UDK 539.374

# РАСЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ТОНКОМ СЛОЕ МЕТАЛЛА

*Кадымов В. А.*

(Поступила 9. 10. 1986.)

Математическая постановка и строгое решение задач о развитом пластическом формоизменении, к которым относятся практически все процессы обработки металлов давлением, встречается с рядом серьезных затруднений. Это, как правило, сложные пространственные задачи, в которых частично определены не только граничные условия, но и законы изменения границы области в процессе деформации должны быть найдены. Кроме того, в задачах такого рода часто бывает необходимо учитывать силы вязкости и инерционные силы, наличие температур и температурных градиентов, или же учитывать влияние давления на свойства материала и т.д.

Выделим из всего многообразия процессов пластического течения один класс, характеризующийся одним общим свойством: течение материала в таких процессах происходит в областях в форме сравнительно тонкого слоя, находящегося между рабочими поверхностями тел инструмента, движение которых определяет характер и геометрию течения. Такие процессы достаточно распространены в технологии: штамповка и прессование тонкостенных элементов конструкций, прокатка листа и др. К ним же могут быть отнесены явления, происходящие в глубинных слоях земли (такие как, скажем, течения под высоким давлением слоя магмы или жидких растворов между жесткими глубинными земными пластами). Как известно [2, 3, 4, 8] в таких процессах реализуются весьма большие давления, на порядок превышающие величины сдвиговых напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta}, \quad |S_{\alpha\beta}| \leqslant \sigma_s \ll p,$$

то есть свойства металла (материала) в таких процессах близки к свойствам гидродинамической жидкости, в которой определяющими механическими параметрами являются давление $P$ и скорости течения $u, v$.

Для перечисленного класса задач при сравнительно общих физически обоснованных предположениях относительно характеристик процессов построена теория и предложены эффективные методы решения.

Одному из таких методов исследования течения пластического материала в тонком слое и его применению к практически интересным задачам посвящена настоящая работа.

Итак, будем рассматривать медленные неустановившиеся течения тонкого слоя идеально-пластического материала, растекающегося между жесткими сближающимися по заданному закону физическими поврхностями. Тогда общая постановка задачи вязкопластического течения со смешанными граничными условиями (то есть при наличии границы контакта) [1, 7] может быть сведена к следующей системе нелинейных уравнений в частных производных первого порядка [1, 2]:

55

$$\operatorname{grad} P = -\frac{1}{H}\left(T_1 \frac{\vec{V}-\vec{V}_1}{|\vec{V}-\vec{V}_1|} + T_2 \frac{\vec{V}-\vec{V}_2}{|\vec{V}-\vec{V}_2|}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial (HBu)}{A\,\partial\alpha} + \frac{1}{A}\frac{\partial (HAv)}{B\,\partial\beta} = 0 \qquad (2)$$

При заданном законе сближения инструментов (то есть при известной функции $H = H(\alpha, \beta, t)$ и заданных скоростях $Vi(\alpha, \beta, t)$ внутреннего движения физических поверхностей относительно основной неподвижной геометрической поверхности) и условии на границе слоя

$$P(\alpha, \beta, t)|_{\partial S_t} = k\sigma_s \qquad (k = 1,2) \qquad (3)$$

в задаче требуется для всех $t > t_0$ определить законы распределения контактного давления $P(\alpha,\beta,t)$, скоростей $u(\alpha,\beta,t), v(\alpha,\beta,t)$ и форму области $S_t = S(\alpha,\beta,t)$, занятой пластическим материалом, по известной начальной области $S_0 = S(\alpha,\beta, t_0)$ на геометрически неизменной (основной) поверхности. Здесь $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$- коэффициенты первой квадратичной формы основной поверхности в главных осях $\alpha$ и $\beta$. Отметим, что если граница текущего слоя образована пазом в теле инструмента, куда свободно затекает металл, то $K = 2$, $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$; если же контур свободен от внешних воздействий (свободное растекание), то $K = 1$, $\dfrac{\partial S}{\partial t} \neq 0$. В общем случае напряжения трения на контакте $T_i$ $(i = 1,2)$ представляют собой сложные функции, зависящие от формы очага деформации, величины контактного давления, наличия смазки, величины шероховатости поверхности, величины проскальзывания материала по физической поверхности инструмента и т.д. Существует распространенный в расчетах обработки металлов давлением экспериментально подтвержденный закон трения на контактных поверхностях

