

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО МГД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Драгана Д. Николијевић

(Поступило 16. 04. 1988)

1. Введение

Течения вязкой электропроводной жидкости вблизи твердой поверхности любой формы в наличии действия перпендикулярного магнитного поля, входят в семейство современных проблем для которых сегодня существует, в научном и техническом развитии, большой интерес. В этом смысле, в докладе рассматривается плоский нестационарный магнитогидродинамический (МГД) пограничный слой в несжимаемой жидкости постоянной электропроводности. Магнитная индукция тоже постоянна.

Для расчета описаного МГД пограничного слоя можно применить метод [1, 2, 3, 4] „универсализации“ уравнений ламинарного пограничного слоя, имеющий ряд несомненных преимуществ по сравнению с другими приближенными методами. Численное интегрирование универсального уравнения выполняется один раз навсегда. Результаты этого интегрирования сами по себе интересны тем, что позволяют выявить различные тенденции в развитии нестационарного МГД пограничного слоя, а, кроме того, полученное семейство профилей можно использовать при решении конкретных задач.

2. Универсальное уравнение нестационарного МГД пограничного слоя

Дифференциальное уравнение плоского нестационарного ламинарного МГД пограничного слоя имеет следующий вид:

$$\psi_{ty} + \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = U_t + UU_x + \nu \psi_{yyy} + N(U - \psi_y) \quad (2.1)$$

с граничными условиями:

$$\psi = 0; \psi_y = 0 \text{ при } y = 0; \psi_y \rightarrow U(x, t) \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

$$\psi_y = u_0(t, y) \text{ при } x = x_0; \psi_y = u_1(x, t) \text{ при } t = t_0.$$

При этом мы использовали следующие обозначения: x, y — продольная и поперечная координаты в пограничном слое, t — время, U — скорость на внешней границе пограничного слоя, ψ — функция тока, ν — кинемати-

ческий коэффициент вязкости, $N = \sigma B^2 / \rho$ где σ — электропроводность, ρ — плотность жидкости а B — магнитная индукция. Индексы x, y обозначают частные производные по соответствующим переменным.

—Перейдем от переменных $x, y, t, \psi(x, y, t)$ к новым переменным $x, t, \eta, \Phi(x, t, \eta)$ положив в (2.1)

$$x = x; t = t; y = \frac{\delta(x, t)}{D_0} \eta; \psi(x, y, t) = \frac{U(x, t) \delta(x, t)}{D_0} \Phi(x, t, \eta). \quad (2.3)$$

Здесь $\delta(x, t)$ — некоторый характерный линейный масштаб поперечной координаты в пограничном слое; D_0 — нормирующая константа, которая будет в дальнейшем определена.

Тогда уравнение (2.1) принимает вид:

$$L \left\{ D_0^2; U_x z; \frac{U_t z}{U}; \frac{U z_x}{2}; \frac{z_t}{2}; Nz \right\} = z \Phi_{t\eta} + Uz [\Phi, \Phi_\eta]_{(\eta, x)} \quad (2.4)$$

в котором $z = \delta^2 / \nu$, $[\Phi, \Phi_\eta]_{(\eta, x)}$ представляет скобку Пуассона, т. е.

$$[\Phi, \Phi_\eta]_{(\eta, x)} = \Phi_\eta \Phi_{\eta x} - \Phi_{\eta\eta} \Phi_x, \quad (2.5)$$

а оператор L определяется выражением

$$L \{ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \lambda_5; \lambda_6 \} = \lambda_1 \Phi_{\eta\eta\eta} + \lambda_2 [1 - (\Phi_\eta)^2 + \Phi \Phi_{\eta\eta}] + \\ + (\lambda_3 + \lambda_6) (1 - \Phi_\eta) + \lambda_4 \Phi \Phi_{\eta\eta} + \lambda_5 \eta \Phi_{\eta\eta}. \quad (2.6)$$

Граничные условия (2.2) записываются в форме:

$$\Phi = 0; \Phi_\eta = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ \Phi_\eta \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Отметим, что граничные условия по переменным x и t , заключенные в последней строке равенств (2.2), используются лишь на последнем этапе решения задачи и при выводе универсального уравнения учитывать их не следует.

Предполагая аналитичность функции $U(x, t)$ и функции $N(x, t)$, введем системы параметров

$$f_{k,n} = U^{k-1} \frac{\partial^{k+n} U}{\partial x^k \partial t^n} z^{k+n}, \quad g_{k,n} = U^{k-1} \frac{\partial^{k-1+n} N}{\partial x^{k-1} \partial t^n} z^{k+n} \\ (k = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

Из выражениях (2.8) следует, что

$$f_{1,0} = U_x z; f_{0,1} = \frac{U_t}{U} z; g_{1,0} = Nz. \quad (2.9)$$

Параметры $f_{0,0}$ и $g_{0,0}$ исключаем из рассмотрения. При $n = 0$ параметры (2.8) принимают вид

$$f_k = U^{k-1} \frac{\partial^k U}{\partial x^k} z^k, \quad g_k = U^{k-1} \frac{\partial^{k-1} N}{\partial x^{k-1}} z^k \quad (2.10)$$

и совпадают с параметрами для случая стационарного МГД пограничного слоя [5].

