UDK 532

DIE VERWENDUNG DER VARIATIONSMETHODE IN DER FORSCHUNG DER MHD–GRENZSCHICHT DER VERANDERLICHEN ELEKTRISCHEN LEITFAHIGKEIT

Zoran Boričić, Dragiša Nikodijević, Dragan Živković

(Eingegagen am 9. 10. 1986.)

Die Theorie der magnetisch-hydrodynamischen (MHD) Grenzschicht wird in der letzten zwanzig Jahren schnell entwickelt. Man erforscht die Ebenen-und Raumprobleme der Grenzschicht mit verschiedenen phisykalischen Charakteristiken de Fluidums [1, 2, 3, 4, 5, 6].

In dieser Arbeit, zwecks der Bereicherung dieser Theorie, wird die Ebenen–MHD––Grenzschicht des inkompressiblen Fluidums erforscht. Das anwesende Magnetfeld ist senkrecht zum Körper, den das Fluidum umströmt, und ruhig in Bezug auf den Körper. Das äussere elektrische Feld wird vernachlässigt. Von der Menge der Näherungsmethoden wird hier, zur Lösung des beschriebenen Problems, die Variationsmethode mit verschwindendem Parameter genutzt [7].

1. Die Gleichungen des betrachteten Problems

Zur analytischen Lösung des Problems ist es nötig, die Gleichungen zu haben, die es mathematisch beschreiben. Das Problem, das in diser Arbeit erforscht wird im artesischen rechtwinkligen Koordinatensustem durch die Gleichungen [8].

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \tag{1.1}$$

und Randbedingungen

$$\begin{aligned} &u = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \\ &u \to U(x) \qquad\quad \text{für} \quad y \to \infty \end{aligned} \tag{1.2}$$

beschrieben, wo die für die Theorie der MHD–Grenzschicht gewöhnlichen Bezeichnungen verwendet wurden.

In der Arbeit nimmt man weiter für die Änderung der elektrischen Leitfähigkeit die Voraussetzung [6]

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\nu}{U^2} \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.3}$$

Mit der Änderung der elektrischen Leitfähigkeit in der Form (1.3) transformiert man das System der Gleichungen (1.1) in die Form

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu N}{U^2} u \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1.4}$$

wo $N = \sigma_0 B^2/\rho$ – die Magnetzahl ist. Wenn man in den Gleichungen (1.4) den Gradient des Drucks durch den Ausdruck

$$- \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} \tag{1.5}$$

ersetzt, werden dieselben in die Form

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\nu N}{U^2} u \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \tag{1.6}$$

transformiert.

Zur Lösung des beschriebenen Problems, also, ist es nötig, das System der Gleichungen (1.6) mit Randbedingungen (1.2) zu lösen. Wie schon am Anfang gesagt wurde, wird in der Arbeit zur Lösung der Gleichungen (1.6) mit Randbedingungen (1.2) die Variationsmethode mit verschwindendem Parameter [7] verwendet werden.

2. Die Variationsdescription betrachteten Problems

Damit man das Problem mit der Variationsmethode lösen könnte, ist es nöting, es variationshaft zu formulieren, d.h. in ein Variationsproblem zu transformieren. Zu diesen Zweck wählt man die Lagrange–Funktion in der Form

$$L = \Big\{ m \, [\frac{1}{2} u \, (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \vartheta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\nu N}{U^2} u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{dU}{dx} \frac{\partial u}{\partial x}] -$$

$$- \frac{\nu}{2} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \Big\} e^{x/m} + \mu \, (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}) \tag{2.1}$$

wo m–der verschwindende Parameter und $\mu(x, y)$–der unbekannte Multiplikator ist. Das entsprechende Aktionintegral hat die Form

$$I = \int_{x_0}^{l} \int_{0}^{\infty} L\, dx\, dy. \tag{2.2}$$

Die Bedingung der Stationarität des Aktionsintegrals

$$\delta I = 0 \tag{2.3}$$

wird durch Ausnutzung der Kommutativität des Differenzierens und Variierens und der Naturrandbedingungen für beliebige Werte der Variationen δu und $\delta\vartheta$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \delta u \right|_{x=l} = 0, \qquad \left. \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)} \delta \vartheta \right|_{y\to\infty} = 0 \tag{2.4}$$

ins System der Euler–Lagrange–Gleichungen transformiert:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)} = 0. \tag{2.5}$$

Durch Eintragen der Lagrange – Funktion (2.1) ins System der Euler–Lagrange–Gleichungen (2.5) und durch Übergang auf den Limes $m \to$ o wird dieses System ins System der Gleichungen (1.6) transformiert. So wurde, entsprechend der Variationsformulierung mit verschwindendem Parameter [7], das Problem mittels Aktionsintegrals (2.2) mit Lagrange–Funktion in der Form (2.1) variationshaft formuliert. Also die Lösung des mit den Gleichungen (1.6) und Randbedingungen (1.2) beschriebenen Problems wurde in die Lösung der Variationsaufgabe, gegeben durch das Aktionsintegral (2.2), transformiert.

