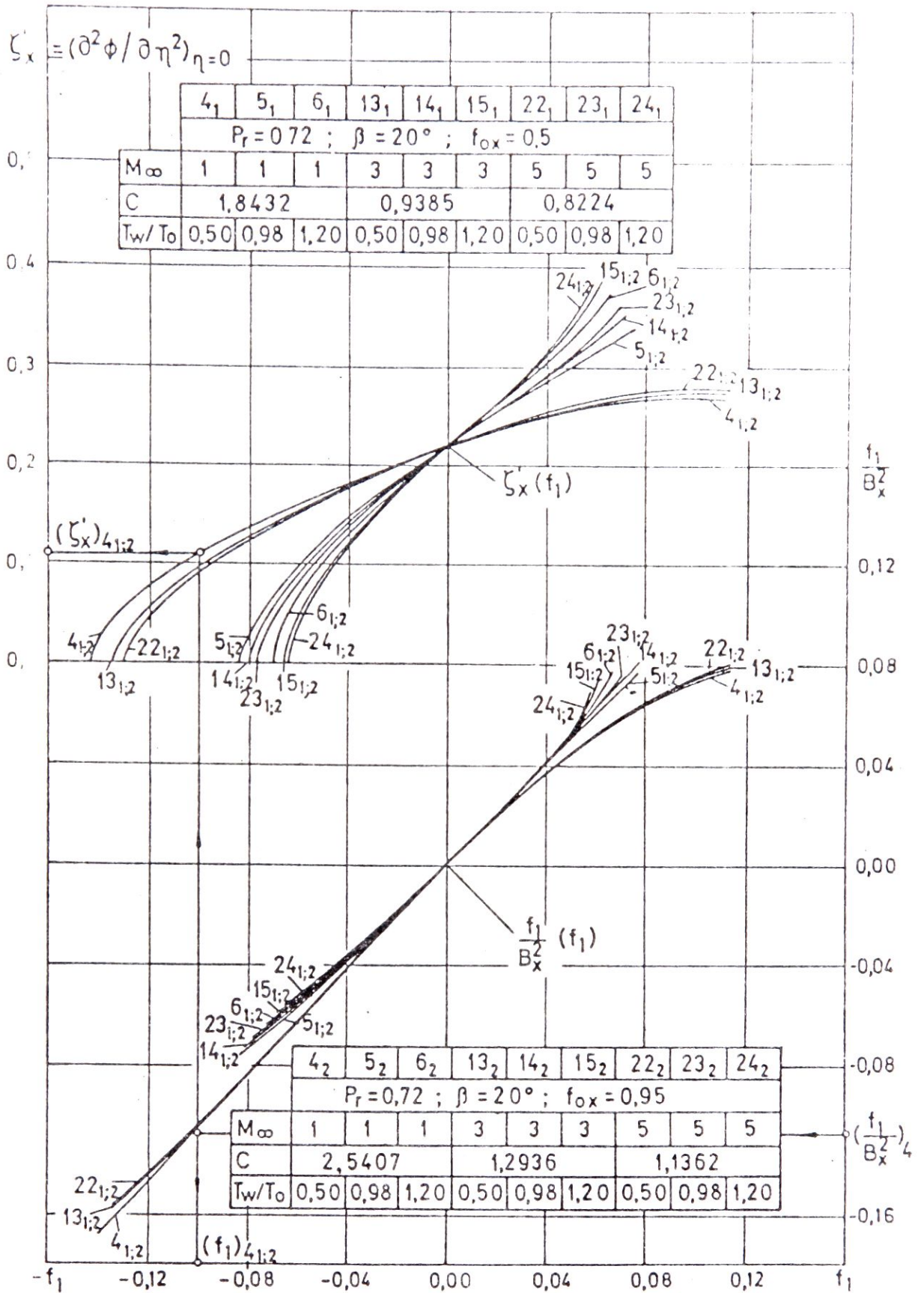


Abb. 3

In diesem Diagramm sind außerdem die zugehörigen Verteilungen der Funktion

$$\frac{f_1}{B_x^2} = a_0 U_e' U_e^{-b} \int_0^X U_e^{b-1} dX \quad (30)$$

gezeichnet (s. Abb. 3), welche aus dem Ausdruck (21) folgt und die wichtige Verbindungsrolle bei Bestimmung der universellen vertafelten Lösungen auf Grund von der einen speziellen Druckverteilungsfall definierenden Außengeschwindigkeit $U_e(X)$ spielt. Dabei ist die grundsätzliche Konstruktion dargestellt, die einerseits dieses Verfahren graphisch veranschaulicht und andererseits zum Zwecke der Bestimmung von Orientierungswerten universeller Lösungen verwendet werden könnte.

