TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 14, pp 73—83, 1988, UDK 531.36

О ПРИМЕНЕНИИ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. А. Мартынюк

(Поступила 28. 10. 1987.)

1. Введение.

В 1979 г. было дано [5] описание биградуированной системы функций, названной матрицей-функцией Ляпунова (МФЛ). В книге [1] сформулированы некоторые утверждения принципа сравнения с МФЛ и получены достаточные условия устойчивости.

2. Что такое матрица-функция Ляпунова?

Обозначения и определения. Пусть R^n вещественное евклидово пространство и пусть $\|\cdot\|$ обозначает норму в R^n. Обозначим $B(b)=\{x; x\in R^n: :\|x\|\leqslant b\}$ и $D=[t_0, t_0+a]\times B(b)$, где $t_0\in T_i$, $T_i\subseteq R$, $T_0=\{t: t_0\leqslant t<\infty\}$, $a, b>0$, R_+ — неотрицательная вещественная полуось, $N\subset R^n$ — открытое связное множество в R^n.

Рассматриваются уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \qquad f(t, 0)=0, \tag{2.1}$$

где $x\in R^n$, $f\in C(D, R^n)$.

Предположим, что решение $\chi(t; t_0, x_0)$ системы (2.1) непрерывно при всех $t\in T_0$ и $\chi(t_0; t_0, x_0)=x_0$.

Матрица-функция Ляпунова. С системой уравнений (2.1) свяжем биградуированную систему функций

$$\mathfrak{Y}(t, x)=[u_{ij}(t, x)], \qquad i, j\in[1, m],\ m>1 \tag{2.2}$$

элементы которой непрерывны и локально липшицевы по x в произведении $T_\tau\times N$, $\mathfrak{Y}: T_\tau\times N\to R^{m\times m}$, $T_\tau=\{t: \tau\leqslant t<+\infty\}$, $\tau\in R$.

Полные производные матрицы-функции (2.2) в силу системы (2.1) определим выражениями

$$D^+ \mathfrak{Y}(t, x) = [D^+ u_{ij}(t, x)], \quad i, j \in [1, m], \tag{2.3}$$

где

$$D^+ u_{ij}(t, x) = \lim\sup \left\{ \frac{u_{ij}[t+\theta, x+\theta f(t, x)] - u_{ij}(t, x)}{\theta}, \ \theta \to 0^+ \right\}$$

и

$$D_+ \mathfrak{Y}(t, x) = [D_+ u_{ij}(t, x)], \quad i, j \in [1, m], \tag{2.4}$$

где

$$D_+ u_{ij}(t, x) = \lim\inf \left\{ \frac{u_{ij}[t+\theta, x+\theta f(t, x)] - u_{ij}(t, x)}{\theta}, \ \theta \to 0^+ \right\}.$$

Символом $D^* \mathfrak{Y}(t, x)$ обозначается возможность равносильно использования выражений (2.3) и (2.4).

Определение 1. Биградуированная система функций (2.2) является матрицей-функцией Ляпунова для системы (2.1), если:

а) функция $\mathfrak{Y}(t, x)$ — знакоопределенна;

б) одна из функций $D^+ \mathfrak{Y}(t, x)$, $D_+ \mathfrak{Y}(t, x)$ полуопределенна, знака противоположного $\mathfrak{Y}(t, x)$ т. е. матрица-функция (2.2) и ее производные Дини (2.3), (2.4) разрешают задачу об устойчивости состояния $x=0$ системы (2.1).

Замечание 1. Если $\mathfrak{Y}(t, x) > 0$, то, как замечено в [9] элементы $u_{ii}(t, x)$ положительно-определенные функции $\forall i \in [1, m]$ в то время как $u_{ij}(t, x)$ $\forall (i \neq j) \in [1, m]$ могут таковыми не являться.