3. Die Bestimmung der Näherungslösung

Zur Lösung dieses Variationsproblems nutzt man die Methode von Kontorowitsch [9]. Zu diesem Zweck setzt man die Löangsgeschwindigkeit $u\,(x, y)$, die Quergeschwindigkeit $\vartheta\,(x, y)$ und den Multiplikator $\mu\,(x, y)$ voraus, in der Formen

$$u\,(x,y) = U\,(x)\,\phi\,(f),\ \vartheta\,(x,y) = g\,(x)\ H(f) - j\,(x)\,R\,(f),$$
$$\mu\,(x,y) = k\,(x)\,Q\,(f) \tag{3.1}$$

wo $f = y/h\,(x)$ und $h\,(x)$ – die Grenzschichtdicke sind.

Die Funktionen $\phi\,(f), H\,(f), R\,(f)$ und $Q\,(f)$ werden so gewählt, dass sie, wegen der zweiten Gleichung des Systems (1.6), den Relationen

$$H\,(f) = \int f\,\dot{\phi}\,df + c_1,\quad R\,(f) = \int \phi\,df + C_2 \tag{3.2}$$

entsprechen, wo C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind und $\dot{\phi} = \dfrac{d\phi}{df}$ Durch Ausnutzung der Randbedingungen (1.2) kommt man zu den Randbedingungen ϕ, H und R in der Form

$$\begin{aligned} &\phi = 0, \quad H = 0, \quad R = 0 \quad \text{für} \quad f = 0,\\ &\phi = 1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \text{für} \quad f = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mit den so vorausgesetzten Komponenten der Geschwindigkeit und des Multiplikators bestimmt man die aus dem Ausdruck (2.1) reduzierte Lagrange – Funktion in der Form:

$$\begin{aligned} L_1 = \Big\{ m\,[\,&\frac{U}{h}(jUA_7 - \nu NA_9 - gUA_5)\frac{dh}{dx} + U^2\frac{dU}{dx}\,(A_{11} - A_2)\frac{dh}{dx} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{U^3}{h}A_3\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + hU\left(\frac{dU}{dx}\right)^2\left(\frac{1}{2}A_1 - A_{10}\right) + U\frac{dU}{dx}(gA_4 - jA_6) + \\ &+ \nu N\frac{dU}{dx}A_8\,] - \frac{\nu}{2}\frac{U^2}{h}A_{12}\Big\}\,e^{x/m} + k\left(\frac{dU}{dx}h - j\right)A_{13} + k\left(g - U\frac{dh}{dx}\right)A_{14} \end{aligned} \tag{3.4}$$

wo die Beiwerte A_i mit folgenden Ausdrücken gegeben sind:

$$A_1 = \int_0^1 \phi^3\,df,\ A_2 = \int_0^1 \dot{\phi}\phi^2\,f\,df,\ A_3 = \int_0^1 \phi\dot{\phi}^2 f^2\,df,$$

$$A_4 = \int_0^1 H\phi\dot{\phi}\,df,\ A_5 = \int_0^1 H\,\dot{\phi}^2\,f df,\ A_6 = \int_0^1 R\,\phi\dot{\phi}\,df,\ A_7 = \int_0^1 R\,\dot{\phi}^2\,f\,df,$$

$$A_8 = \int_0^1 \phi^2 \dot{\phi}\, df, \quad A_9 = \int_0^1 \phi\dot{\phi}^2\, f\, df, \quad A_{10} = \int_0^1 \phi\, df, \quad A_{11} = \int_0^1 \dot{\phi} f\, df,$$

$$A_{12} = \int_0^1 \dot{\phi}^2\, df, \quad A_{13} = \int_0^1 \phi\, Q\, df, \quad A_{14} = \int_0^1 \dot{\phi}\, Qf\, df. \tag{3.5}$$