$$\vec{T}_i = -\frac{\vec{V}-\vec{V}_i}{|\vec{V}-\vec{V}_i|}\begin{cases} \mu_i P, & P \leqslant P_s \equiv \dfrac{\tau_s}{\mu_i} \text{ — зона трения Кулона} \\ \tau_s, & P \geqslant P_s \text{ — зона трения Прандтля} \end{cases}$$

Однако при течениях в тонком слое размер зоны Кулона, примыкающей к границе области, мал и им можно пренебречь, то есть можем положить $T_1 = T_2 = \tau_s$. Во многих процессах скорости внутренних движений отсутствуют или малы по сравнению с $u$, $v$. Тогда уравнение (I) принимает вид:

$$\operatorname{grad} P = -\frac{2\tau_s}{H}\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \qquad (1')$$

Ниже описывается метод решения задачи (I'), — (2), (3). Из векторного уравнения (I') следует, что линии уровня $P(\alpha, \beta)= const$ ортогональны линиям тока $\frac{A d\alpha}{ds} = -\frac{u}{V}$, $\frac{B d\beta}{ds} = -\frac{v}{V}$ (то есть направление вектора скорости течения коллинеарно вектору $grad\ P$). Это позволяет перейти от системы (I'), (2) к эквивалентной системе двух дифференциальных уравнений в частных производных относительно $P(\alpha, \beta, t)$ модуля вектора скорости V:

$$\operatorname{grad}^2 P = \frac{4\tau_s^2}{H^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{AB}\frac{\partial (HBV\cos\gamma)}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial (HAV\sin\gamma)}{\partial\beta} = 0, \tag{5}$$

где $\vec{V} = -V(\cos\gamma\,\vec{\tau} + \sin\gamma\,\vec{l})$, а $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, t)$ — угол между касательной к линии тока в рассматриваемой точке области течения и осью $\alpha$. Решаем первое уравнение:

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) \equiv \left(\frac{P}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0, \tag{6}$$

где $\Omega(\alpha, \beta) = \frac{2\tau_s}{H} > 0$, $P = \frac{\partial P}{\partial\alpha}$, $g = \frac{\partial P}{\partial\beta}$, а $t$ как независимый параметр пока опускаем.

Характеристическая система для (6) имеет вид:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{A^2}\frac{P}{\Omega}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{B^2}\frac{g}{\Omega}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega,$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{P^2}{\Omega A^3}A'_\alpha + \frac{g^2}{\Omega B^3}B'_\alpha + \Omega'_\alpha, \quad \frac{dg}{ds} = \frac{P^2}{\Omega A^3}A'_\beta + \frac{g^2}{\Omega B^3}B'_\beta + \Omega'_\beta, \tag{7}$$

где в качестве „$S$" принята длина дуги вдоль носителей характеристик

$$\alpha = \alpha(s), \beta = \beta(s).$$

Задача (7) — это задача типа Коши с соответствующими граничными условиями на контуре области $S_t$. Решения системы (7), удовлетворяющие (6), называют характеристической кривой. Можно установить связь между решениями (6) и системы (7) и показать эквивалентность их интегрирования при выполнении определенных условий, для чего будем использовать известные теоремы из теории дифференциальных уравнений в частных производных [5, 6] :

Теорема 1. Если характеристическая полоса имеет общий элемент $(\alpha, \beta, P, p, q)$ с интегральной поверхностью $P = P(\alpha, \beta)$ то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности.