Другое определение знакоопределенности МФ основано на рассмотрении, функции „максимум“: $\overline{\mathfrak{Y}}(t, x) = \max [u_{ij}(t, x)]$ $\forall (i, j) \in [1, m]$ и $\forall (t, x) \in T_\tau \times N$ (см. [2, 12]) и, соотвественно, производных

$$D^+ \mathfrak{Y}(t, x) = \lim_{\theta \to 0+} \sup \frac{1}{\theta} \{\mathfrak{Y}(t+\theta, x+\theta f) - U \overline{\mathfrak{Y}}(t, x)\}; \tag{2.5}$$

$$D_+ \mathfrak{Y}(t, x) = \lim_{\theta \to 0+} \inf \frac{1}{\theta} \{\mathfrak{Y}(t+\theta, x+\theta f) - U \overline{\mathfrak{Y}}(t, x)\}, \tag{2.6}$$

где $U - m \times m$ — матрица с элементами $u_{ij} = 1$ $\forall (i, j) \in [1, m]$.

Замечание 2. Как известно, прямой метод Ляпунова исследования устойчивости состояния равновесия системы (2.1) опирается на скалярную функцию $V(t, x)$ со свойством нормы, т.е. в системе функций (2.2) следует положить $i = j = 1$ и взять $V = u_{11}(t, x)$, после чего провести соответствующие вычисления.

Если система (2.1) декомпозирована к ряду подсистем

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s) + g_s(t, x), \tag{2.7}$$

где $x_s \in R^{n_s}$, $f_s: T_\tau \times R^{n_s} \to R^{n_s}$, $f_s(t, 0) = 0$, $g_s: T_\tau \times R^n \to R^{n_s}$, $g(t, 0) = 0$ или наоборот, некоторая совокупность систем уравнений (2.1) объединены в систему вида (2.7), привлекается векторная функция, например, $V(t, x) = \mathrm{diag}\,[u_{ii}(t, x)]$. В этом случае основным источником информации о динамических свойствах взаимосвязанной подсистемы являлась свободная подсистема, соответствующая (2.7), т.е. уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s), \qquad s \in [1, m]. \tag{2.8}$$

Ограничениями метода векторной функции Ляпунова является: во-первых, ее компоненты строятся, как правило, на основе подсистем (2.8) а не взаимодействующей системы из совокупности (2.7); во-вторых свойство квазимонотонности [7] возникающей при этом системы сравнения, которое не является необходимым для устойчивости. Наконец, общей проблемой как для скалярного, так и векторного подхода является отсутствие алгоритма построения подходящей функции Ляпунова.

В этих условиях матрица-функция призвана расширить класс допустимых компонент для построения скалярной функции, разрешающей задачу об устойчивости и обойти проблему квазимонотнонности при исследовании систем вида (2.7).

3. Прямой метод Ляпунова на основе матриц-функций.

Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(0) = 0, \tag{3.1}$$

где $f: N \to R^n$, $f \in C(N, R^n)$.

Согласно Ла-Саллю [11] приведем следующие определения.

Определение 2. Компактное множество $H \subset N$ называется устойчивым, если для заданной окрестности U из H существует окрестность W из H такая, что из того, что $x \in W$ следует $\chi(t, x) \in U$ при всех $t \geqslant 0$.

Определение 3. Компактное множество $H \subset N$ является аттрактором (притягивающим), если существует окрестность U в H такая, что из того, что $x \in U$ следует $\chi(t, x) \to H$ при $t \to \infty$.

Если $\chi(t, x) \to H$ для любого $x \in N$, тогда H называется глобальным аттрактором.

Если H устойчиво и притягивающее, тогда оно асимптотически устойчиво.

Множество H называется глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и глобально притятивающее.

Определение 4. Компактное множество $H \subset N$ неустойчиво, если не выполняются условия определения 2. Если H неустойчиво и непритягивающее, тогда H строго неустойчиво.

Определение 5. Множество $H \subset R^n$ называется положительно (отрицательно) инвариантным, если из того, что $x \in H \cap N$ следует $\chi(t, x) \in H$ при всех $t \in [0, \omega(x))$ $(t \in [\alpha(x), 0])$ $-\infty \leqslant \alpha < \omega \leqslant +\infty$ — слабо инвариантно, если оно положительно и отрицательно инвариантно, если дополнительно $I(x) = (\infty, +\infty)$ — максимальный интервал определения решения $\chi(t, x)$ для каждого $x \in H \cap N$, тогда H — инвариантное множество.

Обозначим $R(H)$ область притяжения множества H в N если для всех $x \in N$ имеет место $\chi(t, x) \to H$ при $t \to \infty$.

