TEORIJSKÁ I PRIMENJENÁ MEHANIKA 14, pp. 31—36, 1988, UDK 531

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ОДНОЙ ПОЛУНАТУРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Р. М. Булатович

(Поступила 09. 12. 1987.)

В данной статье находятся решения уравнения Гамильтона-Якоби на нулевом уровне энергии одной полунатуральной системы с двумя степенями свободы. С их помощью исследуется задача о траекториях асимптотических к положению равновесия.

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, положение которой определяется нормальными координатами $x=(x_1,\ x_2)$, с „полунатуральным" лагранжианом

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)+\omega\left(x_2\,\dot{x}_1-x_1\,\dot{x}_2\right)+U(x), \tag{1}$$

где ω — постоянная, а силовая функция U разлагается в ряд Маклорена

$$U=\frac{1}{2}\left(\lambda_1\,x_1^2+\lambda_2\,x_2^2\right)+\sum_{k\geqslant 3}U_k(x),$$

где U_k-формы степени k. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1+2\,\omega\,\dot{x}_2&=\frac{\partial U}{\partial x_1}\\ \ddot{x}_2-2\,\omega\,\dot{x}_1&=\frac{\partial U}{\partial x_2}.\end{aligned} \tag{2}$$

Начало координат $(x=0)$ является положением равновесия системы. Будем исследовать асимптотические движения, т. е. движения стремящиеся к положению равновесия при неограниченном возрастании времени.

Уравнения движения (2) можно заменить уравнением в частных производных Гамильтона-Якоби [1]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}-\omega\,x_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}+\omega\,x_1\right)^2-U(x)=h, \tag{3}$$

где h — постоянная энергии. Пусть $S=S_1+i\,S_2$; S_1, $S_2: R^2\{x\}\to R$, $i=\sqrt{-1}$, частное решение уравнения (3). Оно порождает систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial x_1} - \omega\, x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial S_1}{\partial x_2} + \omega\, x_1 \\ \frac{\partial S_2}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Решение $t\to x(t)$ системы (4) является решением уравнений движения [2]. Таким образом, можно воспользоваться уравнениями (4), чтобы частично проинтегрировать исходную систему уравнений (2). Так как движения асимптотические к положению равновесия (если они существуют) должны лежать на нулевом уровне энергии, то в дальнейшем будем предполагать, что $h=0$.

1. Сначала рассмотрим линейную систему с невырожденным положением равновесия ($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).

Ищем решение уравнения (3) в виде квадратичной формы

$$S=\frac{1}{2}\,A\,x_1^2+B\,x_1\,x_2+\frac{1}{2}\,C\,x_2^2. \tag{5}$$

Подставляя это выражение в уравнение (3), получим систему алгебраических квадратных уравнений

$$\begin{aligned} &A^2+B^2+2\,B\,\omega+\omega^2-\lambda_1=0 \\ &C^2+B^2-2\,B\,\omega+\omega^2-\lambda_2=0 \\ &AB+CB-A\,\omega+C\,\omega=0 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что эта система имеет решения

$$A=\pm\frac{\sqrt{\lambda_1 d}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}, \quad B=\frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\,\omega, \quad C=\pm\frac{\sqrt{\lambda_2 d}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}, \tag{6}$$

где $d=(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2})^2-4\,\omega^2$. Обозначаим через S^+ решение соответствующе знаку плюс в формулах (6), а S^- — знаку минус.

Целесообразно рассмотривать случаи когда силовая функция $U=(\lambda_1\,x_1^2+\lambda_2\,x_2^2)/2$ не есть максимум. В противном случае нулевой энергетический уровень вырождается в состояние равновесия.

Предположим сначала, что силовая функция имеет минимум ($\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$).

