

A PROPOS DE LA COUCHE LIMITE TRIDIMENSIONNELLE LAMINAIRE
 POUR UNE VITESSE EXTERIEURE PERTURBEE
 PAR DES OSCILLATIONS A HAUTES FREQUENCES

R. Ašković, P. Florent et C. Tournier

(Reçu 18.02.1990.)

1. Introduction. On considère habituellement que la vitesse extérieure de la couche limite autour d'un corps a une valeur stationnaire. Cependant, on démontre expérimentalement que cette vitesse extérieure est presque toujours instationnaire, en changeant en tout point sa valeur et sa direction. On peut prendre alors que juste une valeur moyenne en temps \bar{u}_e de cette vitesse extérieure u_e est stationnaire:

$$u_e = \bar{u}_e(s, z) + U_1(s, z, t), \quad (1)$$

en supposant que l'intervalle du temps T pour une telle opération soit assez long:

$$\bar{u}_e = \frac{1}{T} \int_0^T u_e dt. \quad (2)$$

Il est donc plus exact de prévoir une composante perturbée U_1 de la vitesse extérieure dans l'étude de la couche limite que de prendre dès le début que la vitesse extérieure est stationnaire.

Pour étudier le problème posé, il est commode de présenter, pareillement au cas bidimensionnel [1], les composantes de la vitesse dans la couche limite tridimensionnelle sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} + u_1, \\ v &= \bar{v} + v_1, \\ w &= \bar{w} + w_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

où toutes les vitesses moyennes sont définies de la même façon que \bar{u}_e , donc:

$$\bar{U}_1 = \bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{w}_1 = 0. \quad (4)$$

2. Equations de base. En remplaçant les expressions (1) et (3) dans les équations de la couche limite tridimensionnelle laminaire en régime instationnaire, présentées dans les coordonnées curvilignes de Hayes [2], et en moyennant, ensuite, ces équations dans un intervalle du temps T assez long, on obtiendra [3], pour la partie moyenne de l'écoulement (3), les équations suivantes:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} + Q_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(e_2 \bar{u})}{\partial s} + \frac{\partial(e_2 \bar{v})}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}^2 = -\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_e^2 + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} + Q_2, \quad (7)$$

où:

$$Q_1 = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial s} - \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right), \quad (8)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_1^2 - \left(u_1 \frac{\partial w_1}{\partial s} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) + \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_1^2, \quad (9)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 & \quad \text{pour } n = 0, \\ \bar{u} = \bar{u}_e \quad \text{et} \quad \bar{w} = 0 & \quad \text{pour } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Les deux composantes supplémentaires du gradient de pression Q_1 et Q_2 sont, évidemment, déterminées par les parties oscillatoires de la vitesse (3), pouvant être calculées [3] du système suivant d'équations linéarisées dans le cas des oscillations à hautes fréquences:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} &= \frac{\partial U_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial(e_2 u_1)}{\partial s} + \frac{\partial(e_2 v_1)}{\partial n} &= 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} &= \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (u_1^2 - U_1^2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

tenant compte des conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} u_1 = v_1 = w_1 = 0 & \quad \text{pour } n = 0, \\ u_1 = U_1, \quad w_1 = 0 & \quad \text{pour } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. Cas particulier d'une simple oscillation harmonique. Dans le cas où l'écoulement extérieur est perturbé par une oscillation harmonique:

$$U_1 = U_0(s, z) \sin \omega t, \quad (13)$$

où $U_0(s, z)$ représente l'amplitude et ω la fréquence angulaire d'oscillations, il est possible, à l'aide de la méthode présentée ci dessus, de concrétiser la différence par rapport au cas stationnaire classique.

3.1. Solution de l'écoulement secondaire. Tout d'abord, les solutions analytiques des équations (11), tenant compte des conditions aux limites (12) de l'écoulement secondaire, ont été trouvées [4], et ensuite, les fonctions (8) et (9), à savoir:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} F_1(\eta) + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \bar{u}_e^2 F_2(\eta), \quad (14)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_e^2 F_3(\eta), \quad (15)$$

où:

$$\begin{aligned} F_1(\eta) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta - 1\right) e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta + 2\right) e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - e^{-\eta\sqrt{2}}, \\ F_2(\eta) &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\eta - \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\eta \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right] e^{-\eta/\sqrt{2}}, \\ F_3(\eta) &= -\frac{1}{2} e^{-\eta\sqrt{2}} + e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