Предположение 1. Для системы (2.7) существует $\mathfrak{Y}(x): N \to R^{m \times m}$ и некоторое подмножество $G \subset N$, на котором:

а) $\mathfrak{Y}(x)$ непрерывна и $D^+ \mathfrak{Y}(x) \leqslant 0$ при всех $x \in G$;
б) функция $\mathfrak{Y}(x)$ постоянна на границе $M^0 \subset G$.

Пусть

$$E = \{x: \ D^+ \mathfrak{Y}(x) = 0, \quad x \in \overline{G} \cap N\}$$

и M — наибольшее инвариантное множество в E, M^* — наибольшее слабо инвариантное множество в E и M^+ — наибольшее положительно инвариантное множество в E.

Теорема 3.1. Пусть G положительно инвариантное открытое множество в N, обладающее свойством: каждое решение $\chi(t, x)$ системы (2.7), начинающееся на G ограничено и не имеет положительных предельных на границе G.

Если:

1) выполняются условия предположения 1а) на G и

 а) $'M^0 = \overline{M \cap G} \subset G$;

 б) $'M^0$ — компактно;

2) выполняются все условия предположения 1 и а), б).

Тогда 1) множество M^0 — является аттрактором и $G \subset R(M^0)$;
 2) множество M^0 — асимптотически устойчиво.

Замечание 3. Ла-Салль [11] сформулировал теорему 3.1 для случая скалярной функции Ляпунова.

Теорема 3.2. Пусть $y \in N$ состояние равновесия системы (1.7) содержится в замыкании открытого множества $U \subset N$. Пусть D окрестность y. Если выполняются условия предположения 1а) на $G = U \cap D$ или пустое, или содржит точку y; $\mathfrak{Y}(y) = 0$ и $\mathfrak{Y}(x) = 0$ на части границы G внутри D и $\mathfrak{Y}(x) < 0$ при $x \in G$, $x \neq y$.

Тогда состояние равновесия y системы (2.7) неустойчиво.

4. Переход от МФЛ к скалярной функции Ляпунова (СФЛ) и построение критериев устойчивости

4.1. Общие утверждения. Пусть каким-либо способом для системы (2.1) построена биградуированная система функций (2.2). Построим скалярную функцию (см. [2,9,10,12,13]).

$$v(t, x) = \eta^T \mathfrak{Y}(t, x) \eta, \quad \eta \in \mathring{R}^m_+ \tag{4.1}$$

и под производной функции (4.1) в силу системы (2.1) будем понимать выражение

$$D^* v(t, x) = \eta^T D^* \mathfrak{Y}(t, x) \eta, \tag{4.2}$$

где $D^* \mathfrak{Y}(t, x)$ — какая-либо производная Дини функции $\mathfrak{Y}(t, x)$ вычисляемая покомпонентно для элементов $v_{ij}(t, x)$ $\forall (i, j) \in [1, m]$.

Функция (4.1) и ее производная (4.2) позволяют сформулировать новый вариант теорем 5—13 из раздела 3.2.4 книги [1]. Приведем лишь две из них.

Теорема 4.1. Пусть:

1) вектор-функция f в системе (2.1) непрерывна на $R \times N$ (на $T_\tau \times N$);

2) существует инвариантная во времени окрестность точки $x=0$;

3) существует биградуированная система функций (2.2) и вектор $\eta \in R^m$ такие, что:

а) функция (4.1) убывающая положительно определенная на N (на $T_\tau \times N$);

б) функция $D^* v(t, x)$ отрицательная полуопределенная при всех $(t, x) \in R \times N$ $(\forall (t, x) \in T_\tau \times N)$. Тогда состояние равновесия $x=0$ системы (2.1) равномерно устойчиво (на T_τ).

Теорема 4.2. Пусть:

1) выполняются условия 1); 3) теоремы 4. 1 и

а) функция (4.1) радиально неограниченная, убывающая, определенно положительная в целом (на T_τ);

б) существует положительно определенная в целом скалярная функция $\psi(x)$ такая, что

$$D^* v(t, x) = \eta^T D^* \mathfrak{Y}(t, x) \eta \leqslant -\psi(x)$$

$$\forall (t, x) \in R \times R^n \quad (\forall (t, x) \in T_\tau \times R^n).$$