Если $d\geqslant 0$, т. е. $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\geqslant 2\,|\,\omega\,|$, то коэффициенты A, B, C вещественны. Подставляя функцию S^- в (4), имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\,(\sqrt{\lambda_1 d}\,x_1+2\,\sqrt{\lambda_2}\,\omega\,x_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\,(2\,\sqrt{\lambda_1}\,\omega\,x_1-\sqrt{\lambda_2 d}\,x_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Хорошо известно, что качественная структура и расположения траекторий линейных уравнений на фазовой плоскости определяется характером особой точки (см., например [1]). Корни характеристического уравнения системы (7) определяются выражением

$$k_{1,2}=\left(-\sqrt{(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2})^2-4\,\omega^2}\pm\sqrt{(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2})^2-4\,\omega^2}\right)/2. \tag{8}$$

Возможни следующие случаи. Если

$$|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}|\geqslant 2\,|\omega| \text{ и } \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\neq 2\,|\omega|, \tag{9}$$

то корни характеристического уравнения дествйительны и отрицательни. Особая точка системы (7) является устойчивым узлом и, следовательно, все траектории стремятся к началу при $t\to+\infty$ в определенном направлении. Если

$$|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}|<2\,|\omega| \text{ и } \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}\neq 2\,|\omega|, \tag{10}$$

то корни (8) комплексные сопряженные причем действительные части этих корней отличны от нуля. Особая точка системы (7) является устойчивым фокусом. Траектории ведут себя как спирали и стремятся к началу при $t\to+\infty$. Если же $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}=2\,|\omega|$, то корни (8) чисто мнимые, точка $x=0$ типа центр и траектории елипси с центром в начеле.

Второе решение S^+ порождает систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\,(\sqrt{\lambda_1}\,d\,x_1-2\sqrt{\lambda_2}\,\omega\,x_2)\\ \dot{x}_2&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}\,(2\sqrt{\lambda_1}\,\omega\,x_1+\sqrt{\lambda_2}\,d\,x_2).\end{aligned} \tag{11}$$

При $\omega=0$ система (11) совпадает с системой (7). Замена $t\to-t$ и $\omega\to-\omega$ переводит систему (11) в систему (7). Следовательно, при выполнении соотношений (9) и (10) траектории системы (11) расположены подобно тому как и у системы (7), но с противположним направлениями.

Если $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}<2\,|\omega|$, то коэфициенты A и C чисто мнимые, а B вещественный. Тогда соответствующая система (4) имеет единственное решение $x(t)\equiv 0$.

Пусть далее $x=0$ неэкстремальная точка силовой функции. Для определенности предположим, что $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Полагая в (6) $A=A_1+i\,A_2$, $B=B_1+i\,B_2$, $C=C_1+i\,C_2$, получим

$$A_1^{\pm}=\pm\frac{\sqrt{\lambda_1}\,(u+v)}{\sqrt{2}\,(\lambda_1-\lambda_2)},\quad A_2^{\pm}=\pm\frac{\sqrt{\lambda_1}\,(v-u)}{\sqrt{2}\,(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$B_1=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\,\omega,\quad B_2=-\frac{2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\,\omega,$$

$$C_1^{\pm}=\pm\frac{\sqrt{-\lambda_2}\,(v-u)}{\sqrt{2}\,(\lambda_1-\lambda_2)},\quad C_2^{\pm}=\pm\frac{\sqrt{-\lambda_2}\,(v+u)}{\sqrt{2}\,(\lambda_1-\lambda_2)}, \tag{12}$$

где

$$v=\sqrt{u^2-64\,\lambda_1\,\lambda_2\,\omega^4},\quad u=(\lambda_1-\lambda_2)^2-4\,\omega_2\,(\lambda_1+\lambda_2).$$

Подставляя функции $S^{\pm}=S_1^{\pm}+i\,S_2^{\pm}$, где $2\,S_j^{\pm}=A_j^{\pm}\,x_1^2+2\,B_j\,x_1\,x_2+C_j^{\pm}\,x_2^2$, $(j=1,\,2)$, в уравнения (4), получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=A_1^{\pm}\,x_1+(B_1-\omega)\,x_2\\ \dot{x}_2&=(B_1+\omega)\,x_1+C_1^{\pm}\,x_2\\ 0&=A_2^{\pm}\,x_1+B_2\,x_2\\ 0&=B_2\,x_1+C_2^{\pm}\,x_2.\end{aligned}\tag{13}$$