Теорема 2. Пусть дана пространственная кривая $C: \alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu)$ которую можно дополнить функциями $p(\mu)$ и $g(\mu)$ до начальной полосы $C_1: \alpha(\mu), \beta(\mu),$

$P(\mu), p(\mu), g(\mu)$ где удовелтворяет соотношению полосы $P'_{\mu} = p\alpha'_{\mu} + g\beta'_{\mu}$ (а) и уравнению $F(\alpha,\beta,P,p,q)=0$ (в); если вдоль полосы $C_1$ : $\Delta = F_p \beta'_{\mu} - F_g \alpha'_{\mu} \neq 0$), то в окрестности $C_1$ существует одна и только одна интегральная поверхность, проходящая через эту полосу.

Выберем теперь в качестве пространственной кривой $C$ $(\alpha(\mu), \beta(\mu), P(\mu))$ регулярную часть контура $\partial S_t$ области течения в рассматриваемый момент времени $(\alpha(\mu), \beta(\mu)$ $C^2$, $\alpha'^2_{\mu} + \beta'^2_{\mu} \neq 0)$ и положим на ней $P(\mu) = k\,\sigma_s$ . Определим далее $P(\mu)$ и $q(\mu)$ таким образом, чтобы выполнялись условия (а), (в), (с). Тогда в окрестности гладких точек контура области течения все условия теоремы 2 выполнены, то есть существует единственная интегральная поверхность $P = P(\alpha, \beta)$, проходящая через выбранную часть контура. С другой стороны, задача Коши для системы (7) при выполнении условий типа Липшица для правых частей по $\alpha, \beta$, $P$, $p$, $q$ имеет единственную характеристическую полосу, которая в свою очередь имеет общий элемент (в точках контура) с интегральной поверхностью. А значит по теореме 1 решения (6) и системы (7) совпадают.

Легко установить, что носители характеристик $\alpha(s)$, $\beta(s)$ системы (7) совпадают с линиями тока, и система (7) оказывается эквивалентной система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\alpha, \beta, P, \gamma$:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\gamma}{A}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\sin\gamma}{B}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega,$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\Omega}\left(-\frac{\Omega'_{\alpha}}{A}\sin\gamma + \frac{\Omega'_{\beta}}{B}\cos\gamma\right) + \frac{1}{AB}\left(A'_{\beta}\cos\gamma - B'_{\alpha}\sin\gamma\right) \tag{7'}$$

Учитывая, что вдоль характеристик системы (7') $\dfrac{dP}{ds} = \Omega > 0$, последнюю систему можем представить в эквивалентной форме:

$$\frac{d\alpha}{dP} = \frac{\cos\gamma}{A\Omega}, \quad \frac{d\beta}{dP} = \frac{\sin\gamma}{B\Omega}, \quad \frac{ds}{dP} = \frac{1}{\Omega}, \tag{7''}$$

$$\frac{d\gamma}{dP} = \frac{1}{\Omega^2}\left(-\frac{\Omega'_{\alpha}}{A}\sin\gamma + \frac{\Omega'_{\beta}}{B}\cos\gamma\right) + \frac{1}{AB\Omega}\left(A'_{\beta}\cos\gamma - B'_{\alpha}\sin\gamma\right)$$

Решение системы (7') или (7'') с граничными условиями в точках контура области определяют многолистную риманову поверхность ($\alpha,\beta$, P), из которой согласно принципу единственности давления, оставляем покрытие области из частей характеристических кривых заключенных между границей контура области и ребром (то есть линией, составленной из точек пересечения по крайней мере двух разных характеристических кривых), и соответствующих минимальным значениям контактного давления. Другие же части этой многолистной поверхности (продолжение характеристических кривых) физически не реализуются. Для решения таких задач в литературе известны как точные, так и приближенные методы (например, метод Рунге—Кутта).

Переходим теперь к интегрированию (5) для определения кинематики течения, перепишем его в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial W}{A\,\partial\alpha}\cos\gamma + \frac{\partial W}{B\,\partial\beta}\sin\gamma + W\psi + \omega = 0, \tag{8}$$

или $$\frac{dW}{ds} = -W\psi - \omega,$$

где
$$W(s) = H(\alpha(s), \beta(s))\, V(s),\ \omega(\alpha, \beta) = \frac{\partial H}{\partial t},\ \psi = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial (B\cos\gamma)}{\partial\alpha} + \frac{\partial (A\sin\gamma)}{\partial\beta}\right]$$

Если мы теперь сможем каким-то способом вычислить значения функции $\psi$ вдоль носителей характеристик $\alpha(s), \beta(s)$ (то есть знать зависимость $\psi = \psi(s)$, то интегрирование (8) не будет стоить особого труда — оно будет неоднородным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением.

