TEORIJSKA I PRIMENJENA **MEHANIKA** 12 pp. 9—12, 1986, UDK 531

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Ранислав Булатович

(Поступило 10. 10. 1984., доработана 25. 06. 1985.)

В работе [4] использованием семейства преобразований конфигурационного пространства совместного со связями из принципа Даламбера-Лагранжа получены утверждения обобщающие основные законы динамики и распространяющие теорему Нетер на систему с неголономными связями. В даной заметке вводя в число преобразованных переменний время обобщен этот подход.

Пусть будет дана механическая система, положение которой определяется обобщенными координатами q_i $(i = 1, \ldots, n)$, с кинетической энергией $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ и обобщенными силами Q_i $(i = 1, \ldots, n)$. Действительные движения определяются из принципа Даламбера-Лагранжа

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0 .$$

Рассмотрим зависящее от параметра α семейство однозначных обратимых преобразований n-мерного конфигурационного пространства и времени

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_j^* t^*, \alpha) \\ t &= t(q_j^*, t^*, \alpha) \end{aligned} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

тождественное при $\alpha = 0$. Обобщенные скорости преобразуются по правилу

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\sum_j \frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} \frac{d q_j^*}{dt^*} + \frac{\partial q_i}{\partial t^*} \right) \Bigg/ \left(\sum_j \frac{\partial t}{\partial q_j^*} \frac{dq_j^*}{dt^*} + \frac{\partial t}{\partial t^*} \right).$$

Непосредственной проверкой, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dt}{dt^*} = \frac{d}{dt^*} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \text{ и } \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \frac{dt}{dt^*} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{dq_i}{dt^*} - \dot{q}_i \frac{d}{dt^*} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \tag{2}$$

убеждаемся, что справедливо следующее-основное соотношение:

$$\frac{dS}{dt^*} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(T \frac{dt}{dt^*} \right) = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) \frac{dt}{dt^*} , \tag{3}$$

где

$$S = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} q_i - T\right)\frac{\partial t}{\partial \alpha}.$$

1. Случай независимых координат и потенциальных сил

Предположим, что координаты независимы и что внешние силы Q_i, действующие на систему допускают потенциальную энергию $\Pi(q_i, t)$.

Тождество (3) запишем в форме

$$\frac{dS}{dt^*} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(T\frac{dt}{dt^*}\right) = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right)\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)\frac{dt}{dt^*}$$

$$+ \sum_i Q_i\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)\frac{dt}{dt^*}.$$

Учитывая (2), получим

$$\sum_i Q_i\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)\frac{dt}{dt^*} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\Pi\frac{dt}{dt^*}\right) + \frac{d}{dt^*}\Pi\frac{\partial t}{\partial \alpha}.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt^*}\left(S - \Pi\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[(T - \Pi)\frac{dt}{dt^*}\right] =$$

$$+ \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)\frac{dt}{dt^*}.$$

Отсюда, поскольку при $\alpha = 0$ преобразование тождественное, с помощью принципа Даламбера-Лагранжа получаем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(L\frac{dt}{dt^*}\right)_0, \quad \left[\ \ \right)_0 = \ \ \Big)_{\alpha=0}\ \Big] \tag{4}$$

где

$$V(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_0 - \left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)\left(\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)_0$$

и L — кинетический потенциал ($L = T - \Pi$).

Функция $F(q_i, \dot{q}_i, t)$ инвариантна относительно преобразований (I), если функция $G(d q_i^*/dt^*, q_i^*, t^*) = F\, dt/dt^*$ не зависит от α, а слабо инвариантна если $(\partial G/\partial \alpha)_0 = dU/dt$, где U некоторая функция переменных t и q_i.

Из формулы (4) непосредствено следует, что если функция L слабо инвариантна относительно семейства преобразований (I), то уравнения движения имеют первый интеграл

$$V - U = \text{const}. \tag{5}$$

Это утверждение обобщенная теорема Нетер (см., например [3]), которую обыкновенно в литературе доказывают с помощью вариационного подхода.

