TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 15, pp 75–82, 1989, UDK 531.36

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИНГУЛЯАРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ЛУРЬЕ

А. А. Мартынюк, В. Г. Миладжанов

(поступила 15.10.1989)

При определенных условиях декомпозиция крупномасштабной системы приводит к системе уравнений в форме Лурье, описывающей медленные и быстрые движения. Иногда такое разделение движений позволяет упростить процедуру исследования реальной системы автоматического регулирования.

Для непрерывных и дискретных систем Лурье разработаны некоторые критерии устойчивости движения многими учеными. Обобщающие результаты вместе с оригинальными подходами изложены в книгах [1–4,7,8,14]. Общая качественная теория сингулярно-возмущенных систем на основе прямого метода Ляпунова получила определенное развитие путем применения как скалярной [5], так и векторной функции Ляпунова (см. [4] и библиографию к ней). Прямой метод Ляпунова на основе матриц-функций [9,10,18,19] был применен к сингулярно-возмущенным системам общего вида [11–12] в результате чего получены новые условия устойчивости такого рода систем. Была начата [13] разработка подхода, основанного на матрице-функции к исследованию задачи об абсолютной устойчивости сингулярно-возмущенной системы.

В предлагаемой работе, являющейся продолжением статьи [13], используются некоторые идеи А. И. Лурье и Е. Н. Розенвассера об оценке знака производной в сочетании с матричным подходом.

1. Сингулярно-возмущенная система Лурье. *Случай A*. Рассматривается автономная сингулярно-возмущенная система [16]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{11}x + A_{12}y + q_1 f_1(\sigma_1), \\ \mu\frac{dy}{dt} &= A_{21}x + A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\sigma_i = c_{i1}^T x + c_{i2}^T y$, $i = 1,2$; $x \in N_x \subseteq \mathbf{R}^n$, $y \in N_y \subseteq \mathbf{R}^m$, $\mu \in]0,1]$ — малый параметр, матрицы $A_{(\cdot)}$ и векторы $c_{(\cdot)}$, $q_{(\cdot)}$ соответствующей размерности. Нелинейности f_i, $i = 1,2$, непрерывны, $f_i(0) = 0$ и в секторах Лурье $[0, k_i]$, $k_i \in]0,\infty[$, удовлетворяют условиям

$$f_i(\sigma_i)/\sigma_i \in [0,k_i], \qquad i = 1,2, \quad \forall(\sigma_i \neq 0) \in]-\infty,+\infty[.$$

При этом расматриваются лишь те нелинейности f_i, при которых состояние $(x^T, y^T)^T = 0$ является единственным изолированным состоянием равновесия вырожденной системы

$$\frac{dx}{dt} = A_{11}x + q_1 f_1(\sigma_1^0), \qquad \sigma_1^0 = c_{11}^T x \tag{1.2}$$

и системы, описывающей граничный слой

$$\mu\frac{dx}{dt} = A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2^0), \qquad \sigma_2^0 = c_{22}^T y. \tag{1.3}$$

Это предположение имеет место, если $c_{ii}^T A_{ii}^{-1} q_i > 0$, $i = 1, 2$.

Для дальнейшего изложения введем обозначения

$$\begin{aligned}
f_1(x,0) &= A_{11}x + q_1 f_1(\sigma_1^0);\\
f_2(0,y) &= A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2^0);\\
f_1^* &= A_{12}y + q_1[f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_1^0)];\\
f_2^* &= A_{21}x + q_2[f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_2^0)].
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Учитывая обозначения (1.4) система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f_1(x,0) + f_1^*(x,y);\\
\mu\frac{dy}{dt} &= f_2(0,y) + f_2^*(x,y).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Будем рассматривать матрицу-функцию

$$\mathfrak{Y}(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\mu) \\ v_{21}(x,y,\mu) & v_{22}(y,\mu) \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где $v_{11} = x^T B_1 x$, $v_{22} = \mu y^T B y$, $v_{12} = v_{21} = \mu x^T B_3 y$. Здесь B_1 и B_2 симметричные, положительно определенные матрицы, B_3 — постоянная матрица.