Дифференцируя системы параметров (2.8) по x и t получаем соотношения которым удовлетворяют параметры

$$Uz(f_{k,n})_x = P_{k,n}(f_{k,n}) + (k+n)F^* f_{k,n} \equiv D_{k,n}(f_{k,n}; F^*), \quad (2.11)$$

$$z(f_{k,n})_t = Q_{k,n}(f_{k,n}) + (k+n)T^* f_{k,n} \equiv E_{k,n}(f_{k,n}; T^*), \quad (2.12)$$

$$Uz(g_{k,n})_x = X_{k,n}(g_{k,n}) + (k+n)F^* g_{k,n} \equiv R_{k,n}(g_{k,n}; F^*), \quad (2.13)$$

$$z(g_{k,n})_t = Y_{k,n}(g_{k,n}) + (k+n)T^* g_{k,n} \equiv S_{k,n}(g_{k,n}; T^*) \quad (2.14)$$

где

$$P_{k,n}(f_{k,n}) = (k-1)f_{1,0}f_{k,n} + f_{k+1,n}, \quad (2.15)$$

$$Q_{k,n}(f_{k,n}) = (k-1)f_{0,1}f_{k,n} + f_{k,n+1}, \quad (2.16)$$

$$X_{k,n}(g_{k,n}) = (k-1)f_{1,0}g_{k,n} + g_{k+1,n}, \quad (2.17)$$

$$Y_{k,n}(g_{k,n}) = (k-1)f_{0,1}g_{k,n} + g_{k,n+1}, \quad (2.18)$$

$$F^* = Uz_x, \quad T^* = z_t. \quad (2.19)$$

Используя соотношения (2.11)—(2.19), преобразуем уравнение (2.4) к виду:

$$\begin{aligned} L \left\{ D_0^2; f_{1,0}; f_{0,1}; \frac{1}{2} F^*; \frac{1}{2} T^*; g_{1,0} \right\} = \sum_{k,n=0}^{\infty} \{ E_{k,n}(f_{k,n}; T^*) \Phi_{\eta f_{k,n}} + \\ + D_{k,n}(f_{k,n}; F^*) [\Phi, \Phi_{\eta}]_{(\eta, f_{k,n})} + S_{k,n}(g_{k,n}; T^*) \Phi_{\eta g_{k,n}} + \\ + R_{k,n}(g_{k,n}; F^*) [\Phi, \Phi_{\eta}]_{(\eta, g_{k,n})} \}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнение (2.20) стало универсальным, необходимо функции T^* и F^* выразить через величины, зависящие явно только от параметров $f_{k,n}$ и $g_{k,n}$ т. е. должны существовать равенства

$$Uz_x = F^*(f_{k,n}; g_{k,n}), \quad z_t = T^*(f_{k,n}; g_{k,n}). \quad (2.21)$$

Функции F^* и T^* определяем с использованием уравнений импульсов и энергии для нестационарного МГД пограничного слоя которые можно записать как

$$(U \delta^*)_t + (U^2 \delta^{**})_x + U(U_x + N) \delta^* - \frac{\tau_w}{\rho} = 0 \quad (2.22)$$

и

$$U^2 \delta_t^* + (U^2 \delta^{**})_t + U^3 (\delta_1^{**})_x + 3U^2 U_x \delta_1^{**} + 2NU^2 \delta^{**} - 2\nu U^2 e = 0, \quad (2.23)$$

где мы использовали следующие обозначения:

$$\delta^*(x, t) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad (2.24)$$

$$\delta^{**}(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad (2.25)$$

$$\tau_w(x, t) = \mu u_y|_{y=0}, \quad (2.26)$$

$$\delta_1^{**}(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy, \quad (2.27)$$

$$e(x, t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{u_y}{U}\right)^2 dy. \quad (2.28)$$

Прежде определения функции F^* и T^* нужно каким-либо образом выбрать линейный масштаб $\delta(x, t)$, входящий в выражения (2.3). Выбираем линейный масштаб $\delta(x, t)$ так, чтобы удовлетворялись соотношения:

$$(U^2 \delta)_x = (U^2 \delta^{**})_x + (U \delta^*)_t, \quad (2.29)$$

и

$$(U^2 \delta)_t = (U^2 \delta^{**})_t + U^3 (\delta_1^{**})_x + 3 U^2 U_x \delta_1^{**} + 2 N U^2 \delta^{**} - 2 \nu U^2 e. \quad (2.30)$$

Тогда уравнения импульсов (2.22) и энергии (2.23) с учетом равенств (2.29) и (2.30) записываются в формах

$$(U^2 \delta)_x + U U_x \delta^* + N U \delta^* - \frac{\tau_w}{\rho} = 0 \quad (2.31)$$

и

$$U^2 \delta_t^* + (U^2 \delta)_t = 0 \quad (2.32)$$

соответственно.