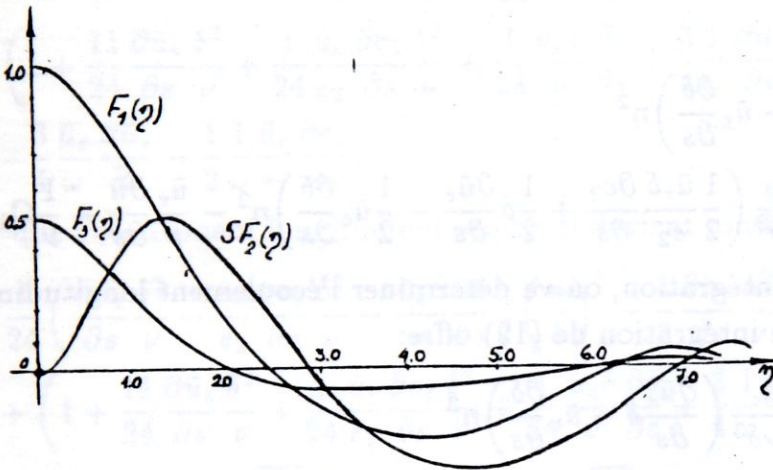


Fig. 1

Ces dernières fonctions (16), dépendant de la variable $\eta = n\sqrt{\omega/\nu}$, sont également présentées sur la figure ci-dessus. Contrairement au cas classique, deux composantes supplémentaires Q_1 et Q_2 du gradient de pression, dépendant donc ici de la variable normale n , et l'influence des perturbations harmoniques, sont évidemment particulièrement exprimées au voisinage de la paroi du corps.

3.2. *Calcul de l'écoulement principal.* Nous allons appliquer pour traiter les équations non linéaires (5), (6) et (7) de l'écoulement principal, où la situation est même pire par rapport au cas classique, Q_1 et Q_2 étant, en plus, fonctions de n , une méthode itérative approchée, pareille à celle de Švec [5], utilisée dans le cas bidimensionnel.

Considérons, d'abord, l'écoulement longitudinal, en introduisant la notion de l'épaisseur δ finie de la couche limite longitudinale. Si l'on élimine la composante normale \bar{v} de la vitesse de deux équations (5) et (6), par l'expression:

$$\bar{v} = -\frac{1}{e_2} \int_0^n \frac{\partial(e_2 \bar{u})}{\partial s} dn,$$

tirée de l'équation de continuité (6), alors on aura de (5):

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} - \frac{1}{e_2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \int_0^n \frac{\partial(e_2 \bar{u})}{\partial s} dn - \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - Q_1. \quad (17)$$

D'où, en posant dans le deuxième membre $\bar{u} = 0$, l'équation de la première approximation:

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial n^2} \approx 0,$$

dont la solution générale: $\bar{u}_0 = C_1 n + C_2$, tenant compte des conditions aux limites: $\bar{u}_0 = 0$ pour $n = 0$, $\bar{u}_0 = \bar{u}_e$ pour $n = \delta$, se ramène à:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_e \frac{n}{\delta}. \quad (18)$$

En remplaçant, maintenant, (18), dans (17):

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial s} - \frac{1}{e_2} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial n} \int_0^n \frac{\partial(e_2 \bar{u}_0)}{\partial s} dn - \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - Q_1,$$

on en tire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = & \frac{\bar{u}_e}{\nu \delta^3} \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \delta - \bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) n^2 \\ & - \frac{\bar{u}_0}{\nu \delta^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{u}_e \delta}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} + \frac{1}{2} \delta \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - \frac{1}{2} \bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) n^2 - \frac{\bar{u}_e}{\nu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} - \frac{1}{\nu} Q_1, \end{aligned} \quad (19)$$

d'où, par une double intégration, on va déterminer l'écoulement longitudinal.

Ainsi, la première intégration de (19) offre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = & \frac{\bar{u}_e}{3\nu \delta^3} \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \delta - \bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) n^3 \\ & - \frac{\bar{u}_e}{6\nu \delta^3} \left(\frac{\bar{u}_e \delta}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} + \delta \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - \bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) n^3 - \frac{\bar{u}_e}{\nu} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} n \\ & - \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \left[\frac{1}{2} \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} F_1^*(\eta) + \frac{u_e^2}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} F_2^*(\eta) \right] + C_1, \end{aligned}$$

où, tenant compte de (16):