Das entsprechende reduzierte Aktionsintegral des betrachteten Problems hat folgende Form:

$$I_1 = \int_{x_0}^{l} L_1\, dx \tag{3.6}$$

Die Bedingung der Stationarität des reduzierten Aktionsintegrals

$$\delta I_1 = 0 \tag{3.7}$$

mit Befriedigung der Naturrandbedingung

$$\left.\frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{dh}{dx}\right)}\, \delta h \right|_{x=l} = 0, \tag{3.8}$$

transformiert sich ins System der Euler –Lagrange–Gleichung:

$$\frac{\partial L_1}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{dh}{dx}\right)} = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{dg}{dx}\right)} = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{dk}{dx}\right)} = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial j} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{dj}{dx}\right)} = 0. \tag{3.9}$$

Wenn man die reduzierte Lagrange – Funktion (3.4) ins System der Gleichungen (3.9) ersetzt und auf den Limes $m \to o$ übergeht, bekommt man das folgende System der Gleichungen;

$$\frac{\nu}{2}\frac{U^2}{h^2}A_{12}-\frac{U^3}{h}\frac{dh}{dx}A_3+\frac{U^2}{h}(gA_5-jA_7)+U^2\frac{dU}{dx}(A_2-A_{11})+\nu\frac{NU}{h}A_9=0,$$

$$\left(\frac{dU}{dx}h-j\right)A_{13}+\left(g-U\frac{dh}{dx}\right)A_{14}=0 \tag{3.10}$$

Durch Auswahl der bis jetzt beliebigen Funktionen j und g in der Form

$$j=h\frac{dU}{dx}\ ,\ g=U\frac{dh}{dx} \tag{3.11}$$

wird die zweite Gleichung des Systems (3.10) identisch befriedigt und die erste Gleichung desselben Systems transformiert sich in die Form

$$\frac{dt}{dx}+A\frac{\frac{dU}{dx}}{U}t+C\nu\frac{N}{U^2}t^{1/2}+\frac{D}{U}\nu=0, \tag{3.12}$$

dabei gelten

$$A=2\frac{A_2-A_7-A_{11}}{A_5-A_3},\ C=\frac{2A_9}{A_5-A_3}\ ,\ D=\frac{A_{12}}{A_5-A_3};\ t=h^2. \tag{3.13}$$

Also die Lösung des beschriebenen Problems wurde in die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung (3.12) transformiert. Damit mansie lösen könnte, ist e nötig, zuerst die Beiwerte A, C und D zu bestimmen, d.h. sich für die Form der Funktion des Verhältnisses der Geschwindigkeiten ϕ zu entscheiden.

4. Die Naherungslosung fur das Verhaltnis der Gexhwindigkeiten in der Form von Polynom der dritten Potenz

In der Arbeit vählt man für die weitere Lösung des betrachteten Problems das Verhältnis des Geshwindigkeiten ϕ (f) in der Form des Polynoms der dritten Potenz

$$\phi\ (f)=3f-3f^2+f^3. \tag{4.1}$$

Die Beiwerte des Polynoms (4.1) sind so bestimmt, dass es den Randbedingungen (3.3) und Zusatzbedingungen $\dot{\phi}\,(1)=0$ und $\ddot{\phi}\,(1)=0$ entspricht.

Für das so erwählte Verhältnis der Geschwindigkeiten (4.1) aus dem Ausdruck (3.2), die Randbedingungen dabei nutzend, bekommt man die Funktionen R und H in der Form

$$R\,(f)=\frac{3}{2}f^2-f^3+\frac{1}{4}f^4,$$

$$H(f) = \frac{3}{2} f^2 - 2f^3 + \frac{3}{4} f^4 \tag{4.2}$$

Weiter bestimmt man durch Verwendung der Ausdrücke (3.5) die Beiwerte A_i, danach aber durch Verwendung der Ausdrücke (3.13) auch die Beiwerte A, C und D, so dass die Gleichung (3.12) zu

$$\frac{dt}{dx} + 8\frac{\frac{dU}{dx}}{U}\ t - 9.722\ \frac{\nu N}{U^2}\ t^{1/2} - 50\ \frac{\nu}{U} = 0 \tag{4.3}$$

wird.

So wird die Lösung des betrachteten Problems, unter Voraussetzung, dass das Verhältnis der Geschwindigkeiten die Form eines Polynoms der dritten Potenz hat, in die Lösung der Differentialgleichung (4.3) im jeden konkreten Fal transformiert.