Элементы $v_{ij}(\cdot)$ матрицы-функции (1.6) удовлетворяют оценкам, характерным для квадратичных форм

$$\begin{aligned}
v_{11}(x) &\geq \lambda_m(B_1)\|x\|^2 \quad \forall x \in N_{x_0},\\
v_{22}(y,\mu) &\geq \mu\lambda_m(B_2)\|y\|^2 \quad \forall (y,\mu) \in N_{y_0} \times M;\\
v_{12}(x,y,\mu) &\geq -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3, B_3^T)\|x\|\|y\| \quad \forall (x,y,\mu) \in N_{x_0} \times N_{y_0} \times M,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\lambda_m(B_i)$ — минимальные собственные числа матриц B_i, $i = 1, 2$; $\lambda_M^{1/2}(B_3 B_3^T)$ — норма матрицы B_3; $\lambda_M(B_3 B_3^T)$ — максимальное собственное число матрицы $B_3 B_3^T$, $N_{x_0} = \{x : x \in N_x,\ x \neq 0\}$, $N_{y_0} = \{y : y \in N_y,\ y \neq 0\}$, $M =]0, 1]$.

При выполнении оценок (1.7) для скалярной функции

$$v(x,y,\mu) = \eta^T \mathfrak{Y}(x,y,\mu)\eta, \qquad \eta \in \mathring{\mathbf{R}}_+^2 \tag{1.8}$$

имеет место оценка

$$v(x,y,\mu) \geq u^T H^T A H u \quad \forall (x,y,\mu) \in N_x \times N_y \times M \tag{1.9}$$

$$u^T = (\|x\|, \|y\|), \quad H = \operatorname{diag}(\eta_1, \eta_2) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_m(B_1) & -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) \\ -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) & \mu\lambda_m(B_2) \end{pmatrix}.$$

Полную производную функции (1.9) вдоль решения системы (1.1) с учетом обозначений (1.4) представим так:

$$Dv(x,y,\mu) = D_1(x,y,\mu) + D_2(x,y,\mu), \tag{1.10}$$

$$D_1(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\eta_1^2 B_1 A_{11} & 2\eta_1\eta_2 B_3 A_{22} \\ 2\eta_1\eta_2\mu B_3^T A_{11} & 2\eta_2^2 B_2 A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\eta_1^2 B_1 q_1 & 2\eta_1\eta_2 B_3 q_2 \\ 2\eta_1\eta_2\mu B_3^T q_1 & 2\eta_2^2 B_2 q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\sigma_1^0) \\ f_2(\sigma_2^0) \end{pmatrix},$$

$$D_2(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\eta_1\eta_2 B_3 A_{21} & 2\eta_1^2 B_1 A_{12} \\ 2\eta_2^2 B_2 A_{21} & 2\eta_1\eta_2\mu B_3^T A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2\eta_1^2 B_1 q_1 & 2\eta_1\eta_2 B_3 q_2 \\ 2\eta_1\eta_2\mu B_3^T q_1 & 2\eta_2^2 B_2 q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_1^0) \\ f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_2^0) \end{pmatrix}.$$

Чтобы оценить знак производной (1.10), преобразуем выражения $D_i(x,y,\mu)$ к виду

$$D_i(x,y,\mu) = -P_{i0} - P_{i1}, \qquad i = 1,2 \tag{1.11}$$

где

$$P_{10} = 2\eta_1^2\left(\sigma_1^0 - \frac{f_1(\sigma_1^0)}{k_1}\right) f_1(\sigma_1^0) + 2\eta_2^2\left(\sigma_2^0 - \frac{f_2(\sigma_2^0)}{k_2}\right) f_2(\sigma_2^0);$$

$$P_{20} = 2\eta_1^2\left(\sigma_1 - \frac{f_1(\sigma_1)}{k_1}\right) f_1(\sigma_1) + 2\eta_2^2\left(\sigma_2 - \frac{f_2(\sigma_2)}{k_2}\right) f_2(\sigma_2) + P_{10}.$$