$$\begin{aligned} F_1^*(\eta) \equiv \int F_1(\eta) d\eta = & -\eta e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} \\ & + \sqrt{2} e^{-\eta/\sqrt{2}} \left(2 \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\eta\sqrt{2}}, \\ F_2^*(\eta) \equiv \int F_2(\eta) d\eta = & -\frac{1}{2} \eta e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Et par une deuxième intégration, on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{\bar{u}_e}{12\nu \delta^3} \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \delta - \bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) n^4 \\ & - \frac{\bar{u}_e}{24\nu \delta^3} \left(\frac{\bar{u}_e \delta}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} + \delta \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - \bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) n^4 - \frac{1}{2} \frac{\bar{u}_e}{\nu} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} n^2 \\ & - \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{2} \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \int F_1^*(\eta) d\eta + \frac{u_e^2}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \int F_2^*(\eta) d\eta \right] + C_1 n + C_2, \end{aligned}$$

où:

$$\int F_1^*(\eta) d\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta e^{-\eta/\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) - e^{-\eta/\sqrt{2}} \left(4 \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} e^{-\eta\sqrt{2}},$$

$$\int F_2^*(\eta) d\eta = \frac{\sqrt{2}}{4} \eta e^{-\eta/\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) - e^{-\eta/\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cos \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right).$$

A l'aide des conditions aux limites:

$$\bar{u} = 0 \text{ pour } n = 0 \quad \text{et} \quad \bar{u} = \bar{u}_e \text{ pour } n = \delta,$$

on trouve les constantes d'intégration:

$$C_1 = \left(1 + \frac{11}{24} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} + \frac{1}{24} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} + \frac{1}{24} \frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} + \frac{3}{4} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \right) \frac{\bar{u}_e}{\delta},$$

$$C_2 = -\frac{3}{4} \frac{\bar{u}_e}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s},$$

de sorte que l'écoulement longitudinal principal devient ainsi tout à fait déterminé:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e} = & \frac{1}{24} \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} - \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} - \frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) \left(\frac{n}{\delta} \right)^4 - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \left(\frac{n}{\delta} \right)^2 \\ & + \left(1 + \frac{11}{24} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} + \frac{1}{24} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} + \frac{1}{24} \frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} + \frac{3}{4} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \right) \frac{n}{\delta} \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{2\omega}{\nu}} e^{-n\sqrt{\omega/(2\nu)}} \left(\sin n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} - \cos n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) \right. \\ & + e^{-n\sqrt{\omega/(2\nu)}} \left(4 \sin n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + \cos n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) + \frac{1}{2} e^{-n\sqrt{2\omega/\nu}} \left. \right\} \\ & + \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \left\{ \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{2\omega}{\nu}} e^{-n\sqrt{\omega/(2\nu)}} \left(\sin n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} - \cos n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) \right. \\ & + e^{-n\sqrt{\omega/(2\nu)}} \left(\sin n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + \frac{1}{2} \cos n \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \right) \left. \right\} \\ & - \frac{3}{4} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s}. \end{aligned} \quad (20)$$

Pour calculer l'écoulement moyen principal global, il faut trouver encore la composante transversale de la vitesse. Le procédé est semblable au précédent. Après avoir éliminé \bar{v} par l'intermédiaire de l'équation de continuité, on tire de (7):

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} = \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} - \frac{1}{e_2} \int_0^n \frac{\partial(e_2 \bar{u})}{\partial s} dn - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}^2 + \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_e^2 - Q_2. \quad (21)$$

En posant dans le deuxième membre que $\bar{u} = 0$ et $\bar{w} = 0$, on obtient l'équation de la première approximation:

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial n^2} \approx \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_e^2$$

dont la solution générale: $\bar{w}_0 = \frac{1}{2\nu} \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_e^2 n^2 + C_1 n + C_2$, tenant compte des conditions:

$$\bar{w}_0 = 0 \quad \text{pour } n = 0 \quad \text{et} \quad \bar{w}_0 = 0 \quad \text{pour } n = \delta,$$

se ramène à:

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\bar{u}_e^2 \delta^2}{\nu} \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{n}{\delta} \right) \right]. \quad (22)$$

Il est à souligner que, d'après Prandtl et Gruschwitz [6], les deux épaisseurs longitudinale et transversale de la couche limite peuvent être considérées approximativement les mêmes: $\delta_s = \delta_z = \delta$.

