TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 12 pp. 79—88, 1986, UDK 517.925.42

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВОЙНОГО И СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Г. А. Леонов, Р. И. Алидема

(Поступило 23. 12. 1985.)

Развитый в работах [1—2] метод нелокального сведения — это совокупность приемов и результатов, позволяющих проводить эффективное построение функций Ляпунова, использующее траектории более простих, чем исследуемая, систем.

В настоящей статье метод нелокального сведения будет модифицирован таким образом, чтобы оказалось возможным его применение к исследованию глобальной устойчивости фазовых систем со многими угловыми координатами. Здесь в качестве таких фавозых систем будут рассмотрены двойной маятник и связанные маятники. Актуальность нелокального изучения дифференциальных уравнений движения двойного и связанных маятников вызвана тем обстоятельством, что аналогичными уравнениями описывается динамика двузвонного манипулятора, радиотехнических и электромеханических систем взаимной синхронизации [3—5].

Определение 1. Система дифференциальных уравнений называется глобально асимптотический устойчивой, если любое ее решение стремится при $t \to +\infty$ к некоторому положению равновесия [2].

Определение 2 [2]. Система дифференциальных уравнений называется дихотомичной, если любое ее ограниченное решение стремится при $t \to +\infty$ к некоторому положению равновесия.

Термин глобальная асимптотическая устойчивость для маятников означает, что движение маятника при любых начальных условиях асимптотический приближается к некоторому положению равновесия.

Термин дихотомичности означает для маятников, что для маятника невозможны колибательные движения, кроме круговых.

Введем в рассмотрение положительные числа λ и ε, непрерывно дифференцируемые 2π — периодические функции $\Psi(\sigma)$, $\varphi_j(\sigma_j)$, $j = 1, \dots, m$, $\sigma \in R^1$, $\sigma_j \in R^1$, непрерывно дифференцируемую функцию $W(x)$, $x \in R^n$, непрерывно дифференцируемые функции $\sigma(t)$, $\sigma_j(t)$, и вектор-функцию $x(t)$.

Будем предполагать, что $\Psi(\sigma)$ имеет ровно два нуля на множестве

$$(0, 2\pi] \ \sigma = 0 \text{ и } \sigma = \sigma_0, \text{ причем } \Psi'(0) < 0, \ \Psi'(\sigma_0) < 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\sigma)\, d\sigma \leqslant 0.$$

Лемма. Пусть уравнение $\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + \Psi(\theta) = 0$ устойчиво по Лагранжу. Тогда на промежутке $[\sigma_0, 2\pi]$ — существует единственное число $\mathfrak{D}(a)$, удовлетворяющее условиям $F(\mathfrak{D}(a)) = F(\nu) = 0$, где $F(\sigma)$ — решение уравнения

$$\frac{dF}{d\sigma} = -a - \frac{\Psi(\sigma)}{F} \tag{1}$$

и ν — корень уравнения

$$\int_{\nu}^{0} \Psi(\sigma)\,d\sigma = \int_{\mathfrak{D}(a)}^{2\pi} \Psi(\sigma)\,d\sigma$$

на промежутке $[0, \sigma_0]$.

Доказательство. Существование числа $\mathfrak{D}(a)$, удовлетворяющего условиям леммы, очевидно. Для доказательства единственности заметим, что из условий леммы следует равенство

$$a\int_{\nu}^{\mathfrak{D}(a)} F(\sigma)\,d\sigma = -\int_{0}^{2\pi} \Psi(\sigma)\,d\sigma,$$

где $F(\sigma)$ — решение (1) с начальными данными $F(\nu) = 0$. Предполагая теперь, что найдется $d(a) < \mathfrak{D}(a)$, удовлетворяющее равенствам $F_1(d(a)) = F_1(\nu_1) = 0$, где $F_1(\sigma)$ — решение (1), а ν_1 — корень уравнения

$$\int_{\nu_1}^{0} \Psi(\sigma)\,d\sigma = \int_{d(a)}^{2\pi} \Psi(\sigma)\,d\sigma$$

на промежутке $[0, \sigma_0]$, из единственности решений уравнения (1) в области $\{F < 0\}$ получим оценку $F(\sigma) > F_1(\sigma)$, $\forall\, \sigma \in [\nu_1, d(a)]$. Поэтому

$$a\int_{\nu_1}^{d(a)} F_1(\sigma)\,d\sigma < a\int_{\nu}^{\mathfrak{D}(a)} F(\sigma)\,d\sigma = -\int_{0}^{2\pi} \Psi(\sigma)\,d\sigma.$$

С другой стороны и

$$a\int_{\nu_1}^{d(a)} F_1(\sigma)\,d\sigma = -\int_{0}^{2\pi} \Psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Полученное противоречие доказывает, что не существует числа $d(a) \in [\sigma_0, \mathfrak{D}(a))$, удовлетворяющего условиям леммы. Аналогичным образом рассматрвается случай $d(a) \in (\mathfrak{D}(a), 2\pi]$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) уравнение $\ddot{\theta} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\,\dot{\theta} + \Psi(\theta) = 0$ устойчиво по Лагранжу,

2) $W(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in R^n$,

3) $\dot{W}(x(t)) + 2\lambda W(x(t)) + \varepsilon[\dot{\sigma}(t)]^2 + \Psi(\sigma(t))\,\dot{\sigma}(t) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\sigma_j(t))\,\dot{\sigma}_j(t) \leqslant 0, \quad \forall\, t \in R^1,$

4) $\int\limits_0^u \varphi_j(u)\,du \leqslant 0, \quad \forall\, u \in R^1, \quad \forall\, j, \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi_j(u)\,du = 0, \quad \forall\, j,$

5) $\int\limits_{\mathfrak{D}(2\sqrt{\lambda\varepsilon}}^{2\pi} \Psi(\sigma)\,d\sigma > \sum_{j=1}^{m} \max_u \left|\int\limits_0^u \varphi_j(u)\,du\right|,$

6) функция $\dot\sigma(t)$ ограничена на $(0, +\infty)$.