Тогда состояние $x=0$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

4.2. Декомпозиция второго уровня и матрица-функция. Наряду с декомпозицией системы (2.1) и подсистемами (2.7)—(2.8), которую будем называть декомпозицией первого уровня будем рассматривать декомпозицию второго уровня, заключающуюся в следующем. Пусть система (2.1) такая, что можно выделить (i, j) — пары взаимодействующих подсистем

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{ij}(t, x_i, x_j) + g_{ij}(t, x), \tag{4.3}$$

$$\frac{dx_j}{dt} = f_{ji}(t, x_j, x_i) + g_{ji}(t, x), \quad (i, j) \in [1, m].$$

Пусть $\quad x_{ij}^* = (x_i^T, y_j^T)^T, \quad f_{ij}^*(t, x_{ij}^*) = (f_{ij}^T, f_{ji}^T)^T,$

$$g_{ij}^*(t, x) = (g_{ij}^T, g_{ji}^T)^T, \quad x_{ij}^* \in R^{n_i} \times R^{n_j},$$

$$f_{ij}^*: T_0 \times R^{n_i} \times R^{n_j} \to R^{n_i} \times R^{n_j}; \quad g_{ij}^*: T_0 \times R^n \to R^{n_i} \times R^{n_j}, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n.$$

При этом систему (4.3) перепишем в виде

$$\frac{dx_{ij}^*}{dt} = f_{ij}^*(t, x_{ij}^*) + g_{ij}^*(t, x). \qquad (4.4)$$

Пары (i, j) взаимосвязанных подсистем образованы парами независимых подсистем

$$FS_{ij}: \frac{dx_{ij}^*}{dt} = f_{ij}^*(t, x_{ij}^*) \qquad (4.5)$$

объединенных в КМС (i, j) — парой функций связи

$$IC_{ij}: g_{ij}^* = g_{ij}^*(t, x_1, \ldots, x_m) \qquad (4.6)$$

Замечание 5. При декомпозиции второго уровня могут реализоваться следующие ситуации:

а) существуют подсистемы p и q для которых в явном виде нельзя выделить (p, q) независимую пару;

б) для заданной (i,j) пары функции связи (4.6)

$$\tilde{I}C_{ij}: g_{ij}^* = g_{ij}^*(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m) \qquad (4.7)$$

не содержат векторов $x_i \in R^{n_i}$, $x_j \in R^{n_j}$. При этом декомпозицию КМС (2.1) к виду (4.5), (4.7) будем называть полной декомпозицией второго уровня.

В контексте описанных форм декомпозиции злементы $v_{ij}(t, x)$ матрицы-функции (2.2) строятся так:

1. На основе независимых подсистем, полученных при декомпозиции первого уровня вычисляются элементы $u_{ii}(t, x_i): T_0 \times R^{n_i} \to R$, $u_{ii} \in c(T_0 \times R^{n_i})$.

2. На основе независимых (i, j) пар (4.5) подсистем, полученных при декомпозиции второго уровня вычисляются элементы

$$v_{ij}(t, x_{ij}^*): T_0 \times R^{n_i} \times R^{n_j} \to R, \text{ причем}$$

$$v_{ij} = v_{ji} \quad \forall (i \neq j) \in [1, m].$$

Замечание 6. Если система (2.1) такова, что декомпозиция второго уровня не возможна, то будем полагать, что $v_{ij}(t, x_{ij}^*) = v_{ji}(t, x_{ji}^*) \equiv 0$, $(i, j) \in [1, m]$,

Фактическое построение критериев устойчивости состояния равновесия $x=0$ системи(2.1) на основе функций (4.1) и (4.2) сводится к проверке условий положительной полуопределенности функции (4.1) и отрицательной (полу)определенности ее производной (4.2). Проще всего это достигается построением оценки для функции $v(t, x)$

$$\varphi^T A \varphi \leqslant v(t, x) \leqslant \psi^T B \psi, \qquad (4.8)$$

где A, $B - m \times m$ матрицы, с постоянными элементами, $\varphi = \varphi(\cdot): R^n \to R_+$ — вектор-функция с компонентами $\varphi_i(\cdot) \in K(KR)$ класу Хана) и ее производной

$$w^T d_w \leqslant D^* v(t, x) \leqslant u^T C u, \qquad (4.9)$$

где D, C — матрицы $m \times m$ с постояннйми элементами, u, w — аналогичны φ, ψ.

