

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА КОСИЛКИ ТЕНЗОРНО—МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Драі омир Зекович
(Поступила 9.2. 1987.)

Тензорно-матричный способ в кинематическом анализе пространственных механизмов представляет собой один из самых простых и удобных способов в кинематическом анализе. В работах [1] и [2] даётся тензорно-матричный способ, который осуществляется на реальном механизме, в отличие от метода Д. Манжерона и К. Дрэгана,* где анализ проведён на эквивалентном механизме, что привело к известным противоречиям и неточностям принципиальной природы, [3].

Прежде чем сделаем конкретный анализ механизма косилки, мы дадим краткое описание этого способа [1], [2].

Если X , Y и Z Декартовы прямоугольные координаты точки в трёхмерном пространстве, введением координаты t и исчислением координат X , Y и Z с помощью новых координат x , y и z следующим способом:

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}, \quad x = Xt, \quad y = Yt, \quad z = Zt, \quad t = \text{const.} \quad (1)$$

получается связь между Декартовыми координатами в трёхмерном пространстве и гомогенными координатами x, y, z и t в „четырёхмерном пространстве“. В нашей анализе возьмём координату t так что $-t = 1$.**

Координаты произвольной точки M в прямоугольной Декартовой системе координат, при переходе в другой прямоугольной Декартовой системе координат, видоизменяются по закону

$$\bar{x}^i = b^i + a_j^i x^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

где \bar{x}^i и x^j аффинные координаты точки M .

Новым видоизменением выполненным уравнениями

$$\begin{aligned} \bar{y}^1 &= \bar{y}^1, & \bar{y}^2 &= \bar{x}^1 \bar{y}^1, & \bar{y}^3 &= \bar{x}^2 \bar{y}^1, & \bar{y}^4 &= \bar{x}^3 \bar{y}^1 \\ y^1 &= y^1, & y^2 &= x^1 y^1, & y^3 &= x^2 y^1, & y^4 &= x^3 y^1, \end{aligned} \quad (3)$$

* Кинематическое исследование новым матрично-тензорным методом четырёхзвенных пространственных механизмов, Букурешт. Acad. RPR, *Révue de Mécanique appliquée*, VII, 1962.

** Координату t здесь нужно взять именно $t = 1$ для писания уравнения замкнутости контуры: $T^{(0,0)} = T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(0,n)} = E$, где E единичный тензор.

осуществляется переход на гомогенные координаты в „четырёхмерном евклидовском пространстве“.

Видоизменение гомогенных координат некоторой точки при переходе из одной системы координат в другую систему координат осуществляется с помощью уравнений (2) и (3). Их можно сжато написать в виде:

$$\bar{y}^i = c_j^i y^j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

Уравнение(4) представляет собой случай линейной гомогенной трансформации. Матрица трансформации $\|c_j^i\|$ имеет следующий вид:

$$\|c_j^i\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ b^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

После линейного видоизменения переменных y^i в переменные $\bar{y}^j (\bar{y}^j = \alpha_k^j y^k)$, переменные $\bar{\bar{y}}^i$ видоизменяются по закону

$$\bar{\bar{y}}^i = d_s^i \bar{y}^s \quad (6)$$

где d_s^i константные величины. Поэтому координаты $\bar{\bar{c}}_j^i$ системы c_j^i по отношению к новой системе переменных будут

$$c_j^i = \frac{\partial \bar{\bar{y}}^i}{\partial \bar{y}^j} = \frac{\partial \bar{\bar{y}}^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^j} = \frac{\partial}{\partial y^k} (d_s^i \bar{y}^s) \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^j} = d_s^i \frac{\partial \bar{y}^s}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^j} = d_s^i \beta_j^k c_k^s \quad (7)$$

Отношением (7) доказано, что система коэффициентов линейного гомогенного видоизменения (5) является смещенным тензором второго ряда по отношению к линейным видоизменениям. Потому что координатные системы в кинематическом анализе пространственных механизмов связываем с соответствующими звеньями, тензор c_j^i определяет положение одного звена по отношению к второму звену механизма. На основе этого этот тензор назовём „тензором положения“ и напишем его следующим способом

$$T^{(v, v-1)} = \|c_j^i\|^{(v, v-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ b^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (v, v-1) \quad (8)$$

Уравнение замкнутости контуры механизма в тензорном виде имеет вид:

$$T^{(0,0)} = T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(n,n-1)} T^{(0,n)} = E \quad (9)$$

где E — единичный тензор, который определяется единичной матрицей. Так как компоненты тензора положения (8) являются непрерывными функциями времени t , имеющие непрерывную производную произвольного ряда в области изменения переменных: $y_{(v)}^1, y_{(v)}^2, y_{(v)}^3, y_{(v)}^4$, то можно определить тензор $dT^{(v,v-1)}/dt$ — являющийся производной тензора положения.