5. Die Kenngrössen der Grenzschicht

Durch Verwendung der Bekannter Ausdrücke (10) für die Kenngrössen der Grenzschicht und zwar:

für die Verdrängungsdicke

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U})\, dy, \tag{5.1}$$

für die Impulsverlustdicke

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\ (1 - \frac{u}{U}) dy, \tag{5.2}$$

für die Tangentenspannung auf dem Körper

$$\tau_w = \eta\ \frac{\partial\, \mathrm{u}}{\partial\, \mathrm{y}}\Bigg|_{y=o'} \tag{5.3}$$

und durch Ersatz der Ausdrücke (3.1) in denselben, erhält man:

für die Verdrängungsdicke

$$\delta^* = h(x) \int_0^1 (1 - \phi)\ df, \tag{5.4}$$

für die Impulsverlustdicke

$$\delta^{**} = h(x)\ \int_0^1 \phi\ (1 - \phi)\, df, \tag{5.5}$$

und für die Tangentenspannung auf dem Körper

$$\tau_w = \eta \dot{\phi} \frac{U}{h(x)} \tag{5.6}$$

Für das Verhältnis der Geschwindigkeit in der Form des Polynoms (4.1) werden die Ausdrücke (5.4), (5.5) und (5.6) zu

$$\delta^* = 0.25\, h(x), \quad \delta^{**} = 0.107\, h(x), \; \tau_w = 3\,\eta \frac{U(x)}{h(x)}. \tag{5.7}$$

6. Die Berechnung des konkreten Beispiels

In der Arbeit erforscht man, als konkretes Beispiel, das Problem der Grenzschicht auf dem Kreiszylinder, für den

$$U(x) = U_0 \sin\left(\frac{x}{R}\right). \tag{6.1}$$

Man setzt die Veränderung des Magnetfeldes N voraus, in der Form

$$N(x) = KN_0 \sin\left(\frac{x}{R}\right), \tag{6.2}$$

dabei ist K der dimensionslose Multiplikator.

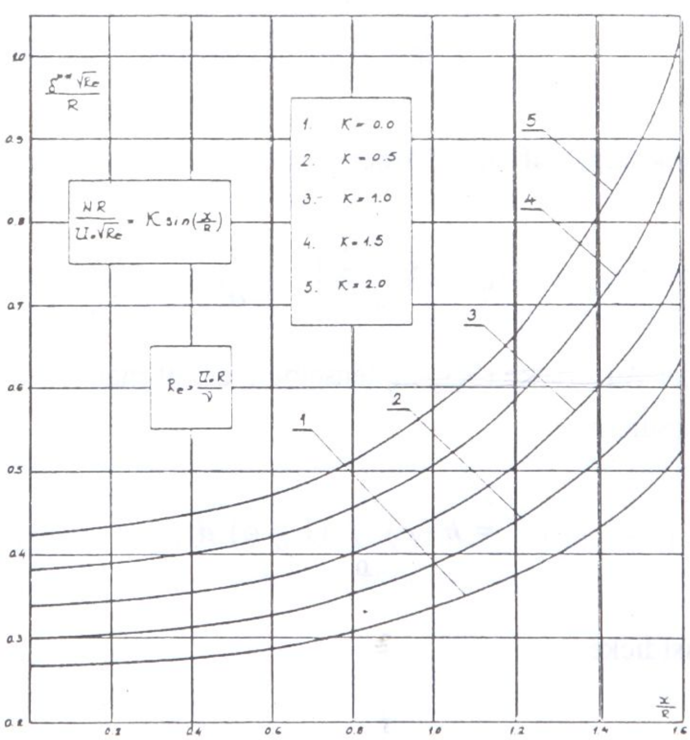

Bild 1.

Mid den so erwählten Funktionen $U(x)$ und $N(x)$ ist die Gleichung (4.3) numerisch gelöst und zwar für mehrere Zahlenwerte des Multiplikators K. Gleichzeitig wurden, mit Hilfe der Formeln (5.7), die werte der Kenngrössen der Grenzschicht berechnet. Wegen besserer Verfolgung der Änderungen sind die Ergebnisse der Berechnung auf Bilden 1, 2 und 3 dargestellt.