Оценочные формы $\varphi^T A \varphi, \ldots, u^T C u$ определены в конусе R_+^m и поэтому их знакоопределенность условная (см. [8]).

Ясно, что эффективность критериев зависит от искусства исследователя в построении оценок (4.8) и (4.9).

Рассмотрим некоторые приложения данного подхода.

5. Приложения

5.1. Устойчивость в произведении пространств. Рассмотрим известную задачу об устойчивости в произведении пространств, которая связана с рассмотрением уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(t, y) + Y^*(t, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= Z(t, z) + Z^*(t, y, z), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $y \in R^p$, $z \in R^q$, $Y: T_\tau \times R^p \to R^p$, $Y^*: T_\tau \times R^p \times R^q \to R^p$, $Z: T_\tau \times R^q \to R^q$, $Z^*: T_\tau \times R^p \times R^q \to R^q$, кроме того функции $Y(t, y)$, $Z(t, z)$, $Y^*(t, y, z)$, $Z^*(t, y, z)$ непрерывны и локально липшицевы по y, z соответственно в областях $N_y \subset R^p$, $N_z \subset R^q$ соответственно. Наряду с системой (5.1) будем рассматривать укороченную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(t, y); \\ \frac{dz}{dt} &= Z(t, z), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $Y(t, y)$ и $Z(t, z)$ те же самые функции, что и в системе (5.1).

Учитывая результаты работ [2, 9, 10] введем некоторые предположения.

Предположение 1. Существуют инвариантные во времени окрестности $N_y \subseteq R^p$ и $N_z \subseteq R^q$ состояний равновесия $y=0$ $z=0$ в которых элементы матрицы-функции

$$\mathfrak{Y}(t, y, z) = [v_{ij}(t, \cdot)], \quad i, j \in [1, 2]$$

удовлетворяют оценкам, характерным для квадратичных форм

$$\begin{gathered} C_{11} \|y\|^2 \leqslant v_{11}(t, y) \ \forall (t, y) \in T_\tau \times N_y; \\ C_{22} \|z\|^2 \leqslant v_{22}(t, z) \ \forall (t, z) \in T_\tau \times N_z; \\ C_{12} \|y\| \, \|z\| \leqslant v_{12}(t, y, z) \ \forall (t, y, z) \in T_\tau \times N_y \times N_z \\ v_{12}(t, y, z) = v_{21}(t, y, z) \ \forall (t, y, z) \in T_\tau \times N_y \times N_z, \end{gathered}$$

где $C_{11} > 0$, $C_{22} > 0$, C_{12} — постоянные, $v_{11}(t, 0) = v_{22}(t, 0) = v_{12}(t, 0, 0) \ \forall t \in T_\tau$.

Предположение 2. Существуют постоянные p_{ij}, $i=1, 2$; $j=1, 2, \ldots, 8$ такие, что $\forall (t, x, y) \in T_\tau \times N_y \times N_z$

$$D_t^+ v_{11} + (D_y^+ v_{11})^T Y \leqslant p_{11} \| y \|^2;$$

$$(D_y^+ v_{11})^T Y^* \leqslant p_{12} \| y \|^2 + p_{13} \| y \| \; \| z \|;$$

$$D_t^+ v_{22} + (D_z^+ v_{22})^T z \leqslant p_{21} \| z \|^2, \;\; (D_z^+ v_{22})^T Z^* \leqslant p_{22} \| z \|^2 + p_{23} \| y \| \; \| z \|,$$

$$D_t^+ v_{12} + (D_y^+ v_{12})^T Y \leqslant p_{14} \| y \|^2 + p_{15} \| y \| \; \| z \|;$$

$$(D_y^+ v_{12})^T y^* \leqslant p_{16} \| y \|^2 + p_{17} \| y \| \; \| z \| + p_{18} \| z \|^2;$$

$$D_t^+ v_{12} + (D_z^+ v_{12})^T z \leqslant p_{24} \| z \|^2 + p_{25} \| y \| \; \| z \|;$$

$$(D_z^+ v_{12})^T z^* \leqslant p_{26} \| y \|^2 + p_{27} \| y \| \; \| z \| + p_{28} \| z \|^2.$$

Лемма 5.1. Функция $v(t, y, z) = \eta^T \mathfrak{Y}(t, y, z)\eta$, $\eta \in \mathring{R}_+^2$ определенно положительная если матрица $C=[C_{sr}]$, s, $r=1, 2$, $C_{12}=C_{21}$ $\eta_i > 0$, $i=1, 2$ условно определенно положительная.