A l'aide de (18), on trouve de (6):

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{2} \left(\bar{u}_e \frac{\partial \delta}{\partial s} - \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \delta - \frac{\bar{u}_e \delta}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \right) \left(\frac{n}{\delta} \right)^2, \quad (23)$$

de sorte que la deuxième approximation de l'écoulement transversal est, maintenant, définie par l'équation suivante:

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} = \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial s} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial n} - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \bar{u}_0^2 - Q_2 \quad (24)$$

ou bien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2} = & \frac{1}{2\nu^2 \delta} \left(\frac{2\bar{u}_e^2}{e_1} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\partial e_1}{\partial z} + \frac{\bar{u}_e^3}{e_1} \frac{\partial^2 e_1}{\partial s \partial z} - \frac{\bar{u}_e^3}{e_1^2} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\partial e_1}{\partial z} \right) (n^3 - \delta n^2) \\ & - \frac{1}{2\nu^2 \delta} \frac{\bar{u}_e^3}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\partial \delta}{\partial s} n^2 + \frac{1}{4\nu^2 \delta^2} \left(\frac{\bar{u}_e^3}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\partial \delta}{\partial s} - \frac{\bar{u}_e^2 \delta}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{u}_e^3}{e_1} \frac{\delta}{e_2} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\partial e_2}{\partial s} \right) (2n^3 - \delta n^2) - \frac{\bar{u}_e^2}{\nu \delta^2} \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} n^2 - \frac{1}{\nu} Q_2, \end{aligned}$$

d'où, par une double intégration, et tenant compte des conditions aux limites: $\bar{w} = 0$ pour $n = 0$ et $\bar{w} = 0$ pour $n = \delta$, on aura la solution suivante pour l'écoulement transversal principal:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}}{\bar{u}_e} = & \frac{1}{40} \left[\left(\frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \right. \\ & - \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) - \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \\ & \left. + \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\bar{u}_e \frac{\partial^2 e_1 / \partial s \partial z}{\partial e_1 / \partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \right] \left(\frac{n}{\delta} \right)^5 \\ & - \left[\left(\frac{1}{16} \frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) \left(\frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \right. \\ & - \frac{1}{24} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) - \frac{1}{48} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \\ & \left. + \frac{1}{24} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\bar{u}_e \frac{\partial^2 e_1 / \partial s \partial z}{\partial e_1 / \partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \right] \left(\frac{n}{\delta} \right)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{3}{80} \left(\frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{3}{80} \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \right. \\
 & - \frac{1}{60} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{1}{240} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \\
 & + \frac{1}{12} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{1}{60} \left(\frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \left(\bar{u}_e \frac{\partial^2 e_1 / \partial s \partial z}{\partial e_1 / \partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \right) \left. \right] \left(\frac{n}{\delta} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \right) \\
 & - \left(\frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \right) \left(e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} e^{-\eta\sqrt{2}} \right). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Il reste encore de déterminer l'épaisseur δ de la couche limite pour pouvoir utiliser, ensuite, les expressions (20) et (25), pour le calcul de la couche limite moyenne principale. Dans ce but, on peut profiter la condition suivante:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right)_{n=\delta} = 0, \tag{26}$$

d'où, après l'introduction de (20), l'équation différentielle telle que suit:

$$\frac{1}{16} \bar{u}_e \cdot f' + \frac{3}{8} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2 / \partial s}{\partial \bar{u}_e / \partial s} \right] \cdot f = \Omega(s, z), \tag{27}$$

où:

$$f = \frac{\delta^2}{\nu}, \tag{28}$$

$$\Omega(s, z) = 1 + \frac{3}{4} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s}. \tag{29}$$

L'équation différentielle (27), étant linéaire, peut être intégrée, analytiquement ou numériquement, pour chaque corps particulier, en sachant les fonctions $\bar{u}_e(s, z)$ et $e_2(s, z)$, afin de déterminer f , c'est à dire, δ , d'après (28).

3.3. *Cas d'une sphère dans un écoulement extérieur perturbé par une oscillation harmonique.* Dans le cas d'un écoulement à symétrie de révolution, la composante transversale de la vitesse est identiquement zéro: $\bar{w} = 0$, et il ne reste que la composante longitudinale, présentée par la solution déjà trouvée (20).