Для определения функции F^* раскрываем частную производную по x в уравнении (2.31). Тогда уравнение (2.31), с учетом (2.26), примет вид:

$$2 U U_x \delta + U^2 \delta_x + U U_x \delta^* + N U \delta^* - \nu u_y|_{y=0} = 0. \quad (2.33)$$

Умножив обе части последнего равенства на величину $\delta/\nu U$, получим

$$(2 + H^*) U_x z + U z_x/2 + N z H^* - \zeta = 0, \quad (2.34)$$

где

$$H^* = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{D_0} \int_0^{\infty} (1 - \Phi_\eta) d\eta \quad (2.35)$$

и

$$\xi = \frac{\delta}{U} u_y|_{y=0} = D_0 \Phi_{\eta\eta}|_{\eta=0}. \quad (2.36)$$

На основе выражений (2.35) и (2.36) видно что H^* и ξ являются функциями только параметров $f_{k,n}$ и $g_{k,n}$ ($k=0, 1, 2, \dots; n=0, 1, 2, \dots$). Из (2.34), пользованием первого равенства (2.9) и первого равенства (2.19) находим что

$$F^*(f_{k,n}; g_{k,n}) = 2 [\xi - (2 + H^*)f_{1,0} - g_{1,0} H^*] \quad (2.37)$$

и что F^* также зависит только од параметров. Отметим, что полученное выражение, по форме, совпадает с аналогичным равенством для случая стационарного МГД пограничного слоя. Для $g_{1,0}=0$ из (2.37) получаем выражение которое получили О.Н. Бушмарин, Б.Я. Басин [6].

Раскрывая производные по t уравнение (2.32), с учетом (2.35), записываем в форме:

$$\frac{1}{2} z_t (1 + H^*) + 2f_{0,1} + \sum_{k,n=0}^{\infty} z [H_{f_{k,n}}^* (f_{k,n})_t + H_{g_{k,n}}^* (g_{k,n})_t] = 0. \quad (2.38)$$

Потом, пользуясь выражениями (1.12), (1.14) и (2.19), уравнение (2.38) приводит к следующему выражению для T^* :

$$T^*(f_{k,n}; g_{k,n}) = -2 \frac{2f_{0,1} + \sum_{k,n=0}^{\infty} [Q_{k,n}(f_{k,n}) H_{f_{k,n}}^* + Y_{k,n}(g_{k,n}) H_{g_{k,n}}^*]}{1 + H^* + 2 \sum_{k,n=0}^{\infty} (k+n)(f_{k,n} H_{f_{k,n}}^* + g_{k,n} H_{g_{k,n}}^*)} \quad (2.39)$$

Видно что величина $T^*(f_{k,n}; g_{k,n})$, является функцией только параметров $f_{k,n}; g_{k,n}$. Таким образом, доказанно существование равенств (2.21).

Имея теперь в виду существование равенств (2.21) видно что уравнение (2.20) представляет нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка в частных производных, обладающее свойством универсальности в том смысле, что оно имеет один и тот же вид для любых аналитических заданий распределений скорости $U(x, t)$ на внешней границе пограничного слоя и числа $N(x, t)$. Граничные условия также универсальны, т.е. они будут следующими:

$$\begin{aligned} \Phi &= 0; \Phi_\eta = 0 \text{ при } \eta = 0, \Phi_\eta \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty, \\ \Phi &= \Phi_0(\eta) \text{ при } f_{k,n} = 0, g_{k,n} = 0 \\ &(k=0, 1, 2, \dots; n=0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $\Phi_0(\eta)$ является решением Блязиуса для стационарного пограничного слоя на пластине.

Нормирующую константу D_0 выберем так, чтобы уравнение (2.20) в условиях (2.40) совпало с уравнением Блязиуса. Отсюда следует, что нормирующая константа D_0 должна быть принята равной $D_0=0.470$.

Уравнение (2.20) при граничных условиях (2.40) должно быть один раз численно проинтегрировано на ЭВЦМ, причем речь может идти лишь об „отрезке“ уравнения. В процессе интегрирования определяются профили безразмерных скоростей в поперечных сечениях пограничного слоя, коэффициент трения ζ , а также характеристические функции H^* , H^{**} , F^* и T^* в зависимости от параметров $f_{k,n}$; $g_{k,n}$.

Функция H^{**} определена в следующем виде

$$H^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{D_0} \int_0^{\infty} \Phi_{\eta} (1 - \Phi_{\eta}) d\eta, \quad (2.41)$$

и пользуется при решении конкретной задачи как и остальные характеристические функции H^* , F^* и T^* .

3. Локально трехпараметрическое решение универсального уравнения

Фактическое решение уравнения (1.20) требует ограничения числа независимых переменных. Это приводит к необходимости применения известного метода урезания, который заключается в приравнивании нулю переменных, начиная с некоторого индекса. Отметим, что в рассматриваемой задаче параметры $g_{k,n}$ кроме $g_{1,0}$ выпадают из уравнения в силу $\sigma = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ и неизменности магнитного поля. В силу уже сказанного уравнение (1.20) рассматриваем в локальном трехпараметрическом приближении по параметрам $f_{1,0}$; $\bar{f}_{0,1}$ и $g_{1,0}$. В этом варианте предполагаем, что все параметры, с исключением указанных равны нулю. Кроме того, считается равными нулю также производные по параметру $f_{0,1}$.