Так как определители

$$\Delta^{\pm}=A_2^{\pm}\,C_2^{\pm}-B_2^2\equiv 0,$$

то из уравнений (13) нетрудно получить

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\pm\,k_1\,x_1\\ x_2&=\pm\,k_2\,x_1,\end{aligned}$$

где

$$k_1=\frac{\sqrt{\lambda_1}\,(u+v-8\,\lambda_2\,\omega^2)}{(\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{2\,(u+v)}}>0,\quad k_2=\frac{2\,\omega\sqrt{2\,\lambda_1}}{\sqrt{u+v}}.\tag{14}$$

Следовательно, прямая $x_2=k_2\,x_1$ $(x_2=-k_2\,x_1)$ состоит из двух тракторий асимптотических движений к положению равновесия при $t\to-\infty$ $(t\to+\infty)$.

Обьединив полученные результаты, получим следующее утверждение об асимптотических при $t\to+\infty(-\infty)$ к положению равновесия движениях полунатуральной линейной системы с двумя степенями свободы.

Теорема. а) Если $\lambda_1,\,\lambda_2>0$ и $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}>2\,|\,\omega\,|$, то для любых $x_0\in R^2$ и $t_0\in R$ существует движение $x(t)$, $x(t_0)=x_0$, линейной системы (1), асимптотическое к положению равновесия при $t\to+\infty\;(-\infty)$. При этом: 1) Если $|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\,|<2\,|\,\omega\,|$ асимптотические траектории спиралевидно навиваются на положение равновесия (рис. 1, а). Если $|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\,|\geqslant 2\,|\,\omega\,|$ асимптотические траектории стремятся к положению равновесия в определенном направлении (рис. 1, б).

б) Если $\lambda_1\,\lambda_2<0$, то существуют два асимптотических движения при $t\to+\infty(-\infty)$, траектории которых являются полупрямыми (рис. 1, с).

2. Предыдущие результаты можно перенести на случай невырожденного положения равновесия нелинейной системы (1).

Можно показать, что если в точке $x=0$ функция $U(x)$ имеет невырожденний минимум и $\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}>2|\,\omega\,|$, то в некоторой окрестности D положения равновесия существуют аналитические решения $S^{\pm}\,D\to R$ уравнения (3), разложения которых начинаются членами второго порядка. Для этих решений линеаризованние уравнения (4) совпадают с уравнениями (7), (11), характеристические уравнения которых не имеют корней с нулевой вещественной частю. Следовательно, в достаточно малой окрестности положения равновесия асимптотические траектории нелинейной системы (1) будут расположены подобно тому, как это происходит в линейном случае.