In folgendem Diagramm (s. Abb. 4) sind die Verteilungen des Verhältnisses der Wandschubspannungen in beiden Richtungen

$$\zeta_{xz} = \zeta_x' / \zeta_z' = (\partial^2 \Phi / \partial \eta^2)_{\eta=0} / (\partial G / \partial \eta)_{\eta=0}$$

dargestellt, welche zwei verschiedene Deutungen bekommen können. Einerseits kann man aufgrund entsprechender grundsätzlicher Skizze (s. Abb. 4) die Beziehung $\zeta_{xz} = \operatorname{tg} \gamma_w / \operatorname{tg} \gamma_e$ herstellen, woraus die erste Deutung dieser Größe folgt. Sie stellt in einem Grenzschichtquerschnitt, nämlich, ein Maß für die Abweichung der Außenstromlinie von der Wandstromlinie dar. Oder anders gesagt, ein Maß für die Intensität der an dieser Stelle entstandenen Querströmung. Die andere Deutung der Größe ζ_{xz} folgt aus der Tatsache, daß die dimensionlosen lokalen Wandschubspannungen in die x - und z -Richtungen $(\partial^2 \Phi / \partial \eta^2)_{\eta=0}$ und $(\partial G / \partial \eta)_{\eta=0}$ stellen gleichzeitig die dimensionlosen Wandwirbelstärkekomponenten dar, dieses Mal, aber, umgekehrt in die z - und x -Richtungen. Die Funktionen $\zeta_{xz}(f_1)$ können, also, als Verteilungen des Verhältnisses dieser Wandwirbelstärkekomponenten gedeutet werden.

Was, aber, der Einfluß betrifft, welcher die Änderung der Parameter f_{0x} , M_∞ und T_w/T_0 auf diese Verteilungen ausübt, die Tendenzen — wie aus dem Diagramm (s. Abb. 4) folgt — sind die gleichen wie im Falle der Verteilungen der Profiltiefenwandschubspannung (s. Abb. 3).

Auf dem letzten Diagramm (s. Abb. 5) sind die Verteilungen des dimensionlosen Wandenthalpiegradienten $\zeta_T' = (\partial \theta / \partial \eta)_{\eta=0}$ dargestellt, welche für eine qualitative Abschätzung von Wärmeaustauschvorgängen bei der Grenzschichtentwicklung maßgebend sind.

Erstes was man dabei merkt sind die ausdrucksvollen Unterschiede zwischen den mit gleicher Nummer, verschiedenen Indizen, aber, (1 und 2) bezeichneten Kurven. Zwischen Verteilungen, also, für welche M_∞ und T_w/T_0 dieselben Werte haben, während der Kompressibilitätsparameter f_{0x} entweder den Wert $(f_{0x})_1 = 0.5$ oder $(f_{0x})_2 = 0.95$ hat. Diese Erscheinung ist, vom mathematischen Standpunkt, zu erwarten, da der Parameter f_{0x} nur in der Energiegleichung (25) existiert und demzufolge seinen Einfluß hauptsächlich auf die Enthalpie θ und die anderen charakteristischen thermischen Grenzschichtgrößen ausübt.

Die größten Abweichungen treten (s. Abb. 5), für den nahe zur wärmeundurchlässigen Wand liegenden Fall ($T_w/T_0 = 0.98$) auf, wobei die durch verhindertes

	4 ₁	5 ₁	6 ₁	13 ₁	14 ₁	15 ₁	22 ₁	23 ₁	24 ₁
	Pr = 0,72 ; β = 20° ; f _{ox} = 0,5								
M _∞	1	1	1	3	3	3	5	5	5
C	1,8432			0,9385			0,8224		
T _w /T ₀	0,50	0,98	1,20	0,50	0,98	1,20	0,50	0,98	1,20