Выражения $P_{11} = V^T B V$ и $P_{21} = V^T R V$ содержат матрицы B и R размером 3×3 со следующими элементами:

$$b_{11} = -\eta_1^2(B_1 A_{11} + A_{11}^T B_1); \qquad b_{21} = -2\eta_1\eta_2\mu B_3^T A_{11};$$

$$b_{12} = -2\eta_1\eta_2 B_3 A_{22}; \qquad b_{22} = -\eta_2^2(B_2 A_{22} + A_{22}^T B_2);$$

$$b_{13} = \left[-2\eta_1^2(B_1 q_1 + c_{11}), -2\eta_1\eta_2 B_3 q_2, 0, 0\right]; \qquad b_{23} = b_{23}^1 + b_{23}^2;$$

$$b_{23}^1 = \mu\left[-2\eta_1\eta_2 B_3^T q_1, 0, 0, 0\right]; \qquad b_{23}^2 = \left[0, -2\eta_1^2(B_2 q_2 + c_{22}), 0, 0\right];$$

$$b_{31} = [0]; \qquad b_{32} = [0]; \qquad b_{33} = 2\operatorname{diag}(\eta_1^2/k_1, \eta_2^2/k_2, 0, 0)$$

и

$$r_{11} = -\eta_1\eta_2(B_3 A_{21} + A_{21}^T B_3^T); \qquad r_{12} = -2\eta_1^2 B_1 A_{12};$$

$$r_{13} = \left[2\eta_1^2(B_1 q_1 - c_{11}), 2\eta_1\eta_2 B_3 q_2, -2\eta_1^2(B_1 q_1 + c_{11}), -2(\eta_1\eta_2 B_3 q_2 + \eta_2^2 c_{21})\right];$$

$$r_{21} - 2\eta_2^2 B_2 A_{21}; \qquad r_{22} = -\eta_1\eta_2\mu(B_3^T A_{12} + A_{12}^T B_3), \qquad r_{23} = r_{23}^1 + r_{23}^2;$$

$$r_{23}^1 = \mu\left[2\eta_1\eta_2 B_3^T q_1, 0, -2\eta_1\eta_2 B_3^T q_1, 0\right];$$
$$r_{23}^2 = \left[0, 2\eta_2^2(B_2q_2 - c_{22}), -2\eta_1^2 c_{12}, -2\eta_2^2(B_2q_2 + c_{22})\right]$$
$$r_{31} = [0]; \qquad r_{32} = [0]; \qquad r_{33} = \mathrm{diag}(\eta_1^2/k_1, \eta_2^2/k_2, \eta_1^2/k_1, \eta_2^2/k_2).$$

Здесь $V^T = (x^T, y^T, f^T)$, $f^T = (f_1(\sigma_1^0), f_2(\sigma_2^0), f_1(\sigma_1), f_2(\sigma_2))$. Из условий, налагаемых на нелинейности f_i, следует, что выражения P_{i0}, $i = 1, 2$, положительно полуопределенные.

Поэтому остается оценить снизу выражения P_{11} и P_{21}. Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$P_{11} \geq \varphi^T S_1 \varphi, \tag{1.12}$$

где $\varphi^T = (\|x\|, \|y\|, \|f\|)$ а матрица S_1 имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & -(\mu p_{21} + p_{12}) & -p_{13} \\ -(\mu p_{21} + p_{12}) & p_{22} & -(\mu p_{23}^1 + p_{23}^2) \\ -p_{13} & -(\mu p_{23}^1 + p_{23}^2) & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь p_{ii} — минимальные собственные значения матриц b_{ii}, $i = 1, 2, 3$; $p_{12}, p_{21}, p_{13}, p_{23}^1, p_{23}^2$ — нормы матриц $\frac{1}{2}b_{12}$, $\frac{1}{2\mu}b_{21}$, $\frac{1}{2}b_{13}$, $\frac{1}{2\mu}b_{23}^1$, $\frac{1}{2}b_{23}^2$ — соответственно.

Аналогично показывается, что для выражения P_{21} имеет место неравенство

$$P_{21} \geq \varphi^T S_2 \varphi, \tag{1.13}$$

в котором матрица S_2 выражается так

$$S_2 = \begin{pmatrix} \theta_{11} & -(\theta_{21} + \theta_{21}) & -\theta_{13} \\ -(\theta_{12} + \theta_{21}) & \mu\theta_{22} & -(\mu\theta_{23}^1 + \theta_{23}^2) \\ -\theta_{13} & -(\mu\theta_{23}^1 + \theta_{23}^2) & \theta_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь θ_{ii}, $i = 1, 2, 3$ — минимальные собственные числа матриц r_{11}, $\frac{1}{\mu}r_{22}$, r_{33}; $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{23}^1, \theta_{23}^2$; — нормы матриц $\frac{1}{2}r_{12}$, $\frac{1}{2}r_{13}$, $\frac{1}{2}r_{21}$, $\frac{1}{2\mu}r_{23}^1$, $\frac{1}{2}r_{23}^2$ соответственно.