На основании этого локально трехпараметрическое представление уравнения (2.20) записывается в форме

$$L \left\{ D_0^2; f_{1,0}; \bar{f}_{0,1}; \frac{1}{2} F^{*(3)}; \frac{1}{2} T^{*(3)}; g_{1,0} \right\} = T^{*(3)} f_{1,0} \Phi_{\eta f_{1,0}}^{(3)} + \quad (3.1)$$

$$+ F^{*(3)} f_{1,0} [\Phi^{(3)}, \Phi_{\eta}^{(3)}]_{(\eta, f_{1,0})} + T^{*(3)} g_{1,0} \Phi_{\eta g_{1,0}}^{(3)} + F^{*(3)} g_{1,0} [\Phi^{(3)}, \Phi_{\eta}^{(3)}]_{(\eta, g_{1,0})},$$

где

$$F^{*(3)} = 2 [\zeta^{(3)} - (2 + H^{*(3)}) f_{1,0} - g_{1,0} H^{*(3)}] \quad (3.2)$$

и

$$T^{*(3)} = - \frac{4 f_{0,1}}{1 + H^* + 2 (f_{1,0} H_{f_{1,0}}^* + g_{1,0} H_{g_{1,0}}^*)}. \quad (3.3)$$

При этом граничные условия (1.39) принимают, в локально трехпараметрическом приближении, следующий вид

$$\Phi^{(3)} = 0; \Phi_{\eta}^{(3)} = 0 \text{ при } \eta = 0, \Phi_{\eta}^{(3)} \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

$$\Phi^{(3)} = \Phi_0(\eta) \text{ при } f_{1,0} = 0, \bar{f}_{0,1} = 0, g_{1,0} = 0,$$

где верхний индекс означает принадлежность к соответствующему ему приближению.

Для численного интегрирования уравнения (3.1) с граничными условиями (3.4) применяется известный в литературе метод „прогонки“ обоснованный на методе конечных разностей с неявной схемой при чем сами расчеты осуществлены на электронно-счетной машине HONEYWELL H6/53.

Основные результаты расчетов представлены в виде графиков на рисунках 1, 2, 3, 4 и 5.

Отметим, что зависимости ζ , H^* , и F^* при $\bar{f}_{0,1}=0$ соответствуют решению стационарной задачи в локально-трехпараметрическом приближении для $g_{1,0}=0.04$ а H^{**} для $g_{1,0}=0.06$. Из рассмотрения графиков следует, что параметр нестационарности $\bar{f}_{0,1}$, выражающий относительное локальное ускорение во внешнем потоке пограничного слоя, оказывает существенно влияние на распределение трения и особенно на положение точки отрыва в пограничном слое. С увеличением положительного ускорения величина трения растет, так возможность возникновения отрыва в диффузорной области уменьшается. Наоборот, с увеличением отрицательного ускорения (торможение) величина трения убывает, так отрицательное ускорение способствует появлению отрыва потока: по сравнению со стационарным движением отрыв происходит при меньшем абсолютном значении отрицательного параметра $\bar{f}_{0,1}$ т.е. в потоке меньшей диффузорности. Можно сказать что увеличение положительного ускорения вызывает расширение зоны безотрывного обтекания и, наоборот, увеличение отрицательного ускорения вызывает уменьшение той же зоны.

Величина F^* растет с увеличением положительного ускорения а убывает с увеличением отрицательного ускорения. Тоже видно, что величины T^* , H^* и H^{**} убывают с увеличением положительного ускорения а растут с увеличением отрицательного ускорения.

Из результатов, которые из-за объемности в докладе не приводим, видно, что увеличение магнитного параметра $g_{1,0}$ (усиление магнитного поля) вызывает расширение зоны безотрывного обтекания как и в случае стационарного МГД пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Я. Шкадов, Пограничный слой с градиентом давления в потоке сжимаемой жидкости, Известия Академии Наук СССР, ОТН, Механика и машиностроение № 2, 1963. 28—32.
- [2] Л. Г. Лойцянский, Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя, Акад. Наук СССР, Прикладная математика и механика, Том 29, выпуск 1, 1965. 70—87.
- [3] V. N. Saljnikov, A contribution to universal solutions of the boundary layer theory, Teorija i primenjena mehanika 4, 1978. 139—163.
- [4] А. Н. Попков, Параметрические уравнения ламинарного пограничного слоя и методы расчета, основанные на их решениях, Изв. высших учебных заведений, Авиационная техника, № 4, 1979, 63—69.
- [5] Z. B. Boričić, Analiza jednog modela MHD graničnog sloja, Zbornik radova I, II. Jugoslovenski aerokosmonotički kongres, Zagreb 1975.
- [6] О. Н. Бушмарин, Б. Я. Басин, Параметрический метод расчета ламинарного нестационарного пограничного слоя, ИНж. — физический журнал, Том XXII, № 2, 1972, 282—292.