Pour une sphère de rayon R , par exemple, les fonctions \bar{u}_e et e_2 sont bien connues:

$$\bar{u}_e = \frac{3}{2} U_\infty \sin \frac{s}{R}, \quad e_2 = r = R \sin \frac{s}{R},$$

de sorte que la fonction $\Omega(s)$ (29) se calcule facilement:

$$\Omega(s) = 1 + \frac{15}{8} \frac{U_\infty}{R\omega} \cos \frac{s}{R}.$$

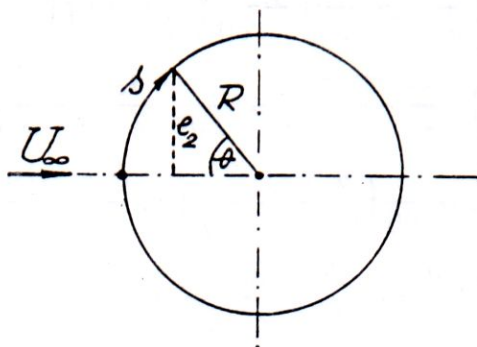


Fig. 2

Alors l'équation (27) se ramène à:

$$\left(\frac{3}{32}U_{\infty} \sin \frac{s}{R}\right) f' + \left(\frac{3}{4} \frac{U_{\infty}}{R} \cos \frac{s}{R}\right) f = 1 + \frac{15}{8} \frac{U_{\infty}}{R\omega} \cos \frac{s}{R}, \quad (30)$$

et peut être intégrée analytiquement par la méthode de la variation des constantes. On trouve, d'abord, la solution homogène:

$$\frac{1}{8} R \sin \frac{s}{R} \frac{df}{ds} = -\cos \frac{s}{R} \cdot f$$

ou

$$\frac{df}{f} = -\frac{8 \cos(s/R)}{R \sin(s/R)} ds = -8 \frac{d(\sin(s/R))}{\sin(s/R)}$$

sous la forme suivante:

$$f = C \left(\sin \frac{s}{R}\right)^{-8}, \quad (31)$$

d'où, en différentiant:

$$f' = C' \left(\sin \frac{s}{R}\right)^{-8} - \frac{8}{R} C \left(\sin \frac{s}{R}\right)^{-9} \cos \frac{s}{R},$$

et, en remplaçant dans (30), on aura:

$$C' = \frac{32}{3U_{\infty}} \left(\sin \frac{s}{R}\right)^7 + \frac{20}{R\omega} \left(\sin \frac{s}{R}\right)^7 \cos \frac{s}{R},$$

dont la solution est:

$$C = \frac{5}{2\omega} \sin^8 \frac{s}{R} + \frac{32R}{21U_{\infty}} \left(-\sin^6 \frac{s}{R} \cos \frac{s}{R} - \frac{6}{5} \sin^4 \frac{s}{R} \cos \frac{s}{R} + \frac{8}{5} \cos^3 \frac{s}{R} - \frac{24}{5} \cos \frac{s}{R} \right).$$

Enfin, en rapportant cette dernière valeur de C dans (31), on obtient:

$$f = \frac{\delta^2}{\nu} = \frac{5}{2\omega} + \frac{32R}{21U_{\infty}} \left(-\sin^6 \frac{s}{R} \cos \frac{s}{R} - \frac{6}{5} \sin^4 \frac{s}{R} \cos \frac{s}{R} + \frac{8}{5} \cos^3 \frac{s}{R} - \frac{24}{5} \cos \frac{s}{R} \right) \sin^{-8} \frac{s}{R}, \quad (32)$$

étant donc la solution de l'équation non homogène (30), c'est à dire, la distribution de l'épaisseur de la couche limite (sauf tout près du point d'arrêt en amont) en fonction de la distance s du point d'arrêt antérieur et de la fréquence ω d'oscillations harmoniques dans l'écoulement extérieur autour d'une sphère (fig. 2).

Le point de décollement de la couche limite vérifie la condition:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\right)_{n=0} = 0,$$

c'est à dire, en y remplaçant la solution (20), trouvée ci-dessus, et tenant compte de (28):

$$1 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{1}{24} \left(\frac{\bar{u}_e}{r} \frac{dr}{ds} \frac{\delta^2}{\nu} \right) + \frac{1}{24} \left(\frac{\bar{u}_e \delta}{\nu} \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) + \frac{3}{4\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} + \frac{1}{2\omega} \frac{\bar{u}_e}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\sqrt{2\nu\omega}} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} = 0.$$