Собирая оценки (1.11)–(1.13) для функции $Dv(x, y, \mu)$ определенной соотношением (1.10) имеем

$$Dv_M(x, y, \mu) \leq -P_{10} - P_{20} - \varphi^T S \varphi, \tag{1.14}$$

где $S = S_1 + S_2$ — 3×3 матрица с элементами $s_{ij} = s_{ji}$:

$$s_{11} = p_{11} + \theta_{11}, \quad s_{22} = p_{22} + \mu\theta_{22}, \quad s_{33} = p_{33} + \theta_{33},$$
$$s_{12} = -(\mu p_{21} + p_{12} + \theta_{12} + \theta_{21}), \quad s_{13} = -p_{13} - \theta_{13},$$
$$s_{23} = -\mu(p_{23}^1 + \theta_{23}^1).$$

Изложенное резюмируем следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть для сингулярно-возмущенной системы* (1.1) *построена матрица-функция* (1.6), *элементы которой удовлетворяют оценкам* (1.7) *и для верхней границы* Dv_M *производной* $Dv(x, y, \mu)$ *имеет место оценка* (1.14).

Тогда если матрицы A и S положительно определенные при любом $\mu \in]0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$, то состояние равновесия $(x^T, y^T)^T = 0$ системы (1.5) равномерно асимптотически устойчиво при $\mu \in]0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$.

Замечание 1. Величина μ_0 определяется из условий положительной определенности матриц A и S; если окажется, что $\mu_0 > 1$ то принимаем, что $\mu \in]0, 1]$.

Доказательство теоремы 1. Согласно результатам статей [10,15] на основе матрицы-функции (1.6) с помощью вектора $\eta \in \overset{\circ}{R}{}^2_+$ построим скалярную функцию (1.8). При выполнении оценки (1.7) для функции (1.8) выполняется оценка (1.9). Если матрица A — положительно-определенная при $\mu \in]0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$, то из оценки (1.9) следует, что функция $v(x, y, \mu)$ определенно-положительная при $\mu \in]0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$.

Так как, для верхней границы Dv_M производной $Dv(x, y, \mu)$ имеет место оценка (1.14). Отсюда из положительной определенности матрицы S $\mu \in [0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$ следует, что производная функции (1.8) $Dv(x, y, \mu)$ определенно-отрицательная при $\mu \in]0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$. Эти условия, как известно [4], достаточны для равномерной асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (1.1).

Случай Б. Рассматривется система [4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + q_1 f_1(\sigma_1), \qquad \sigma_1 = c_{11}^T x + c_{12}^T y; \\ \mu\dot{y} &= \mu A_{21}x + A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2), \quad \sigma_2 = \mu c_{12}^T x + c_{22}^T y. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь сохранены все обозначения и предположения, сделанные в системе (1.1): отличие состоит в том, что малый параметр μ входит в правую часть второго из уравнений системы (1.15). С помощью функции (1.6) нетрудно получить оценку

$$Dv(x, y, \mu) = -P_{10} - P_{20} - P_{11} - \widetilde{P}_{21}, \tag{1.16}$$

где P_{i0} и P_{11} те же выражения, что и в случае А. Выражение $\widetilde{P}_{21}$ имеет вид

$$\widetilde{P}_{21} = V^T \widetilde{R} V, \tag{1.17}$$

где $\widetilde{R}$ — 3×3 матрица с элементами

$$\begin{aligned} &\widetilde{r}_{11} = -\eta_1\eta_2\mu(B_3A_{21} - A_{21}^T B_3^T); \ \widetilde{r}_{12} = r_{12}; \\ &\widetilde{r}_{13} = \widetilde{r}_{13}^1 + \widetilde{r}_{13}^2, \quad \widetilde{r}_{13}^1 = \mu[0, 0, 0, -2\eta_2^2 C_{21}]; \\ &\widetilde{r}_{13}^2 = [2\eta_1^2(B_1q_1 - C_{11}), 2\eta_1\eta_2B_3q_2, -2\eta_1^2(B_1q_1 + C_{11}), -2\eta_1\eta_2B_3q_2]; \\ &\widetilde{r}_{21} = -2\eta_2^2\mu B_2A_{21}; \quad \widetilde{r}_{22} = r_{22}; \quad \widetilde{r}_{23} = r_{23}; \quad \widetilde{r}_{3i} = r_{3i}, \ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для выражения (1.17) имеет место оценка