Доказательство. Из предположения I следует оценка

$$u^T A u \leqslant v(t, y, z),$$

$$\forall (t, y, z) \in T_\tau \times N_x \times N_y$$

где

$$u^T = (\| y \|, \; \| z \|), \;\; A = H^T C H, \;\; H = \mathrm{diag}\; (\eta_1, \eta_2).$$

Лемма 5.2. функция $D^+ v(t, y, z) = \eta^T D^+ \mathfrak{Y}(t, y, z)\eta$, $\eta \in \mathring{R}_T^2$, $\eta_i > 0$ определенно отрицательная, если матрица $D=[\sigma_{sr}]$, s, $r=1, 2$

$$\sigma_{11} = \eta_1^2 (p_{11} + p_{12}) + 2\eta_1 \eta_2 (p_{14} + P_{16} + p_{26});$$

$$\sigma_{22} = \eta_2^2 (p_{21} + p_{22}) + 2\eta_1 \eta_2 (p_{18} + p_{24} + p_{28});$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} (\eta_1^2 p_{13} + p_{23} \eta_2^2) + \eta_1 \eta_2 (p_{15} + p_{25} + p_{17} + p_{27})$$

условно определенно отрицательная.

Доказательство. При выполнении условий предположения 2 имеем оценку

$$D^+ v(t, y, z) \leqslant u^T D u \; \forall (t, y, z) \in T_\tau \times N_y \times N_z$$

из которой следует утверждение леммы 2, учитывая, что форма $u^T Du$ определена в конусе R_+^2.

Теорема 5.1. Пусть:

1) выполняются условия предположений 1, 2;

2) матрица **C** условно определенно положительная;

3) матрица **D** условно определенно отрицательная.

Тогда состояние равновесия $y=z=0$ системы (4.3) асимптотически устойчиво.

Утверждение теоремы 5.1 следует из лемм 1, 2 и теоремы 4.2.

Замечание 7. Как следует из теоремы 5.1. для асимптотической устойчивости системи (5.1) не требуется квази-устойчивость подсистем (4.4), что предполагалось ранее в работах К. Персидского (1933) и многрaфии С. С. Лефшеца (1961).

5.2. Абсолютная устойчивость сингулярно-возмущенной системы Лурье. Рассматриваетсяавтономнаясингулярно-возмущеннаясистема Лурье вида [1, 6]

$$\frac{dx}{dt} = A_{11}x + A_{12}y + q_1 f_1(\sigma_1), \ \sigma_1 = C_{11}^T x + C_{12}^T y, \tag{5.3а}$$

$$\mu\frac{dy}{dt} = A_{21}x + A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2), \ \sigma_2 = C_{21}^T x + C_{22}^T y, \tag{5.3б}$$

где $x \in N_x \subseteq R^n$, $y \in N_y \subseteq R^m$, $\mu \in]0, 1]$ — малый параметр. Матрицы $A_{(\cdot)}$ и векторы $C_{(\cdot)}$, $q_{(\cdot)}$ — соответствующей размерности. Нелинейности f_l, $i=1, 2$, непрерывны, $f_i(0)=0$ и в секторах Лурье $[0, k_i]$, $k_i \in]0, +\infty[$ удовлетворяют условиям

$$f_i(\sigma_i)/\sigma_i \in [0, K_i], \ i=1, 2; \ \forall \sigma i \in]-\infty, +\infty[.$$

При этом рассматриваются лишь те нелинейности f_i, при которых состояние $(x^T, y^T)^T=0$ является единственным состоянием равновесия вырожденной системы

$$\frac{dx}{dt} = A_{11}x + q_1 f_1(\sigma_1^0), \ \sigma_1^0 = C_{11}^T x, \tag{5.4а}$$

и системы, описывающей граничный слой, соответственно:

$$\mu\frac{dy}{dt} = A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2^0), \ \sigma_2^0 = C_{22}^T y. \tag{5.4б}$$

Это предположение имеет место, если

$$C_{ii}^T A_{ii}^{-1} q_i > 0.$$

С системами уравнений (5.3)— (5.4) рассматривается биградиурованная система функций (2.2) при $i=j=1,2$ с элементами

$$v_{11} = x^T B_1 x, \ v_{22} = \mu y^T B_2 y, \ v_{12} = v_{21} = \mu x^T B_3 y,$$

где B_1 и B_2 симметрические, положительно-определенные матрицы, B_3 — постоянная матрица.