Отметим одно из следствий. Если $\partial L / \partial t = f(t)$, то функция L слабо инвариантна относительно семейства преобразований $q_i = q_i^*$, $t = t^* + \alpha$. Следовательно, получаем первый интеграл

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L + U(t) = \text{const} \quad (\dot{U} = f)$$

называемый интегралом Пенлеве [2].

2. **Случай дополнительных связей**

Предположим, что на систему наложены связи, вообще говоря, неинтегрируемые

$$\sum_i A_{\rho i} \dot{q}_i + A_\rho = 0 \quad (\rho = 1, \ldots m < n), \tag{6}$$

где $A_{\rho i}$, A_ρ — функции от q_i и t. Из соотношения (3) и принципа Даламбера-Лагранжа придем к

$$\frac{dS}{dt} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(T \frac{dt}{dt^*}\right)_0 = \sum_i (Q_i + R_i) \left[\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_0 - \dot{q}_i \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)_0\right], \tag{7}$$

где R_i — обобщенные реакции связей.

Допустим, что семейство преобразований (I) совместно со связями (6), т.е.

$$\sum_i A_{\rho i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_0 = 0 \quad (\rho = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Когда внешние силы потенциальные, использовав что мощность реакции павна $-\sum_\rho \lambda_\rho A_\rho$ [1], получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(L \frac{dt}{dt^*}\right)_0 + \sum_\rho \lambda_\rho A_\rho \frac{\partial t}{\partial \alpha}\Big)_0,$$

где λ_ρ — множители связей. Если связи катастатические ($A_\rho = 0$), то

$$\sum \lambda_\rho A_\rho \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)_0 = 0.$$

Итак, доказана

Теорема. Если функция L слабо инвариантна относительно семейства преобразований (I) совместного со катастатическими связями, то уравнения движения имеют первый интеграл вида (5).

Когда время не входит в число преобразуемых переменных и функция L инвариантна в обычном смысле, теорема доказана в [4].

На концу, в качестве обобщенных координат примем декартовы координаты точек. Тогда, кинетическая энергия инвариантна относительно сдвигов вдоль неподвижного направления, поворотов вокруг неподвижной оси и сдвигов вдоль оси времени. В этих случаях формула (7) совпадает с классическими теоремами об изменении количества движения, момента количества движения и кинетической энергии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Anđelić T., Stojanović R. *Racionalna mehanika*. Beograd, 1966.

[2] Аппель П. *Теоретическая механика*, т. 2. Москва, 1960.

[3] Добронравов В. В. *Основы аналитической механики*. Москва, 1976.

[4] Козлов В. В., Колесников Н. Н. *О теоремах динамики*. Прикл. матем. и механ., т. 42, вып. 1, 1978.

DYNAMICAL LAWS AND TRANSFORMATIONS OF CONFIGURATION SPACE AND TIME

According to relation (3) and to D'Alambert-Lagrange principle generalised Noether's theoreme is derived. This theoreme can be applied to catastatic cases. Dynamical laws appear as a consequence of invariant kinetic energy according to particular transformations of cartesian coordinates and time.

ZAKONI DINAMIKE I TRANSFORMACIJE KONFIGURACIONOG PROSTORA I VREMENA

U duhu ideje rada [4] razmatra se jednoparametarska transformacija konfiguracionog prostora mehaničkog sistema i vremena. Ne pretpostavljajući nezavisnost generalisanih koordinata dobijena je osnovna relacija (3). Na osnovu nje i Dalamber-Lagranžovog principa, u prvom dijelu rada, dokazana je uopštena Neterina teorema. U drugom dijelu, pretpostavljajući da su transformacije (1) saglasne sa vezama (u smislu jednačina (8)), proširena je Neterina teorema na katastatičke sisteme. Primijećeno je da se osnovni zakoni dinamike dobijaju iz (7) kao posledica invarijantnosti kinetičke energije u odnosu na paralelni prenos, rotaciju koordinatnog sistema i „translaciju" vremena.

Ранислав Булатовић,
Машински факултет
Цетињски пут бб,
81000 Титоград