Тождественная легко доказать, что видоизменение (4) ортогонально. Параллельные перемещения не влияют на ортогональность; компоненты b^1, b^2 и b^3 можно пропустить, и тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = +1.$$

Тогда абсолютная производная Бянкия равна обычной производной. Дифференцированием тензора положения (8) получим

$$\frac{dT^{(v,v-1)}}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{b}^1 & \dot{a}_1^1 & \dot{a}_2^1 & \dot{a}_3^1 \\ \dot{b}^2 & \dot{a}_1^2 & \dot{a}_2^2 & \dot{a}_3^2 \\ \dot{b}^3 & \dot{a}_1^3 & \dot{a}_2^3 & \dot{a}_3^3 \end{vmatrix} \quad (v,v-1) \quad (10)$$

что называем тензором „кинематических характеристик первого ряда“ при релятивном движении звена I_v по отношению к звену I_{v-1} . Вторая производная тензора положения (8) по времени

$$\frac{d^2 T^{(v,v-1)}}{dt^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{b}^1 & \ddot{a}_1^1 & \ddot{a}_2^1 & \ddot{a}_3^1 \\ \ddot{b}^2 & \ddot{a}_1^2 & \ddot{a}_2^2 & \ddot{a}_3^2 \\ \ddot{b}^3 & \ddot{a}_1^3 & \ddot{a}_2^3 & \ddot{a}_3^3 \end{vmatrix} \quad (v,v-1) \quad (11)$$

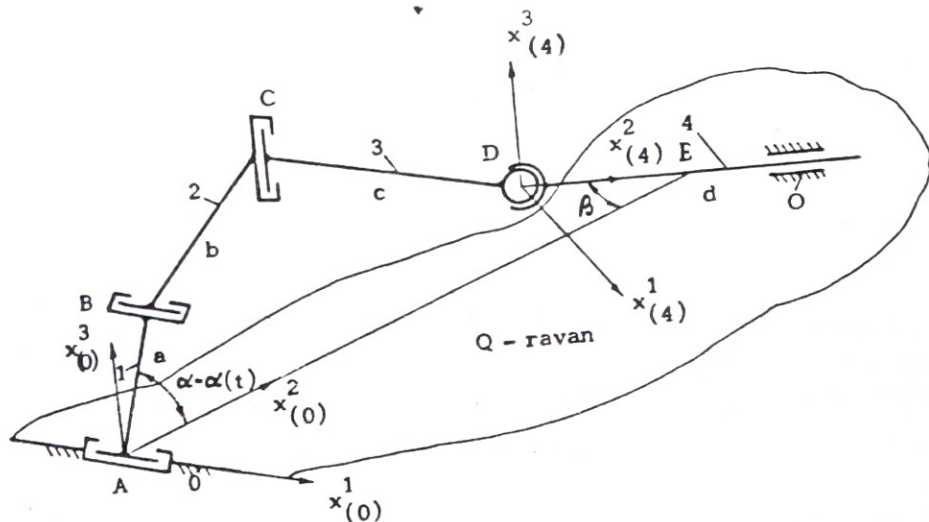
определяет тензор „кинематических характеристик второго ряда“ при релятивном движении звена I_v по отношению к звену I_{v-1} .