Постоянные C_{ij} из предположени 1 для данного случая имеют вид:

$$C_{11} = \lambda_m(B_1), \ C_{22} = \mu\lambda_m(B_2), \ C_{12} = -\mu\lambda_{11}^{1/2}(B_3 B_3^T),$$

где $\lambda_m(B_i)$ — максимальные собственные числа матриц B_i $i=1, 2$; $\lambda_{11}^{1/2}(B_3 B_3^T)$ — норма матрицы $(B_3 B_3^T)$.

Обозначая верхнюю границу производной от функции

$$v(x, y, \mu) = \eta^T \mathfrak{Y}(x, y, \mu)\eta, \quad \eta \in R_T^2 \tag{5.5}$$

через $D^* v_M$ найдем оценку

$$D^* v_M(x, y, \mu) \leqslant u^T D(\mu) u, \tag{5.6}$$

где $D(\mu) = [d_{ij}]$ и

$$d_{11} = \eta_1^2 (p_{11} + p_{12}) + 2\eta_1 \eta_2 p_{26};$$

$$d_{22} = \eta_2^2 (p_{21} + p_{22}) + 2\mu \eta_1 \eta_2 p_{18};$$

$$d_{12} = \frac{1}{2} (\eta_1^2 p_{13}^{1/2} + \eta_2^2 p_{23}^{1/2}) + \eta_1 \eta_2 (\mu p_{15}^{1/2} + \mu p_{17}^{1/2} + p_{25}^{1/2} + p_{27}^{1/2}).$$

Здесь все постоянные p_{ij} — выражаются в эффективных оценках матриц и вектор-параметров системы (5.3).

Условия равномерной асимптотической устойчивости состояния $(x^T, y^T)^T = 0$ системы (5.3) при $\mu \in]0, \mu_0]$ и при $\mu \to 0$ формулируются в терминах условной знакоопределенности функции (5.5) и ее производной (5.6), как и в теореме 5.1.

Замечание 7. Рассматривая систему (5.3) как крупномасштабную, видно, что для получения условий устойчивости не предполагается что матрица $D(\mu)$ должна быть M — матрицей.

5.3. Анализ устойчивости двухкомпонентных систем.

Рассматривается двухкомпонентная система вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x(t)) + \mu g_1(t, x, z(t), w(t, z)), \; x(t_0)) = x_0 \tag{5.7а}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L\left(t, z, \frac{\partial}{\partial z}\right) w + \mu q_2(t, z, x(t), w(t, z)) \tag{5.7б}$$

где $w(t_0, z) = w^0(z)$, $M\left(t, z, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) w\,|_{\partial\Omega} = w^1(t, s)$,

$$s \in \partial\Omega, \; \Omega \subset R^k, \; X: T_0 \times M \to R^n; \; L: B_1 \to B_2, \; M: B_1 \to B_3, \; w^0 \in B_4$$

L, M — некоторые дифференциальные операторы и $B_1, \ldots, B_4$ банаховы пространства, μ — малый параметр ($\mu \in]0, 1]$).

Применение к данной системе подхода, основанного на матричной функции состоит в построении такой функции $V(t, x, w)$ вида (4.1)с компонентами, являющимися функционалами для свободных подсистем (при $\mu = 0$) и функций связи $g_i(t, \cdot)$, для которой сохраняется вид оценок (4.8) и (4.9).

Если элементы $v_{ij}(t, \cdot)$ удовлетворяют оценкам вида:

а) $\alpha_{11} \varphi_1^2(\|x\|) \leqslant v_{11}(t, x) \leqslant \bar{\alpha}_{11} \varphi_2^2(\|x\|)$;

б) $\alpha_{22} \psi_1^2(\|w\|_B) \leqslant v_{22}(t, w) \leqslant \bar{\alpha}_{22} \psi_2^2(\|w\|_B)$;

в) $\alpha_{12} \varphi_1(\|x\|) \psi_1(\|w\|_B) \leqslant v_{12}(t, x, w) \leqslant \bar{\alpha}_{12} \varphi_2(\|x\|) \psi_2(\|w\|_B)$

где $\alpha_{ii}, \bar{\alpha}_{ii} > 0$, $i = 1, 2$; $\alpha_{12}, \bar{\alpha}_{12}$ — const, то оценка (4.8) для функции (4.1) получается по стандартной технике.