$$\widetilde{P}_{21} \geq \varphi^T \widetilde{S}_2 \varphi, \tag{1.18}$$

где

$$\widetilde{S}_2 = \begin{pmatrix} \mu\theta_{11} & -(\mu\theta_{21} + \theta_{12}) & -(\mu\theta_{13}^1 + \theta_{13}^2) \\ -(\mu\theta_{21} + \theta_{12}) & \mu\theta_{22} & -(\mu\theta_{23}^1 + \theta_{23}^2) \\ -(\mu\theta_{13}^1 + \theta_{13}^2) & -(\mu\theta_{23}^1 + \theta_{23}^2) & \theta_{33} \end{pmatrix},$$

где θ_{13}^1 и θ_{13}^2 — нормы матриц $\frac{1}{2\mu}\widetilde{r}_{13}^1$, $\frac{1}{2}\widetilde{r}_{13}^2$ соответственно, а остальные θ_{ij}, $i,j=1,2,3$, те же величины, что и в матрице S_2.

Для верхей границы изменения Dv_M имеем оценку

$$Dv_M(x,y,\mu) \le -P_{10} - P_{20} - \varphi^T \widetilde{S}\varphi, \tag{1.19}$$

где $\widetilde{S} = S_1 + \widetilde{S}_2$.

Аналогично теореме 1, в терминах ограничений на матрицы A и $\widetilde{S}$ формулируются условия устойчивости.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для сингулярно-возмущенной системы* (1.15) *построена матрица-функция* (1.6), *элементы которй удовлетворяют оценкам* (1.7) *и для верхней границы* Dv_M *производной* $Dv(x,y,\mu)$ *имеет место оценка* (1.18).

Тогда, если матрицы A *и* $\widetilde{S}$ *положительно определенные при любом* $\mu \in]0,\mu_0]$ *и при* $\mu \to 0$, *то состояние равновесия* $(x^T, y^T)^T = 0$ *системы* (1.15) *равномерно асимптотически устойчиво при* $\mu \in]0,\mu_0]$ *и при* $\mu \to 0$.

Замечание 2. Величина μ_0 в случае Б определяется из условий положительной определенности матриц A и $\widetilde{S}$; если окажется, что $\mu_0 > 1$, то принимаем $\mu \in]0,1]$.

2. Пример. Пусть в системе вида (1.15)

$$\begin{gathered}
A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad C_{11} = \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}, \quad k_1 = 2 \\
A_{21} = \begin{pmatrix} 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0{,}001 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 0{,}001 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \\
A_{22} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad C_{22} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_2 = 1.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

В выражении матрицы-функции (1.6) элементы v_{ij} выберем в виде

$$\begin{gathered}
v_{11}(x) = x^T \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \quad v_{22}(y,\mu) = \mu y^T \operatorname{diag}[2,2] y, \\
v_{12}(x,y,\mu) = v_{21}(x,y,\mu) = \mu x^T \operatorname{diag}[0{,}01;\ 0{,}01] y.
\end{gathered}$$

Для них имеют место оценки

$$v_{11}(x) \ge 0{,}2\|x\|^2; \quad v_{22}(y,\mu) \ge 2\mu\|y\|^2; \quad v_{12}(x,y,\mu) \ge -0{,}01\mu\|x\|\,\|y\|.$$

При $\eta_i = 1$, $i = 1,2$, матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}01\mu \\ -0{,}01\mu & 2\mu \end{pmatrix}$ положительно определенная при $\mu \in]0,1]$.