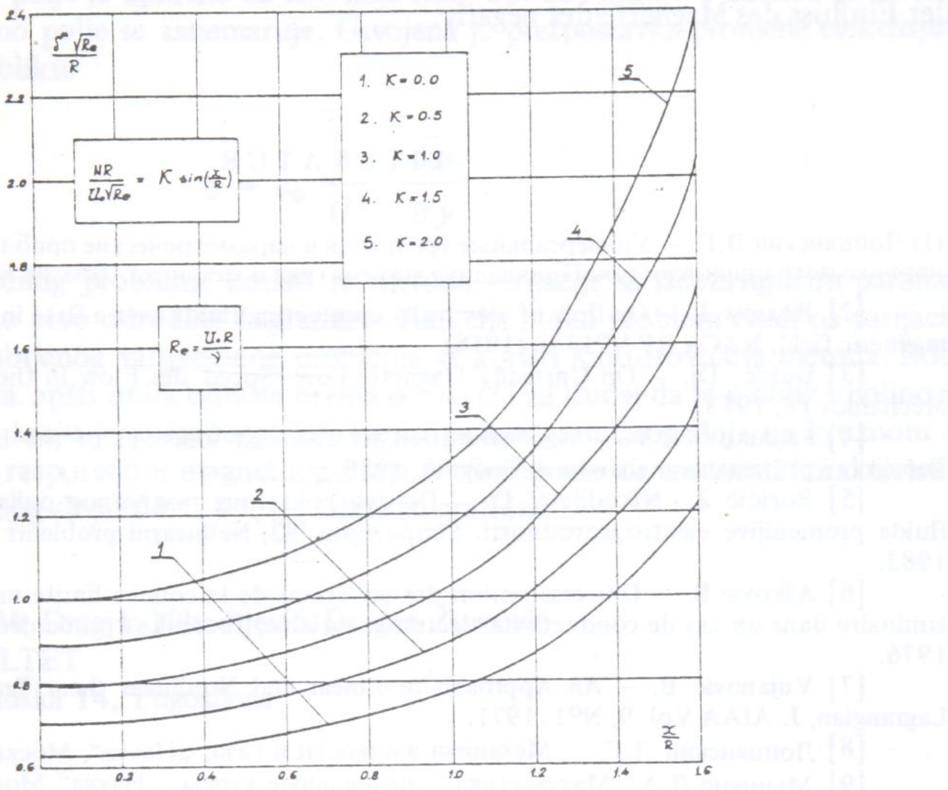

Bild 2.

Auf Bild 1. sieht man, dass den grösseren Werten des Multiplikators K grössere Werte der Impulsverlustdicke entsprechen. Also, durch die Verstärkung des Magnetfeldes erfolgt die Verdickung der Grenzschicht. Die gleichen Tendenzen erkennt man auf Bild 2. für die Verdrängungsdicke.

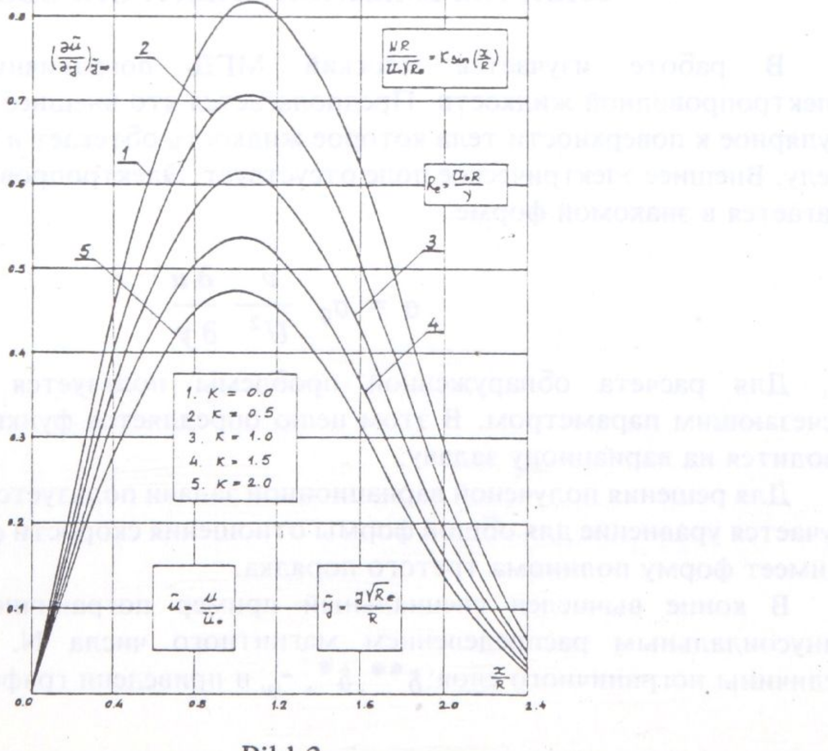

Bild 3.