Отличительной особенностью будет то, что в оценке сверху (4.9) матрица C будет зависеть от некоторых констант, характеризующих динамические свойства подсистем и связи между ними, а также от малого параметра μ, характеризующего слабые связи подсистем.

Заключительные замечания. Применение матриц-функций Ляпунова при исследовании устойчивости систем указанных классов позволяет:

1) расширить класс функций, подходящих для конструирования скалярной функции (4.1), разрешающей задачу об устойчивости состояния равновесия системы.

2) при исследовании движения крупномасштабных (многокомпонентных) систем конструкция МФЛ позволяет сделать более точный учет влияния функции связи между подсистемами.

3) применение МФЛ в варианте перехода к скалярной функции (4.1) позволяет обойти проблему квазимонотонности системы сравнения, возни кающую в методе векторной функции и вернуться к классическим условиям знакоопределенности в конусе.

Представляет интерес распространение этого подхода в сочетании методом векторных норм, развитым для крупномасштабных систем. (см [14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. — Киев: Наук. думка, 1984. — 307 с.
2. Мартынюк А. А. О матрице функции Ляпунова и устойчивости движений // Докл. АН СССР. — 1985. — 280, № 5. — С.1062—1066.
3. Мартынюк А. А. Равномерная устойчивость сингулярно возмущенной системы на основе матрицы-функции Ляпунова // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 4. — С.786—789.
4. Мартынюк А. А. Скалярные уравнения сравнения в теории устойчивости движения //Прикл. механика. — 1985. — 21. — № 12. — С.3—21.
5. Мартынюк А. А., Гутовский Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. — Киев: Наук. думка, 1979. — 272 с.
6. Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г. Абсолютная устойчивост сингулярно-возмущенной системы Лурье и матрицы функции Ляпунова // Прикл. механика. — 1987. — 23. — № 9. — С.103—110.
7. Митропольский Ю. А., Лила С., Мартынюк А. А. О некоторых направлениях исследований В. Лакшмикантама по теории дифференциальных уравнений и их применениям // Дифференц. уравнения. — 1986. — 22. — № 4. — С.555—572.
8. Раппопорт Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичных форм в конусе // Прикл. математика и механика. — 1986. — 50, Вып. 3. — С.674—679.
9. Djordjević M. Z. Stability analysis of large scale systems whose subsystems may be unstable // Large Scale Systems. — 1983. — N. 5. — P. 255—262.
10. Grujić Lj. T., Martynyk A. A., Ribbens-Pavella M. Large Scale Systems Stability under Structural and Singular Perturbations. — Springer-Verlag, 1987.—366 p.

11. LaSalle J. P. The stability of dynamical systems. — Philadelphia: SIAM, 1976. — 76 p.
12. Martynuk A. A. The Lyapunov matrix-function // Nonlin. Anal.: Theory, Methods and Appl. — 1984. — 8, N 10. — P. 1223—1226.
13. Martynuk A. A. Lyapunov Matrix-Function and Stability Theory // Proc. IMACS-IFAC Symp. June 3—6, 1986, France. — P. 261—265.
14. Grujić LJ. T., Gentina J. C., Borne P. General agregation of large—scale systems by vector Lyapunov function and vector norms // Int. J. Control. — 1976, v. 24, N. 4 — P. 529—550.

ON THE APPLICATION OF MATRIX LYAPUNOV FUNCTIONS IN MOTION ANALYSIS OF LUMPED AND DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

The paper develops Lyapunov's direct method on the basis of the concept of matrix-function (don't confuse it with a scalar function in the vector-matrix notation). The equilibrium state stability of the above-mentioned systems is investigated both by the immediate application of matrix-function and by transfer to a scalar function.

It is shown that the second level decomposition yields naturally the introduction of matrix-function with a subsequent construction of stability criteria in terms of the property of having fixed sign of suitable matrices in the cone.

In the paper a two-component system is also considered.

852057, Киев, 57
ул. Нестерова, 3
Институт механики АН УССР