	4 ₂	5 ₂	6 ₂	13 ₂	14 ₂	15 ₂	22 ₂	23 ₂	24 ₂
	Pr = 0,72 ; β = 20° ; f _{ox} = 0,95								
M _∞	1	1	1	3	3	3	5	5	5
C	2,5407			1,2936			1,1362		
T _w /T ₀	0,50	0,98	1,20	0,50	0,98	1,20	0,50	0,98	1,20

$$\zeta_{xz} = (\partial^2 \phi / \partial \eta^2)_{\eta=0} / (\partial G / \partial \eta)_{\eta=0} = \text{tg} \gamma_w / \text{tg} \gamma_e$$

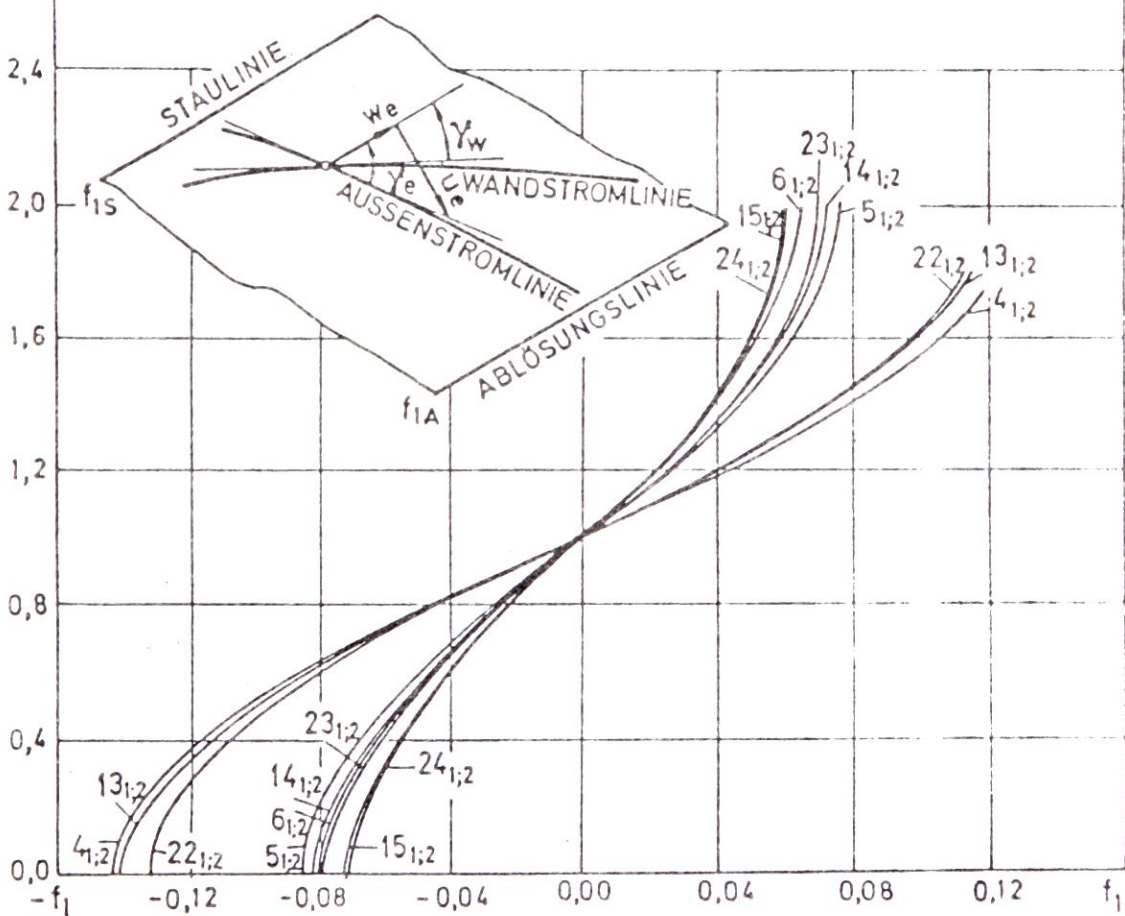


Abb. 4

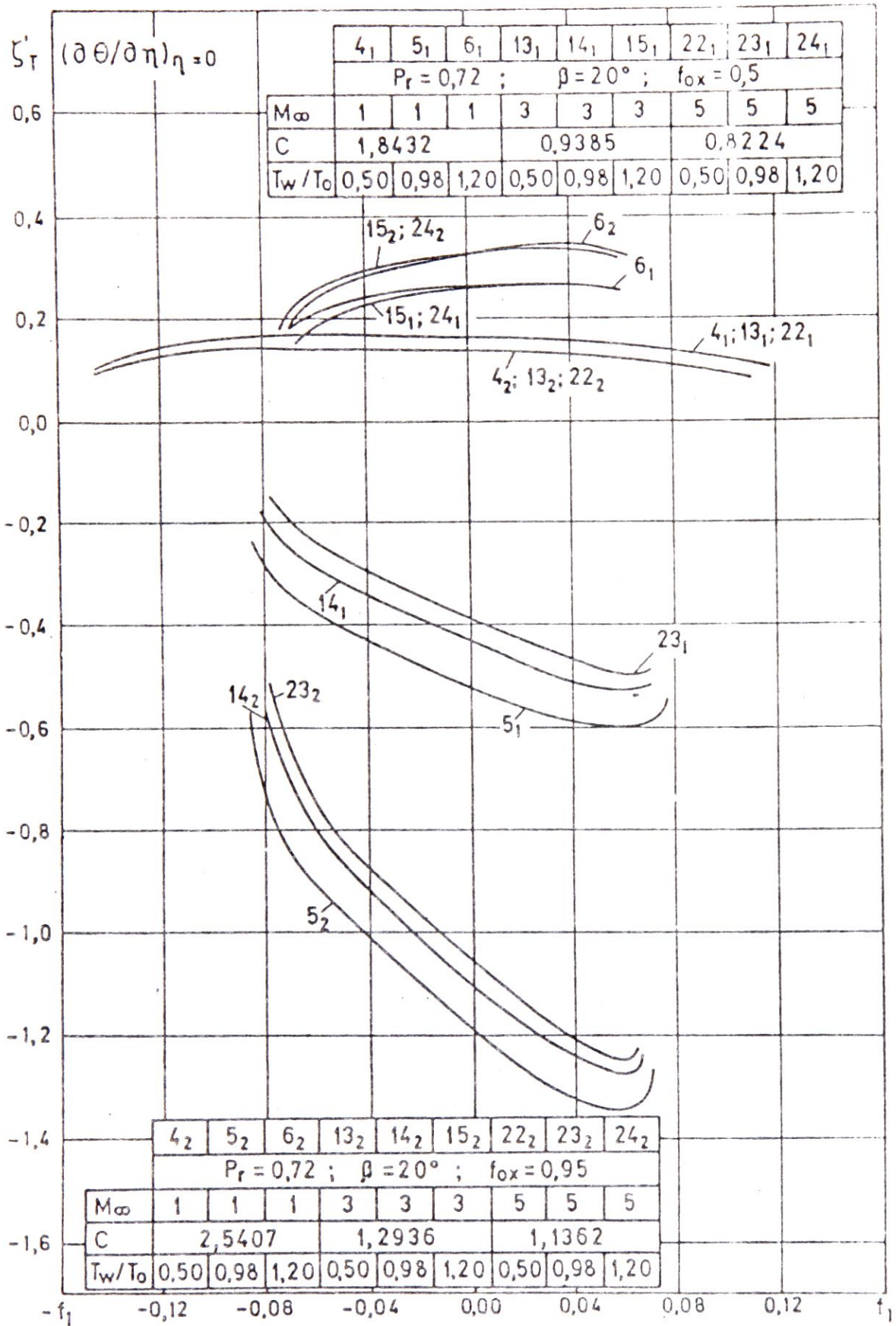


Abb. 5

Wärmeabführen verursachte Grenzschichtüberwärmung die negativen Wandenthalpiegradientenwerte erzeugt. Dies folgt aus der Lage der Verteilungen, welche mit: $5_1; 5_2$ für $M_\infty = 1$, $14_1; 14_2$ für $M_\infty = 3$ und $23_1; 23_2$ für $M_\infty = 5$ bezeichnet sind. Im Falle gekühlter Wand ($T_w/T_0 = 0.5$) bzw. geheizter Wand ($T_w/T_0 = 1.20$), aber, werden die durch unterschiedlichen Werte $(f_{0x})_1$ und $(f_{0x})_2$ entstandenen Abweichungen viel kleiner, wobei die Wandenthalpiegradienten ihrem Vorzeichen nach positiv werden. Diese Tendenz kommt je mehr zum Ausdruck desto die Temperatur gekühlter Wand ($T_w/T_0 < 1$) kleiner wird, wobei die Verteilungen für die festen Parameterwerte: f_{0x} und T_w/T_0 unbedeutend von der M_∞ -Änderung beeinflußt werden. Zu diesem Schluß kommt man aus dem Vergleich der mit $4_1; 13_1; 22_1$ und mit $4_2; 13_2; 22_2$ bezeichneten Kurven.

Zusammenfassung