Угловая скорость и угловое ускорение звена I_v по отношению к звену I_{v-1} определяется матрицами

$$\omega^{(v,k-1)} = \begin{vmatrix} 0 & -\sum_{i=1}^3 a_1^i \ddot{a}_2^i & \sum_{i=1}^3 a_3^i \ddot{a}_1^i \\ \sum_{i=1}^3 a_1^i \ddot{a}_2^i & 0 & -\sum_{i=1}^3 a_2^i \ddot{a}_3^i \\ -\sum_{i=1}^3 a_3^i \ddot{a}_1^i & \sum_{i=1}^3 a_2^i \ddot{a}_3^i & 0 \end{vmatrix} \quad (v, v-1) \quad (12)$$

$$\varepsilon^{(v,v-1)} = \begin{vmatrix} 0 & -\sum_{i=1}^3 (a_1^i \ddot{\ddot{a}}_2^i + \ddot{a}_1^i \ddot{a}_2^i) & \sum_{i=1}^3 (a_3^i \ddot{\ddot{a}}_1^i + \ddot{a}_3^i \ddot{a}_1^i) \\ \sum_{i=1}^3 (a_1^i \ddot{\ddot{a}}_2^i + \ddot{a}_1^i \ddot{a}_2^i) & 0 & -\sum_{i=1}^3 (a_2^i \ddot{\ddot{a}}_3^i + \ddot{a}_2^i \ddot{a}_3^i) \\ -\sum_{i=1}^3 (a_3^i \ddot{\ddot{a}}_1^i + \ddot{a}_3^i \ddot{a}_1^i) & \sum_{i=1}^3 (a_2^i \ddot{\ddot{a}}_3^i + \ddot{a}_2^i \ddot{a}_3^i) & 0 \end{vmatrix} \quad (v, v-1) \quad (13)$$

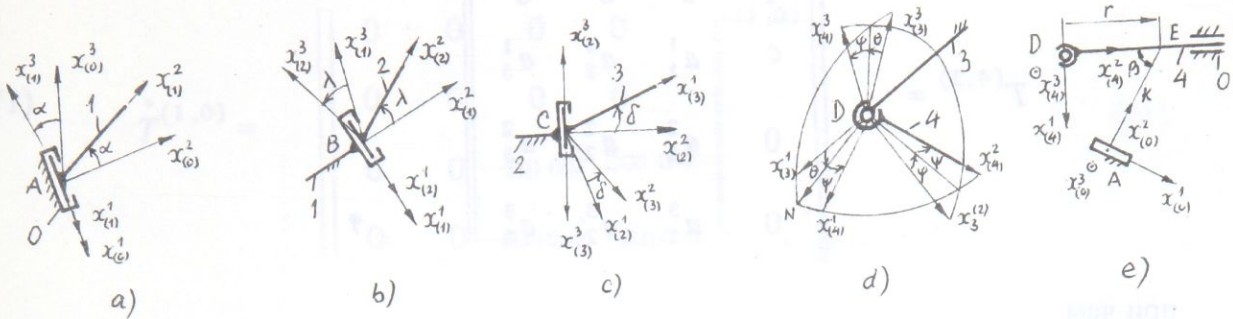
На рис. 1 показан пятизвенный механизм косилки, [4], [5]. Ведущее звено кривошип 1, у которого оси вращательных пар А и Б параллельные. Шатун ВС соединен с соседними звеньями с помощью вращательных пар с перпендикулярными осями. Звено CD соединено с ползуном 4 шаровой парой D. Оси вращательной пары А и поступательно движущегося звена 4 предполагаются пересекающимися. Длины a, b, c и d звеньев 1, 2, 3 и 4 известны как и углы $\alpha = \alpha(t)$ и $\beta = \text{const}$.



После описания механизма косилки, перейдем на определение положения и перемещения звеньев механизма. Нумерация звеньев механизма проведена от ведущего к ведомому звену, как показано на рис. 1. Контур этого механизма представляет собой простую замкнутую контуру. Выбор координатных систем, жестко связанных с каждым звеном механизма, так же показан на рис. 2. Координатная система

$$Ax_{(0)}^1 x_{(0)}^2 x_{(0)}^3$$

связана с подставкой О. Она условно неподвижная, а остальные координатные системы подвижные, потому что связаны с подвижными звеньями механизма.



Число степеней свободы определяется известной формулой

$$w = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

В нашем примере: $K = 5$, $p_5 = 4$, $p_4 = 0$, $p_3 = 1$, $p_2 = 0$ и $p_1 = 0$ и потому $W = 1$. Это значит, что механизм косилки имеет одну степень свободы — угол $\alpha = \alpha(t)$ берём как независимую обобщенную координату.

Для анализа необходимо усвоить и „релятивные координаты“, которые определяют релятивное положение звена механизма по отношению к соответствующему звену, с которым образует кинематическую пару. В нашем примере эти координаты — углы λ , δ затем φ , ψ и θ (углы Эйлера) и координата r , которая определяет прямолинейное перемещение звена 4 по отношению к подставке 0.