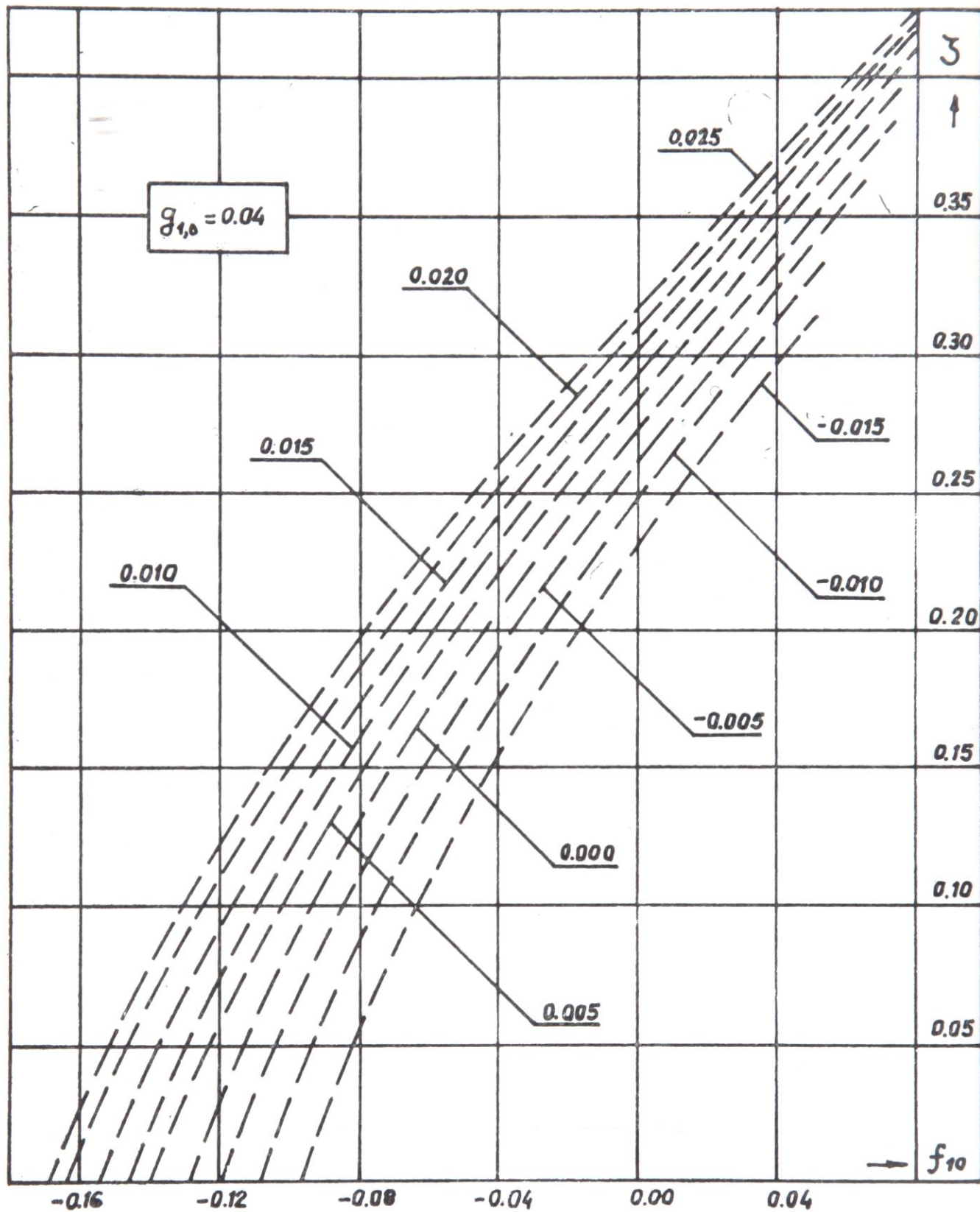


Рис. 1

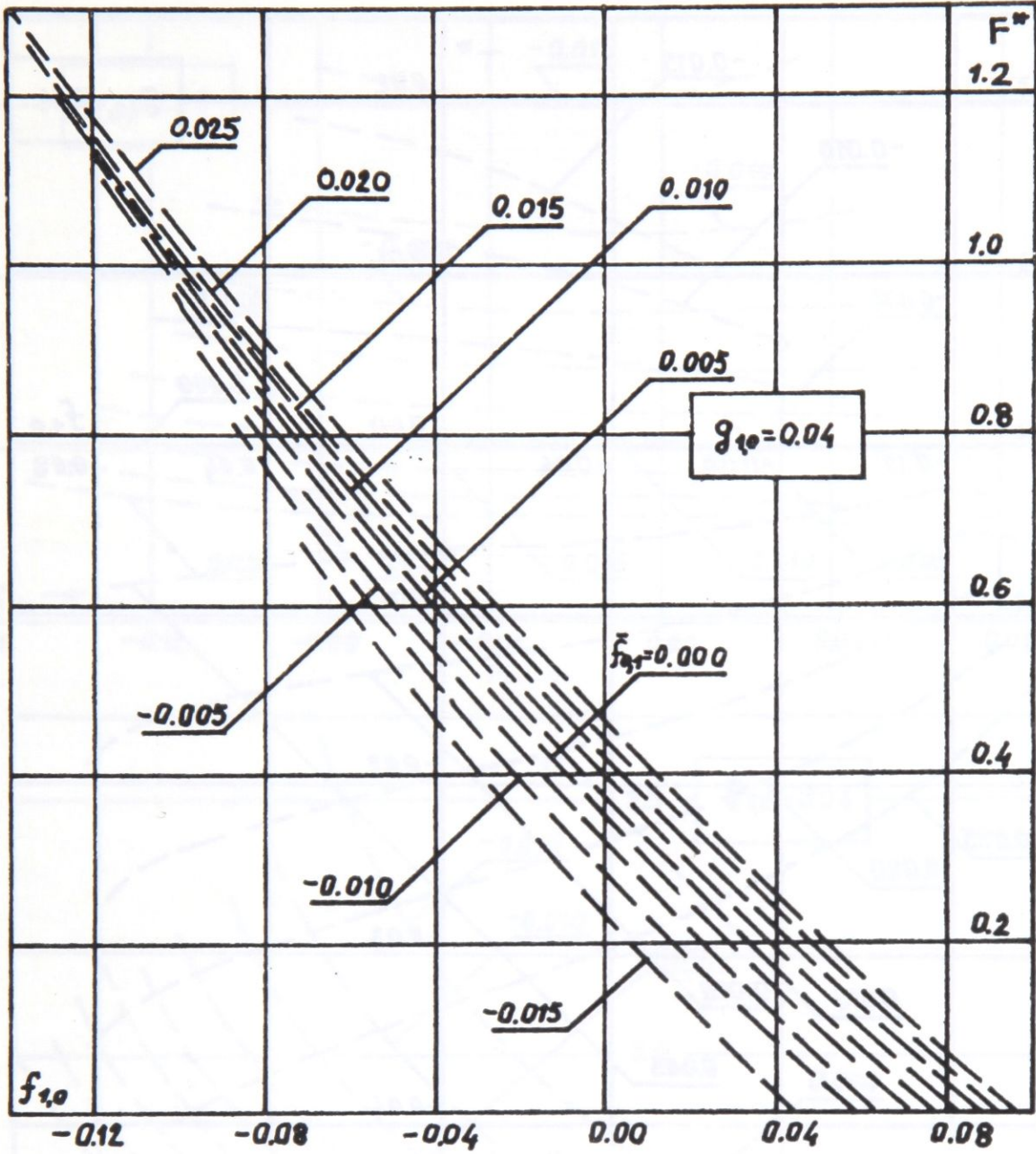


Рис. 2

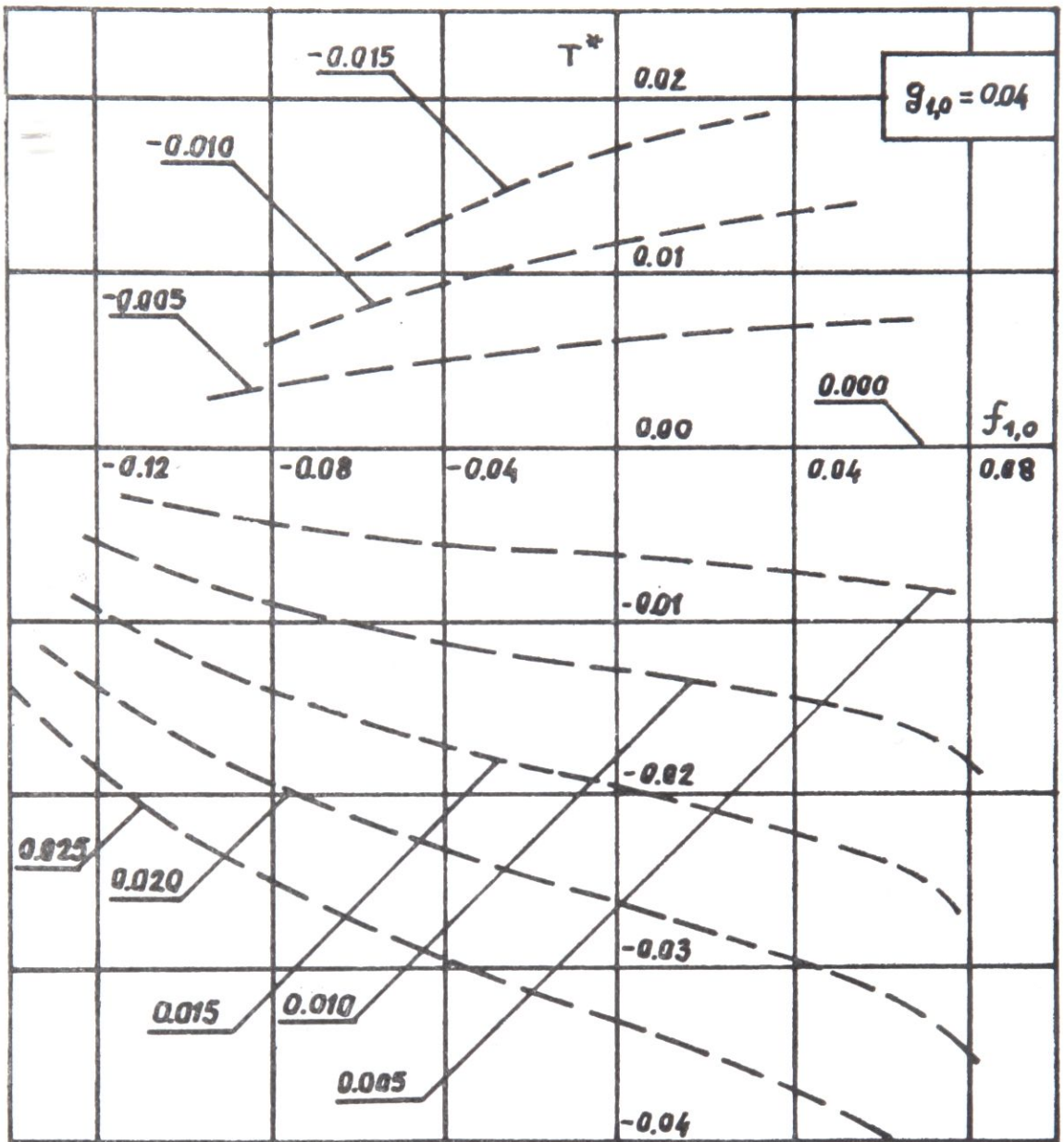


Рис. 3

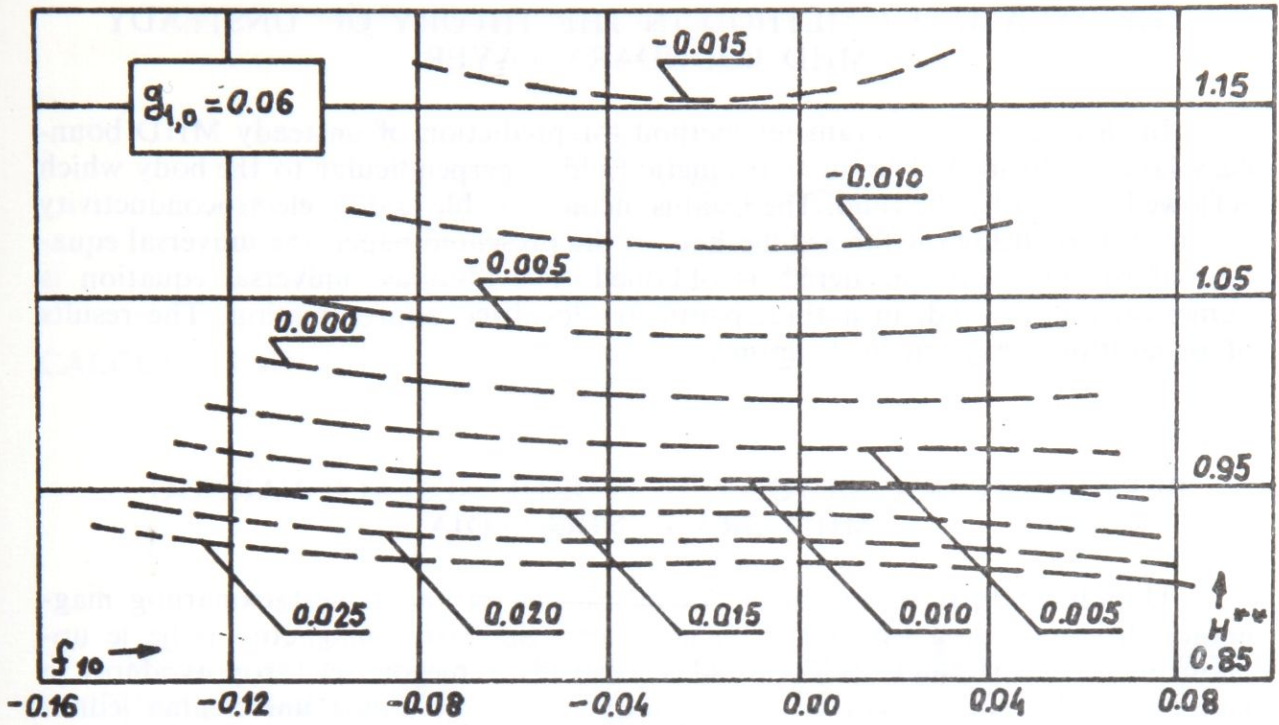


Рис. 4

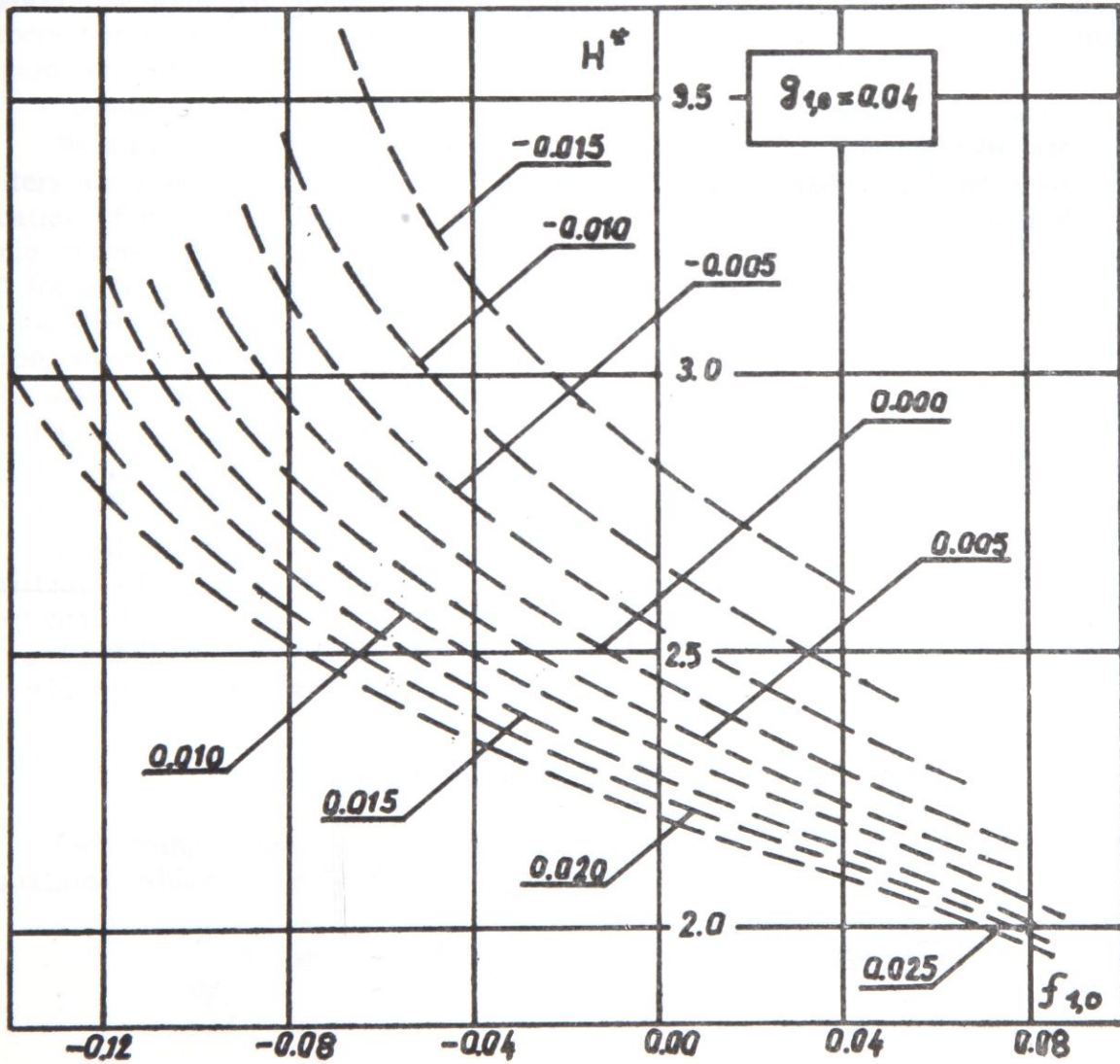


Рис. 5

THE PARAMETER METHOD IN THE THEORY OF UNSTEADY MHD BOUNDARY LAYER

In this paper, the parameter method for prediction of unsteady MHD boundary layer, is formed. The outer magnetic field is perpendicular to the body which is flowed around by the fluid. The fluid is incompressible and its electroconductivity is constant. By using the formed method, in the presented paper, the universal equation of the problem considered is obtained. The obtained universal equation is numerically integrated, in a three-parameter localized approximation. The results of integration are given in diagrams.

PARAMETARSKA METODA U TEORIJI NESTACIONARNOG MHD GRANIČNOG SLOJA

U radu se formira parametarska metoda za proračun nestacionarnog magnetnohidrodinamičkog (MHD) graničnog sloja. Spoljašnje magnetno polje je upravno na telo koje fluid optiče. Fluid je nestišljiv a njegova elektroprovodnost je konstantna. U radu se, korišćenjem formirane metode, dobija univerzalna jednačina posmatranog problema. Dobijena univerzalna jednačina se u troparametarskom lokalizovanom približenju numerički integrirali. Rezultati integracije daju se u obliku dijagrama.

Dragiša D. Nikodijević
Mašinski fakultet,
18000 Niš, Beogradska br. 14.
Yugoslavia