Для $\psi$ имеет место следующее представление:

Теорема 3.
$$\psi = -\frac{1}{R(s)} + \frac{1}{R_\beta}\cos\gamma + \frac{1}{R_\alpha}\sin\gamma, \tag{9}$$

где
$$R_\alpha = \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^{-1},\ R_\beta = \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^{-1}$$ — касательные радиусы кривизны

линий $\alpha$ и $\beta$ на основной поверхности;
$$1/R(s) = \chi(s) = \frac{\partial\gamma}{A\partial\alpha}\sin\gamma - \frac{\partial\gamma}{B\partial\beta}\cos\gamma = \frac{d\gamma}{d\eta}$$

— касательная (геодезическая) кривизна линии уровня $P(\alpha, \beta) = \mathrm{const}$ в рассматриваемой точке области течения.

В некоторых частных задачах течения тонких пластических слоев величина радиуса кривизны $R = R(s)$ линий уровня находится точно (течение плоских пластических слоев постоянной толщины $H = H(t)$, течение между наклонными плитами в круге и др.). В частности, при течении плоских пластических слоев толщины $H = H(t)$, когда линии тока являются прямыми, ортогональными к контуру области, для $\psi$ получается выражение, совпадающее с полученным в работе (I):
$$\psi(s) = -\frac{1}{R(S_0) - S + S_0},$$

где $R(s_0)$ — радиус кривизны начального уровня (контура области). Согласно предложенному А. А. Ильюшиным методу аналогии с песчанной насыпью [1], полная сила, потребная для сжатия плоского слоя пластической массы, выражается через объем V однородной песчаной насыпи
$$P_{\text{общ}} = \int\limits_S\int P\,dx\,dy = \frac{2\tau_s}{H\nu}\,V$$

где $\nu$ — коэффициент трения песка.

Считая теперь $\psi = \psi(s)$ известной функцией проинтегрируем уравнение (8):

$$W(s) = H(s) V(s) = A_0 J_1(s) - J_2(s), \tag{10}$$

где $J_1(s) = exp\left(-\int\limits_{S_0}^{S} \psi(s')ds'\right), J_2(s) = \int\limits_{S_0}^{S} \omega(s'') exp\left(-\int\limits_{S''}^{S} \psi(s')ds'\right) ds''$,

а для определения постоянного интегрирования $A_0$ имеем условие ветвления течения $W(S = S$ ребра$) = 0$ в неизвестных, но определяемых в ходе решения системы (7') точках следа ребра поверхности давлений.

Итак, решаем исходную задачу (1') — (3) следующим образом. Будем интегрировать системы (7) с начальными условиями в точках контура области (известно [1], что угловые точки контура принадлежат следу ребра давлений), представляющую линию начального уровня, с одновременным вычислением двух квадратур $J_1(S(P))$, $J_2(S(P))$. Задавая шаг $\Delta P$, будем строить поточечно очередную линию уровня и определять на ней значения $J_1$ и $J_2$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не покроем всю область ортогональной сеткой линий уровня и линий тока, определив тем самым след ребра поверхности давлений (как линию стыковок отдельных характеристик) и значения $J_1(P)$ и $J_2(P)$, то есть установив кинематику течения. Таким образом, в каждый фиксированный момент времени знаем положение контура $\sigma S_t$ области течения и нормальную к ней компоненту скорости течения $V(S_0) = (A_0 J_1(S_0) - J_2(S_0)) / H(S_0)$ где $A_0 = J_2(S$ ребра$)/J_1(S$ ребра$)$. А значит, можем определять форму контура свободно растекающейся области в момент $t + \Delta t$. Или же если граница области есть паз, куда свободно затекает металл, то можем установить расход металла $HV$ и тем самым высоту затекшего в пазы ребра.