Im Hinblick auf die in letzterer Zeit festgestellte Bedeutung der Grenzschichttheorie für die Überprüfung numerischer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen [1] und insbesondere auf die Rolle „ähnlicher“ Lösungen, welche als Testfälle bei Stabilitätsuntersuchungen verwendet werden, man hat zu diesem Zwecke, unter anderem, die Methode verallgemeinerter Ähnlichkeit entwickelt [2].

Als eine analytisch-numerische Methode trägt sie den modernen Tendenzen in der Fluidmechanik [3] bei. Sie ermöglicht, nämlich:

- Einflußanalyse einziger maßgebender Parameter in allgemeiner Form,
- vereinfachte und zweckmäßige Anwendung für die speziellen Strömungsfälle, und
- zeitliche als auch finanzielle Ersparnisse.

Als Beispiel für die Anwendung dieser Methode in der Untersuchungen eines interessanten modernen Problems man betrachtet die Umströmung mit großen Geschwindigkeiten pfeilförmiger Flügel. Man hat als möglichst gut angepaßtes physikalisches Modell einen unendlich langen schiebenden profilierten und von einem idealen Gas umströmten Zylinder festgelegt, wobei diese dreidimensionale Strömung als laminar stationär und kompressibel angenommen wird. Im analytischen Teil der Methode, nach drei Umformungen entsprechendes Ausgangsgleichungssystem (I. Stewartsonschen Transformationen, II. Umformungen verallgemeinerter Ähnlichkeit; III. Einführung der Loitsianskischen Formparametermenge) erhält man universelles mathematisches Modell verallgemeinerter Ähnlichkeit betrachtetes Problems [4].

Da man sich in dieser Arbeit auf den Fall supersonischer Luftumströmung beschränkt, wird die numerische Integration dieses mathematischen Modells für verschiedene Kombinationen folgender Parameterwerte: $Pr = 0.72$, $M_\infty = 1; 3; 5$, $\beta = 0^\circ; 20^\circ; 40^\circ$, $T_w/T_0 = 0, 50; 0.98; 1.20$ und $f_{0x} = 0.5; 0.95$ durchgeführt.