Матрица $\widetilde{S}$ имеет вид

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0{,}4 - 0{,}00002\mu & -(0{,}026\mu + 0{,}45) & -(0{,}001\mu + 0{,}075) \\ -(0{,}026\mu + 0{,}45) & 12 - 0{,}02\mu & -(0{,}0024\mu + 0{,}69) \\ -(0{,}001\mu + 0{,}075) & -(0{,}0024\mu + 0{,}69) & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрица $\widetilde{S}$ положительно определенная при $\mu \in]0,1]$ и при $\mu \to 0$, т.к. величина $\mu_0 > 1$. На основе теоремы 2 заключаем об абсолютной устойчивости состояния равновесия $(x^T, y^T)^T = 0$ системы (1.15) с численными значениями (2.1) при $\mu \in]0,1]$ и при $\mu \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.: *Абсолютная устойчивость регулируемых систем*, Изд--во АН СССР, Москва 1963, 139 с.

[2] Гелиг А. Х.: *Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным равновесным состоянием*, Автоматика и телемеханика №2, **25** (1964), 153–160.

[3] Груйич Л. Т.: *Необходимые и достаточные условия типа Ляпунова, абсолютной устойчивости и гипотеза Айзермана*, Мат. физика, 1980, Вып. **28**, 7–20.

[4] Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.: *Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях*, Наукова думка, Киев 1984, 207 с.

[5] Климушев А. И., Красовский Н. Н.: *Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных*, Прикл. математика и механика **25**, №4 (1961), 680–690.

[6] Красовский Н. Н.: *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, Москва 1959, 211 с.

[7] Лихтарников А. Л., Якубович В. А.: *Абсолютная устойчивость нелинейных систем*; Резван В. *Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием*, Пер. с румынс., Наука, Москва 1983, 358 с.

[8] Лурье А. И., Постников В. Н.: *К теории устойчивости регулируемых систем*, Прикл. математика и механика **8**, №3 (1944), с. 246–248.

[9] Мартынюк А. А., Гутовски Р.: *Интегральные неравенства и устойчивость движения*, Наукова думка, Киев 1979, 272 с.

[10] Мартынюк А. А.: *О матрице-функции Ляпунова и устойчивость движений*, Докл. АН СССР **280**, №5 (1985), с. 1062–1066.

[11] Мартынюк А. А.: *Равномерная устойчивость сингулярно-возмущенной системы на основе матрицы-функции Ляпунова*, Докл. АН СССР **287**, №4 (1986), с. 786–789.

[12] Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г.: *Анализ устойчивости системы с быстрыми и медленными движениями*, Киев 1986, 19 с., деп. в ВИНИТИ 17.03.86; №1847–Б86.

[13] Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г.: *Абсолютная устойчивость сингулярно-возмущенной системы Лурье и матрица-функция Ляпунова*, Прикл. механика **23**, №9 (1987), с. 103–110.

[14] Попов В. М.: *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования*, Автоматика и телемеханика **22**, №8 (1961), с. 961–979.

[15] Djordjević M. Z.: *Stability analysis of interconnected systems with possibly unstable subsystems*, Systems & Control Letters, N3 (1983), p. 165–169.

[16] Grujić Lj. T.: *Vector Liapunov functions and singularly perturbed large-scale systems*, JACC, (1976), p. 408–416.

[17] Grujić Lj. T.: *Singular perturbations and large-scale systems*, Int. J. Control **29**, N1 (1979), p. 159–169.

[18] Martynyuk A. A.: *The Lyapunov matrix-function*, Nonlin. Anal. Theory, Methods and Appl. **8**, N10 (1984), p. 1223–1226.

[19] Martynyuk A. A.: *On application of the Lyapunov matrix-functions in the theory of stability*, ibid. **8**, N12 (1985), p. 1495–1501.

TO THE STABILITY THEORY OF SINGULARLY PERTURBED LURIE SYSTEMS

Sufficient uniform stability conditions are established for singularly perturbed Lurie system on the basis of Lyapunov's direct method where matrix function construction is used. The obtained conditions reduce the requirements to dynamical properties of degenerate systems and boundary layer under which uniform asymptotic stability takes place.

PRILOG TEORIJI STABILNOSTI SINGULARNO PERTURBOVANIH LURJEOVIH SISTEMA

U radu su dati dovoljni uslovi za uniformnu stabilnost za singularno perturbovane Lurjeove sisteme na osnovu direktnog metoda Ljapunova pri čemu je korišćena matrična konstrukcija. Dobijeni uslovi svode zahteve na dinamička svojstva degenerisanih sistema i graničnog sloja, kada važi asimptotska stabilnost.

Институт механики АН УССР
ул. Нестерова 3
252057, Киев–57
СССР