Теперь можно приступить к формированию тензора положения звеньев, образующих кинематические пары. Тензоры положения соответствующих звеньев механизма, по отношению друг к другу, имеют вид:

$$T^{(1,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad (1,0) \quad (14)$$

$$T^{(2,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ 0 & 0 & -\sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix} \quad (2,1) \quad (15)$$

$$T^{(3,2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ b & \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3,2) \quad (16)$$

$$T^{(4,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ 0 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (4,3) \quad (17)$$

при чем

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, & a_2^1 &= -\sin \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta \sin \varphi, & a_3^1 &= \sin \theta \cos \varphi, \\ a_1^2 &= \sin \psi \cos \varphi, & a_2^2 &= \cos \psi \cos \varphi, & a_3^2 &= -\sin \varphi \\ a_1^3 &= -\cos \psi \sin \theta + \sin \psi \cos \theta \sin \varphi, & a_2^3 &= \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi, & a_3^3 &= \cos \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (18) дают косинусы углов между осями подвижного и неподвижного координатного система, при сферическом движении, выраженные углами Эйлера.

Тензор положения звена О по отношению к звену 4 гласит

$$T^{(0,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ r - k \cos \beta \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (0,4) \quad (19)$$

В уравнении (19) величины k и β константны. Теперь мы можем написать уравнение замкнутости контуры в тензорном виде:

$$T^{(0,0)} = T^{(1,0)} T^{(2,1)} T^{(3,2)} T^{(4,3)} T^{(0,4)} = E \quad (20)$$

Уравнение (20) дает двенадцать скалярных уравнений, среди которых шесть независимых дают возможность найти шесть неизвестных координат: $\lambda, \delta, \psi, \theta, \varphi$ и r . Как значение угла оборота $\alpha = \alpha(t)$, ведущего звена 1, можно взять значение от 0° до 360° . Для этих значений можно вычислить соответствующие значения координат: $\lambda, \delta, \psi, \theta, \varphi$ и r .

Прежний анализ определяет положение и перемещение звеньев механизма и дает возможность сделать кинематический анализ в смысле определения скоростей и ускорений.

Тензоры скоростей звеньев механизма, представляющих собой кинематическую пару, имеют вид:

$$\dot{T}^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha \dot{\alpha} & \cos \alpha \dot{\alpha} \\ 0 & 0 & -\cos \alpha \dot{\alpha} & -\sin \alpha \dot{\alpha} \end{pmatrix}^{(1,0)}, \quad (21)$$

$$\dot{T}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \lambda \dot{\lambda} & \cos \lambda \dot{\lambda} \\ 0 & 0 & -\cos \lambda \dot{\lambda} & -\sin \lambda \dot{\lambda} \end{pmatrix}^{(2,1)}, \quad (22)$$

$$\dot{T}^{(3,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \delta \dot{\delta} & -\sin \delta \dot{\delta} & 0 \\ 0 & -\sin \delta \dot{\delta} & \cos \delta \dot{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3,2)}, \quad (23)$$

$$\dot{T}^{(4,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_1^1 & \dot{a}_2^1 & \dot{a}_3^1 \\ 0 & \dot{a}_1^2 & \dot{a}_2^2 & \dot{a}_3^2 \\ 0 & \dot{a}_1^3 & \dot{a}_2^3 & \dot{a}_3^3 \end{pmatrix}^{(4,3)}, \quad (24)$$

$$\dot{T}^{(0,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(0,4)}, \quad (25)$$

Тензоры ускорений звеньев механизма, представляющих собой кинематическую пару, имеют вид:

$$\ddot{T}^{(1,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \alpha \ddot{\alpha}^2 - \sin \alpha \ddot{\alpha} & -\sin \alpha \ddot{\alpha}^2 + \cos \alpha \ddot{\alpha} \\ 0 & 0 & \sin \alpha \ddot{\alpha}^2 - \cos \alpha \ddot{\alpha} & -\cos \alpha \ddot{\alpha}^2 - \sin \alpha \ddot{\alpha} \end{vmatrix} \quad (1,0) \quad (26)$$