Cette relation donne la possibilité d'étudier en détail l'influence des perturbations extérieures harmoniques sur le décollement de la couche limite. En n'entrant pas, pour l'instant, en détail, on va utiliser comme la mesure de l'épaisseur de la couche limite la relation bien connue: $\delta \sim \sqrt{2\nu/\omega}$, dans l'équation précédente, juste afin de juger qualitativement cette influence de la fréquence des perturbations extérieures sur la position du point de décollement:

$$1 + \frac{4}{3} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial s} + \frac{7}{12} \frac{1}{\omega} \frac{\bar{u}_e}{r} \frac{dr}{ds} = 0.$$

En tenant compte encore des expressions analytiques des fonctions $\bar{u}_e(s)$ et $r(s)$ pour une sphère, citées ci-dessus, il s'ensuit que le point de décollement sur une sphère est déterminé par:

$$\frac{s}{R} = \sqrt{2 + \frac{16}{23} \frac{R}{U_\infty} \omega}.$$

D'où, tout d'abord, $\theta = 81^\circ$ pour $\omega = 0$, ce qui correspond assez bien à la valeur bien connue ($\theta = 83,5^\circ$) dans le cas stationnaire [7]. Et ensuite, il est évident de l'expression précédente, que le point de décollement se déplace vers l'aval (θ croît) le long de la surface de la sphère, en présence de ω , ce qui est une indication préalable et une confirmation qualitative du phénomène classique que le point de décollement turbulent glisse plus vers l'arrière ($\theta \approx 110^\circ$) par rapport au point de décollement laminaire.

A noter, enfin, qu'il en est possible de faire une généralisation dans le cas où la vitesse extérieure contient un spectre d'oscillations harmoniques des différentes fréquences $k \cdot \omega$ ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$u_e = \bar{u}_e(s, z) + \sum_k U_{0k}(s, z) \sin k\omega t,$$

en suivant la même méthode, utilisée dans cet article, en principe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lin C. C.: *Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow*, Proc. 9th Intern. Congress Appl. Mech., Brussels, 1957.
- [2] Hayes W. D.: *The three-dimensional boundary layer*, Navord Rep., 1313, Washington, 1951.
- [3] Ašković R.: *Une contribution à l'étude de la couche limite tridimensionnelle pour une vitesse extérieure perturbée par des oscillations à hautes fréquences*, Publ. de l'Inst. Math., T. 9 (23), Beograd, 1969.
- [4] Ašković R.: *Couche limite tridimensionnelle périodique sur un corps dans un écoulement extérieur harmonique (en yougoslave)*, Mat. vesnik, 6 (21), sv.2, Beograd, 1969.
- [5] Švec M. E.: P.M.M., T. XIII, v. 3.
- [6] Prandtl L.: „Betz-Festschrift“, Göttingen 1945, 134–141.
- [7] Meksyn D.: *New methods in laminar boundary layer theory*, Pergamon Press, N. Y., first edition, p.p. 15 and 109, 1961.

ON THE THREE-DIMENSIONAL LAMINAR BOUNDARY LAYER
WITH A RAPIDLY OSCILLATING EXTERNAL FLOW

In this article the three-dimensional laminar boundary layer with a rapidly oscillating external flow is discussed, because the problems in which the oscillations are superimposed on a stream are much more important in applications. Containing the supplementary components Q_1 and Q_2 of the pressure gradient, depending even of the normal coordinate n , the mean flow in our case differs considerably compared to the classical steady case. First, an approximate method to calculate both longitudinal and transverse velocity components of the mean flow is established. Then the method is applied to study the boundary layer (velocity, thickness, separation) on a sphere.

O PROBLEMU TRIDIMENZIJSKOG LAMINARNOG
GRANIČNOG SLOJA SA SPOLJAŠNJOM
BRZINOM PERTURBOVANOM VISOKO-FREKVENTNIM OSCILACIJAMA

U radu se izlaže jedan pokušaj rešavanja ovog problema, posebno važnog za praksu. Najpre se dokazuje da u slučaju ovih visoko-frekventnih oscilacija u spoljašnjem strujanju, gradijent pritiska u slučaju tridimenzijskog laminarnog graničnog sloja dobija još dva dopunska člana Q_1 i Q_2 , dosta komplikovane strukture, zavisna čak i od normalne koordinate n , što čini bitnu razliku u odnosu na klasični stacionarni slučaj sa važećim Prandtlovim pretpostavkama. Zatim se predlaže jedna približna metoda proračuna obe (podužne i transverzalne) komponente prosečnog (vremenski osrednjenog) strujanja u graničnom sloju. Konačno, metoda je primenjena za proračun graničnog sloja na sferi.

R. Ašković, P. Florent, C. Tournier,
Université de Valenciennes,
Valenciennes, France