Aus der Fülle erhaltener und vertafelten Lösungen man hat einige interessante Verteilungen der charakteristischen Grenzschichtgrößen gewählt, graphisch dargestellt und analysiert.

L I T E R A T U R

- [1] Gersten, K., *Die Bedeutung der Prandtlschen Grenzschichttheorie nach 85 Jahren*, Z. Flugwiss. Weltraumforsch. **13** (1989), 209–218.
- [2] Saljnikov, V.N., *A contribution to universal solutions of the boundary layer theory*, Teor. prim. Meh. **4** (1978), 139–163.
- [3] Schneider, W., *Über die Bedeutung analyt. Meth. für die Ström.-Mech. im Zeitalter des Computers*, Vortrag am Festkolloquium, 60-jähriges Jubiläum von Prof. Zierep, Karlsruhe, 1989.
- [4] Saljnikov, V., Dallmann, U., *Verallgemeinerte Ähnlichkeitslösungen für 3-D lamin. stat. kompress. Grenzschichtströmungen an schiebenden profilierten Zylindern*, DLR-FB 34, 1989.
- [5] Saljnikov, V., Boričić, Z., Nikodijević, D., *Lösungen verallgemeinerter Ähnlichkeit für 3-D lamin. kompress. Flügelgrenzschichten*, ZAMM **70** (5) (1990), T462–T465.
- [6] Görteler, H., *A new series for the calculation of steady lamin. boundary layer flows*, J. Math. and Mech. **6** (1957), 1–66.
- [7] Loitsanski, L.G., *Die universellen Gleichungen und die parametrigen Näherungen in der Theorie der laminaren Grenzschicht* (in russisch), PMM **29** (1965), 70–87.
- [8] Reshotko, E., Beckwith, I., *Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number*, NASA Report 1379, 1958.

РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПОДОБИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО
ЛАМИНАРНОГО СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
НА СКОЛЬЗЯЩЕМ КРЫЛЕ
ОБТЕКАЕМОМ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

В работе определяются решения обобщенного подобия для случая трехмерного ламинарного сжимаемого пограничного слоя на скользящем стреловидном крыле обтекаемом сверхзвуковым потоком. С этой целью исследуется в качестве физической модели бесконечно удлиненный скользящий цилиндр профилеобразного сечения. При этом принимается что в рассматриваемом диапазоне набегающих чисел Маха ($1 \leq M_\infty \leq 5$) предположения о идеальном состоянии обтекаемого газа и линейной зависимости динамической вязкости от температуры еще допустимы. Универсальная математическая модель рассматриваемой проблемы, полученная в результате трех последовательных преобразований (Стюартсона, обобщенного подобия Сальникова [2] и совокупности параметров обобщенного подобия Лойцянского [7]) соответствующей исходной системы уравнений, решается числовым способом на ЭВМ, посредством разностного итеративного метода простой прогонки, для различных вариантов следующих значений свободно принимаемых параметров: $Pr = 0,72$, $M_\infty = 1; 3; 5$, угла скольжения $\beta = 0^\circ; 20^\circ; 40^\circ$, безразмерной температуры на стенке $T_w/T_0 = 0,50; 0,98; 1,20$ и параметра сжимаемости в направлении аэродинамической хорды $f_{0x} = 0,5; 0,95$. Из многочисленных рассчитанных результатов выбрано и графически представлено несколько интересных распределений характерных величин пограничного слоя над которыми производится анализ.

REŠENJA UOPŠTENE SLIČNOSTI ZA TRODIMENZIJSKI
LAMINARNI STIŠLJIVI GRANIČNI SLOJ NA KLIZAJUĆEM KRILU
KOJE OPTIČE NADZVUČNO STRUJANJE

U radu se određuju rešenja uopštene sličnosti za slučaj trodimenzijskog laminarnog stišljivog graničnog sloja na klizajućem strelastom krilu, koje optiče nadzvučno strujanje. U tom cilju razmatra se u svojstvu fizičkog modela beskonačno izduženi klizajući profilisani cilindar. Pri tome se usvaja, da su u posmatranoj oblasti Ma-broja nailazećeg strujanja ($1 \leq M_\infty \leq 5$) pretpostavke o idealnom stanju gasa i linearnoj zavisnosti dinamičke viskoznosti od temperature još dopustive. Univerzalni matematički model razmatranog problema, dobijen u rezultatu tri sukcesivne transformacije (Stewartson-ove, uopštene sličnosti Saljnikova [2] i skupa parametara oblika uopštene sličnosti Lojczanskog [7]) odgovarajućeg polaznog sistema jednačina, rešava se numeričkim postupkom na elektronskoj računskoj mašini (ERM), posredstvom iterativne metode konačnih razlika, tzv. „progonke“, za različite varijante sledećih vrednosti parametara, koji se proizvoljno biraju: $Pr = 0,72$, $M_\infty = 1; 3; 5$, ugla klizanja $\beta = 0^\circ; 20^\circ; 40^\circ$, bezdimenzijske temperature na zidu $T_w/T_0 = 0.50$ (hlađeni zid); 0.98 (toplotno nepropustljivi zid); 1.20 (zagrevani zid) i parametra stišljivosti u pravcu aerodinamičke tetive krila $f_{0x} = 0.5; 0.95$. Iz mnogobrojnih sračunatih rezultata izdvojeno je, grafički predstavljeno i analizirano nekoliko interesantnih raspodela karakterističnih veličina graničnog sloja.

Viktor Saljnikov, Nevesinjska 17, 11000 Beograd
Zoran Boričić, Tome Roksandića 3a, 18000 Niš
Dragiša Nikodijević, Maksima Gorkog 5/39, 18000 Niš