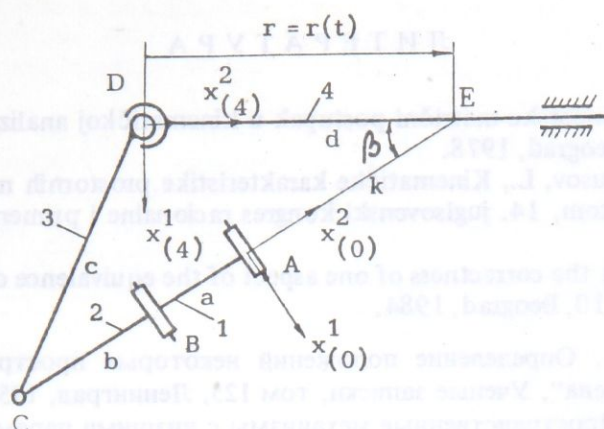
$$\ddot{T}^{(2,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \lambda \ddot{\lambda}^2 - \sin \lambda \ddot{\lambda} & -\sin \lambda \ddot{\lambda}^2 + \cos \lambda \ddot{\lambda} \\ 0 & 0 & \cos \lambda \ddot{\lambda}^2 - \cos \lambda \ddot{\lambda} & -\cos \lambda \ddot{\lambda}^2 - \sin \lambda \ddot{\lambda} \end{vmatrix} \quad (2,1) \quad (27)$$

$$\ddot{T}^{(3,2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \delta \ddot{\delta}^2 - \cos \delta \ddot{\delta} & -\cos \delta \ddot{\delta}^2 - \sin \delta \ddot{\delta} & 0 \\ 0 & -\cos \delta \ddot{\delta}^2 - \sin \delta \ddot{\delta} & -\sin \delta \ddot{\delta}^2 + \cos \delta \ddot{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3,2) \quad (28)$$

$$\ddot{T}^{(4,3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{a}_1^1 & \ddot{a}_2^1 & \ddot{a}_3^1 \\ 0 & \ddot{a}_1^2 & \ddot{a}_2^2 & \ddot{a}_3^2 \\ 0 & \ddot{a}_1^3 & \ddot{a}_2^3 & \ddot{a}_3^3 \end{vmatrix} \quad (4,3) \quad (29)$$

$$\ddot{T}^{(0,4)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (0,4) \quad (30)$$

Угловые скорости и угловые ускорения некоторого звена ν по отношению к звену $\nu-1$, определяются матрицами (12) и (13). Между тем, надо напомнить, что для анализа необходимо усвоить начальное положение механизма — рис. 3.



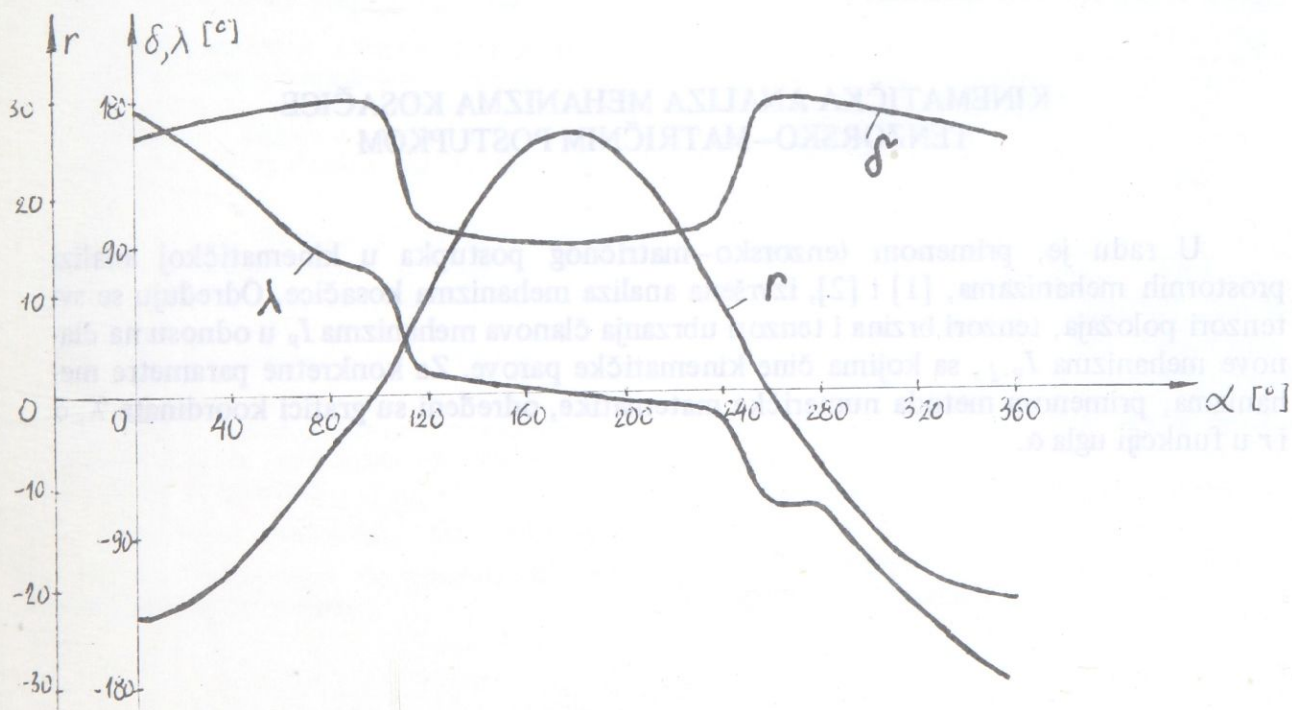
На рис. 4 приведены графики изменения углов λ и δ и перемещения r в функции α . Эти графики относятся к механизму, имеющему следующие размеры: $a = 15$, $b = 5$, $c = 60$, $AE = k = 50$, $\beta = 0,6435$ [rad].