Рассмотрим примеры.

1. Задача о течении пластического слоя материала между наклонными плитами в фиксированной круговой области:

$$S_t \equiv S_0 : x^2 + y^2 \leqslant R^2, \qquad H(x, t) = H_0(t) - \alpha_1(t) x.$$

Эта задача в постановке (4) решена в работе [2]. Новым в нашем решении будет построение кинематики течения. Как известно, все линии тока собираются в одной точке $(x_p(t), O)$ и представляют собой эллиптический пучок окружностей; линии уровня изображаются гиперболическим пучком окружностей. Ребро вырождается в единственную точку:

$$x_p(t) = \frac{\sqrt{H_0^2(t) - \alpha_1^2(t) R^2 - H_0(t)}}{\alpha_1(t)}$$

Интегралы $J_1(s(x))$ и $J_2(s(x))$ для определения скоростей вдоль известных линий тока берутся точно, для линии тока, исходящей из точки контура $M_0(x_0 > 0, y_0 > 0)$, они имеют вид:

$$J_1(s(x)) = \frac{y_0}{y(x)}, \quad J_2(s(x)) = \frac{1}{y(x)} \int\limits_{x_0}^{x} (\dot{H}_0 + \dot{\alpha}_1 x) y(x) \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx,$$

где

$$y(x, t) = y_0 + \frac{H_0(t) + \alpha_1(t) x_0}{\alpha_1(t)} \frac{x_0}{y_0} -$$

$$- \frac{R(H_0 + \alpha_1 x_0)}{\alpha_1 y_0} \left[1 - \frac{y_0^2}{(H_0 + \alpha_1 x_0)^2 R^2} (H_0 + \alpha_1 x)^2\right]^{1/2} \text{— траектории движения}$$

Тогда

$$V(x) = \frac{1}{H(x)} (A_0 J_1(x) - J_2(x)) \text{ при}$$

$$A_0 = \frac{1}{y_0} \int_{x_0}^{x_p(t)} (\dot{H}_0 + \dot{\alpha}_1 x)\, y(x) \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx \qquad (11)$$

2. Рассмотрим один пример задачи в постановке (1), (2), (3), а именно осесимметричную ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$) задачу о свободном растекании кольцевого слоя пластического материала между сближающимися плоскими физическими поверхностями при одновременном вращении одного из физических поверхностей $(v_1 = \omega(t) r)$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\tau_s}{H(t)} \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + (v - v_1)^2}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) \qquad (12)$$

$$0 \equiv \frac{\partial P}{r \partial \varphi} = -\frac{\tau_s}{H(t)} \left( \frac{v - v_1}{\sqrt{u^2 + (v - v_1)^2}} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), \qquad (13)$$

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} + \frac{\partial (r u)}{r \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \qquad (14)$$

$$P(r = a(t), t) = P(r = b(t), t) = \sigma_s \qquad (15)$$

Уравнение (13) легко разрешается относительно $v(r, t)$:

$$v(r, t) = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \omega(t) r. \qquad (16)$$

Интегрируя (14), найдем

$$u(r, t) = \frac{r}{2} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{C(t)}{r}, \qquad (17)$$

где $\lambda(t) = ln \dfrac{H_0}{H(t)}$ степень деформации.

Постоянная интегрирования в (17) находится из условия $u(r = r_p(t), t) = 0$ на ребре поверхности давлений:

$$C = -\frac{r_p^2(t)}{2} \frac{d\lambda}{dt},$$

причем $r_p(t)$, как и $a(t)$ и $b(t)$, пока что неизвестны. Подставляя (17) в (12), получим

$$\frac{\partial P}{\partial r} = f(r, t), \quad \text{где} \quad f(r, t) = -\frac{2\tau_s}{H} \frac{\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_p^2}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(r - \frac{r_p^2}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{4} \omega^2 r^2}}$$

Как видно из последнего уравнения, давление во всей области течения $a(t)\leqslant r\leqslant \leqslant b(t)$ может принять одно и то же значение $(\frac{\partial P}{\partial r}=0)$, равное значению на свободных контурах, лишь при бесконечно большой угловой скорости вращения инструмента $(\omega \gg \frac{d\lambda}{dt})$, причем максимальное давление в слое с увеличением $\chi=\omega/(d\lambda/dt)$ уменьшается и в пределе при $\chi\to\infty$ давление во всей области выравнивается.