Auf Bild 3. sieht man, das den grösseren Werten des Multiplikators K kleinere Werte der Tangentenspannung auf dem Körper entspechen. Also durch die Verstärkung des Magnetfeldes kommt es früher zur Trennung der Grenzschicht. In diesem Sinne ist hier der Einfluss des Magnetfeldes negativ.

LITERATUR

(1) Лойцянский Л.Г. – Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя, Прикладная математика и механика, Том 29, выпуск 1, Москва, 1965.

[2] Rossow J. – On flow of electivally conducting fluids over a flate in pressence of a transvers magnetic field, NACA RP N°1358 (1958)

[3] Đukić Dj. – On Unsteady Magnetic Low–Speed slip Flow in the Boundary Layer, Acta Mechanica 18, 1973.

[4] Saljnikov N. V. – A contribution to universal solutions of the Boundary layer Theory, Teorijska i primenjena mehanika 4, Beograd, 1978.

[5] Boričić Z., Nikodijević D. – Dejstvo pokretnog magnetnog polja na MHD granični sloj fluida promenljive elektroprovodnosti, Simpozijum '83, Nelinearni problemi dinamike, Aranđelovac, 1983.

[6] Ašković R. – Universalisation des equations de la couche limite magnetohydrodynamique laminaire dans un cas de conductivite electrique variable, Teorijska i primenjena mehanika 2, Beograd, 1976.

[7] Vujanović B. – An Approach to Linear and Nonlinear theat Transfer Problem Using a Lagrangian, J. AIAA Vol. 9, N°1, 1971.

[8] Лойцянский Л.Г. – Механика жидкости и газа, „Наука", Москва 1978.

[9] Мышкис Д.А., Математика – специяльные курсы, „Наука" Москва, 1971.

[10] Лойцянски Л.Г. – Ламинарный пограничный слой, ГИФМЛ, Москва, 1962.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАРИАЦИИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МГД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

В работе изучается плоский МГД пограничный слой несжимающей электропроводной жидкости. Предполагается что внешнее магнитное поле перпендикулярное к поверхности тела которое жидкость обтекает и находится в покое к этому телу. Внешнее электрическое поле отсуствует. Электропровнодност жидкости предполагается в энакомой форме.

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\nu}{U^2} \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Для расчета обнаруженной проблемы пользуется вариационный метод с исчезающим параметром. В этом целю опредляется функция Лагранжа и проблема сводится на вариациону задачу.

Для решения полученой вариационной задачи пользуется метод Канторовича. Получается уравнение для общой формы отношения скорости $\phi = u/U$ и для случая когда ϕ имеет форму полинома третого порядка.

В конце вычислен специальный пример пограничного слоя на цилиндре с синусоидальным распределением магнитного числа N. Вычеслены характерные величины пограничного слоя: δ^{**}, δ^{*}, τ_w и приведени графически.

PRIMENA METODE VARIJACIJE NA IZUČAVANJE MHD GRANIČNOG SLOJA PROMENLJIVE ELEKTROPROVODNOSTI

U radu se izučava ravanski MHD granični sloj nestišljivog elektroprovodnog fluida. Prisutno magnetno polje je upravno na telo koje fluid optiče i miruje u odnosu na to telo. Spoljašnje električno polje se zanemaruje. Usvojena je pretpostavka promene elektroprovodnosti fluida u obliku:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\nu}{U^2} \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Za izučavanje uočenog problema koristi se metoda varijacije sa iščezavajućim parametrom. U tom cilju se prvo određuje Lagranževa funkcija i tako problem svodi na varijacioni. Za rešavanje dobijenog varijacionog problema se koristi Kantorovičeva metoda. Dobijena je jednačina za opšti oblik odnosa brzina $\phi = u/U$ i za slučaj da je ϕ oblika polinoma trećeg stepena. Na kraju je proračunat konkretni primer graničnog sloja na kružnom cilindru sa sinusnim rasporedom magnetnog broja N. Sračunate su vrednosti karakterističnih veličina graničnog sloja: δ^{**}, δ^{*}, τ_w i date su grafički.

Dr Zoran Boričić, Mr Dragiša Nikodijević, Dragan Živković
MAŠINSKI FAKULTET
18000 NIŠ, Beogradska 14, Yugoslavia