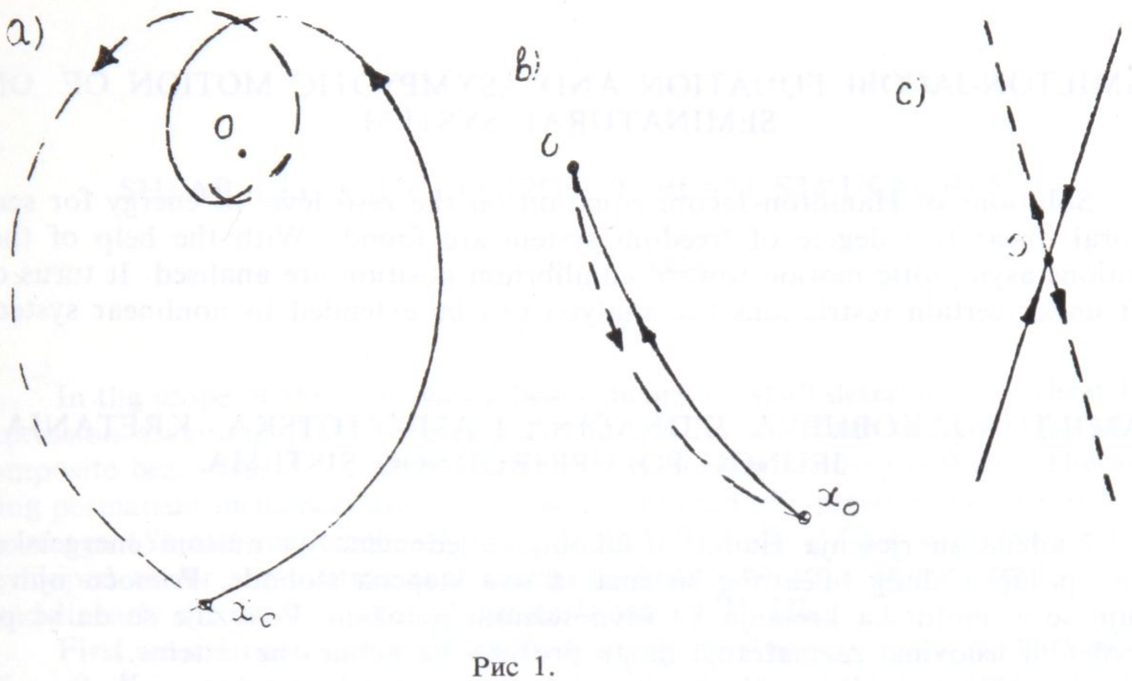

Рис 1.

Если $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$, то решения уравнения (3) имеют вид

$$S^{\pm} = S_1^{\pm} + \sqrt{-1}\, S_2^{\pm},$$

$$S_j^{\pm} = \frac{1}{2}\left(A_j^{\pm} x_1^2 + 2 B_j x_1 x_2 + C_j^{\pm} x_2^2\right) + \overline{S}_j^{\pm}(x), \ j = 1,\ 2,$$

где коэффициенты $A_j^{\pm}$, B_j $C_j^{\pm}$, определяются формулами (12), а $\overline{S}^{\pm}$ — ряды по степеням x_1, x_2 начинающиеся членами не ниже третого порядка. Так как $(\partial^2 S_2^{\pm} \mid \partial x_2^2)\big|_{x=0} \neq 0$, то в окрестности точки $x=0$ уравнения $(\partial S_2^{\pm} \mid \partial x_2 = 0$ можно разрешит относительно x_2. В результате получим $x_2 = f^{\pm}(x_1) = \pm k_2 x_1 + F_2^{\pm}(x)$. Из (3) получим

$$\left.\frac{\partial S_2^{\pm}}{\partial x_1}\right|_{x_2 = f^{\pm}(x_1)} = 0.$$

Следовательно, в этом случае уравнения (4) эквивалентные уравнениями

$$\dot{x}_1 = \pm k_1 x_1 + F_1^{\pm}(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = \pm k_2 x_1 + F_2^{\pm}(x_1),$$

где k_1 и k_2 определяются формулами (14), а $F_j^{\pm}$ — ряды начинающиеся членами не ниже второго порядка. Так как $k_1 \neq 0$, то кривая $x_2 = f^{-}(x_1)$ $(x_2 = f^{+}(x_1))$ состоит из двух асимптотических траекторий при $t \to +\infty$ $(-\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Парс Л. А. *Аналитическая динамика.* М., „Наука", 1971.

[2] Булатович Р. М. *Об уравнении Гамильтона-Якоби в окрестности положения равновесия.* ПММ, 1987, т. 51, вып. 2

HAMILTON-JACOBI EQUATION AND ASYMPTOTIC MOTION OF ONE SEMINATURAL SYSTEM

Solutions of Hamilton-Jacobi equation on the zero level of energy for seminatural linear two degree of freedom system are found. With the help of these solutions asymptotic motion toward equilibrium position are analised. It turus out that under certain restrictions the analysis can be extended to nonlinear systems.

HAMILTON-JAKOBIJEVA JEDNAČINA I ASIMPTOTSKA KRETANJA JEDNOG POLUPRIRODNOG SISTEMA

Nađena su rješenja Hamilton-Jakobijeve jednačine na nultom energetskom nivou poluprirodnog linearnog sistema sa dva stepena slobode. Pomoću njih ispituju se asimptotska kretanja ka ravnotežnom položaju. Pokazuje se da se pod određenim uslovima razmatranja mogu proširiti na nelinearne sisteme.

Ranislav Bulatović,
Mašinski fakultet
Cetinjski put bb,
81000 Titograd,
Yugoslavia