Интегрируя последнее уравнение, найдем контактное давление в слое:

$$P(r,t)=\begin{cases}\sigma_s-\int\limits_a^r f(r,t)\,dr, & a(t)\leqslant r\leqslant r_p(t)\\ \sigma_s-\int\limits_r^b f(r,t)\,dr, & r_p(t)\leqslant r\leqslant b(t)\end{cases}\tag{18}$$

причем неизвестная точка ребра $r=r_p(t)$ находится из условия непрерывности $P(r,t)$ при $r=r_p$:

$$P(r_p-0,t)=P(r_p+0,t),\quad \text{или}$$

$$J\left(a,b,r_p,\frac{d\lambda}{dt},\omega\right)\equiv\int\limits_a^b f(r,t)\,dr=0\tag{19}$$

Уравнение (19) позволяет установить зависимость $r_p=r_p(a,b,\frac{d\lambda}{dt},\omega)$ В общем случае это удается проделать численно. В частности, при $\omega(t)\equiv 0$ искомая зависимость найдена в [1], а именно:

$$f(r,t)=\begin{cases}1, & a(t)\leqslant r<r_p(t)\\ 0, & r=r_p(t)\\ -1, & r_p(t)<r\leqslant b(t)\end{cases}\quad \text{и}\quad r_p(t)=\frac{a(t)+B(t)}{2}$$

Нетрудно изучить асимптотическое поведение функции $r_p(a,b,\frac{d\lambda}{dt},\omega)$ при достаточно больших значениях $\chi$:

$$r_p(t)\to\sqrt{ab}\quad \text{при}\quad \chi\to\infty$$

После разрешения (19) определяются законы движения границ кольцевого слоя из решения задачи Коши:

$$\frac{da}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt}\frac{a^2-r_p^2}{a},$$

$$\frac{db}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt}\frac{b^2-r_p^2}{b},\qquad a(t=t_0)=a_0,\ b(t=t_0)=b_0.$$

Таким образом, на примере последей задачи видим, что используемая в данной работе математическая модель течения в тонком слое пластического материала может описывать некоторые качественные явления, происходящие в этих процессах (такие как перераспределение контактных давлений на инструменты, смещение линий ветвления течения, снижение потребной работы для осуществления процесса и др.).

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А. А. ПММ, 1954, т. 18, N$^{o}$ 3, 265–288

[2] Кийко И. А. Научные труды НИИ мех. МГУ, 1971, N$^{o}$ 15

[3] Унксов Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. М., Машгиз., 1955

[4] Тарновский И. Я., Леванов А. Н., Поксеваткин М. И. Контактные напряжения при пластической деформации. М., Металлургия, 1972.

[5] Курант Р. Уравнения с частными производными. М., „Мир", 1964

[6] Хартман Ф. Х. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., „Мир", 1970.

[7] Кадымов В. А., Огибалов П. М., Некоторые основные аспекты теории течения металла. Матер. XBI Югосл. симпозиума по теорет. и приклад. — механике, БЕЧИЋИ, май, 1984.

[8] Огибалов П. М., Кийко И. А. Очерки по механике высоких параметров, МГУ, 1966.

## PLASTIC FLOWING OF METAL–METHODS AND PROBLEMS

KADIMOV V.A.

The paper presents a survey of methods for solwing of problems plastic flowing of metal. The problem of compression and drawing of a plastic strip is examined.

## PLASTIČNO TEČENJE METALA–METODE I PROBLEMI

KADIMOV V.A.

U radu je dat pregled metoda za rješavanje problema plastičnog tečenja metala i razmotren je problem izvlačenja cijevi.

Kadimov V.A.
Institut matematike i mehanike
AN Azerb. SSR, Baku