Уравнения из которых получены величины λ , δ и r получены из матричного уравнения, которое гласит: $T(4,0) = T(1,0) T(2,1) T(3,2) T(4,3)$ и имеют вид: $c \sin \delta = r \sin \beta$,

$$a \cos \alpha + (b + c \cos \delta) (\cos \alpha \cos \lambda - \sin \alpha \sin \lambda) = k - r \cos \beta,$$

$$a \sin \alpha + (b + c \cos \delta) (\sin \alpha \cos \lambda + \cos \alpha \sin \lambda) = 0.$$

Замечание: Определение положения некоторого звена механизма по отношению к подставке выполняется матричным умножением тензора положения следующим способом: $T(n,0) = T(1,0) T(2,1) \dots T(n,n-1)$.



ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zeković, D., Tenzorsko-matrični postupak u kinematičkoj analizi prostornih mehanizama, mag. rad, Maš. fakultet, Beograd, 1978.
- [2] Zeković, D., Rusov, L., Kinematičke karakteristike prostornih mehanizama određene tenzorsko-matričnim postupkom, 14. juglovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Portorož, 1978.
- [3] Zeković, D., On the correctness of one aspect of the equivalence of Mechanism, Theoretical and applied MECHANICS 10, Beograd, 1984.
- [4] Кислицын, С., Определение положений некоторых пространственных механизмов, ЛГПИ имени „А. Герцена“, Ученые записки, том 125, Ленинград, 1956.
- [5] Зиновьев, В., Пространственные механизмы с низшими парами, ГТТИ, 1952.

KINEMATIC ANALYSIS OF A MOWING MACHINE MECHANISM BY THE TENSOR—MATRIX PROCEDURE

In the present paper, the mechanism of a mowing machine is analysed by the tensor—matrix procedure as applied in the kinematic analysis of the spatial mechanisms, [1] and [2]. All position tensors, velocity tensors, and acceleration tensors of the mechanism members I_v with respect to the mechanism members I_{v-1} , with which they form kinematic pairs, are determined. For concrete mechanism parameters, graphs of the coordinates λ , δ , and r , are plotted as functions of the angle α by applying the methods of the numerical mathematics.

KINEMATIČKA ANALIZA MEHANIZMA KOSAČICE TENZORSKO—MATRIČNIM POSTUPKOM

U radu je, primenom tenzorsko—matričnog postupka u kinematičkoj analizi prostornih mehanizama, [1] i [2], izvršena analiza mehanizma kosačice. Određuju se svi tenzori položaja, tenzori brzina i tenzori ubrzanja članova mehanizma I_v u odnosu na članove mehanizma I_{v-1} , sa kojima čine kinematičke parove. Za konkretne parametre mehanizma, primenom metoda numeričke matematike, određeni su grafici koordinata λ , δ i r u funkciji ugla α .