Тогда функция $\sigma(t)$ ограничена на интервале $(0, +\infty)$.

Доказательство. Хорошо известно [6], что из условия 1) теоремы следует существованые числа $a < 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ и 2π — периодического решения $F(\sigma)$ уравнения

$$F' F + aF + \Psi(\sigma) = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющее условиям $F(0) = F(2\pi) = 0$, $F(\sigma) > 0$, $\forall\, \sigma \in (0, 2\pi)$.

Рассмотрим далее функцию

$$V(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\,du - \frac{1}{2} F(\sigma)^2,$$

которая в силу условий 3) и 4) теоремы удовлетворяет неравенству

$$\dot V(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) + 2\lambda V(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) \leqslant$$

$$\leqslant -\varepsilon[\dot\sigma(t)]^2 - \lambda F(\sigma(t))^2 - \Psi(\sigma(t))\,\dot\sigma(t) - \frac{1}{2} F(\sigma(t))^2]'\,\dot\sigma = -\varepsilon[\dot\sigma(t)]^2 -$$

$$-\lambda F(\sigma(t))^2 + aF(\sigma(t))\,\dot\sigma(t) \leqslant -\delta F(\sigma(t))^2, \ \forall\, t \in R^1,$$

где $\delta = \lambda - \dfrac{a^2}{4\varepsilon}$. Отсюда следует, что либо существует число τ, для которого $V(x(\tau), \sigma(\tau), \sigma_1(\tau), \ldots, \sigma_m(\tau)) < 0$, либо

$$\int\limits_0^{+\infty} F(\sigma(t))^2\,dt < +\infty.$$

В последнем случае из условия 6) теоремы можно сделать вывод о том, что $\lim\limits_{t\to+\infty} F(\sigma(t)) = 0$. Но тогда существует $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t) = 2\pi\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое целове число и, следовательно, теорема в этом случае доказана.

Если же $V(x(\tau), \sigma(\tau), \sigma_1(\tau), \ldots, \sigma_m(\tau)) < 0$, то из неравенства $\dot V + 2\lambda V \leqslant 0$ следует, что $V(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) < 0$, $\forall\, t \geqslant \tau$. Предполагая далее, что $\sigma(t)$ неограничена, будем не умаляя общности считать, что $\sigma(\tau) = 2\pi\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — некоторое целое число.

Рассмотрим функцию

$$G(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\,du + \int\limits_0^{\sigma} \Psi(u)\,du,$$

которая в силу условий 2) и 3) теоремы удовлетворяет неравенству

$$\dot{G}(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) \leqslant 0, \quad \forall\, t \in R^1.$$

Из условий 2) и 4) теоремы и неравенства

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\sigma)\, d\sigma \leqslant 0$$

сразу получим, что функция $\sigma(t)$ ограничена снизу на интервале $(0, +\infty)$.

Рассмотрим далее функцию

$$U_1(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{m}^{j=1} \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\, du - \frac{1}{2} g_1(\sigma)^2,$$

где $g_1(\sigma)$ — решение уравнения

$$F' F + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\, F + \Psi(\sigma) = 0 \tag{3}$$

с начальными данными $g_1(\sigma(\tau)) = 0$. Функция U_1 определена на $\sigma \in [\sigma(\tau), \beta_1]$ где число β_1 таково, что $\beta_1 \in [\sigma(\tau), \sigma(\tau) + 2\pi]$, $g_1(\sigma) > 0$, $\forall\, \sigma \in (\sigma(\tau), \beta_1)$, $g_1(\beta_1) = 0$.

Пусть далее

$$Q_1(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\, du + \int_{\beta_1}^{\sigma} \Psi(u)\, du.$$

Обозначив через γ_2 ближайший к β_1 на $[\beta_1, +\infty)$ корень уравнения

$$\int_{\beta_1}^{\gamma_2} \Psi(u)\, du = 0,$$

введем в рассмотрение функцию

$$U_2(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\, du - \frac{1}{2} g_2(\sigma)^2,$$

где $g_2(\sigma)$ — решение (3) с начальными данными $g_2(\gamma_2) = 0$. Функция U_2 определена на $\sigma \in [\gamma_2, \beta_2]$ где число β_2 таково, что $\beta_2 \in [\gamma_2, \gamma_2 + 2\pi]$, $g_2(\sigma) > 0$, $\forall\, \sigma \in (\gamma_2, \beta_2)$, $g_2(\beta_2) = 0$.

Пусть далее

$$Q_2(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\, du + \int_{\beta_2}^{\sigma} \Psi(u)\, du.$$

Обозначив через γ_3 ближайший к β_2 на $[\beta_2, +\infty)$ корень уравнения

$$\int_{\beta_2}^{\gamma_3} \Psi(u)\, du = 0,$$

можно ввести функцию U_3. Продолжая этот процесс определения U_k и Q_k, на k-ом шаге определим

$$U_k(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\, du - \frac{1}{2} g_k(\sigma)^2,$$

где $g_k(\sigma)$ — решение (3) с начальными данными $g_k(\gamma_k) = 0$. Функция U_k определена на $[\gamma_k, \beta_k]$, где число β_k таково, что $\beta_k \in [\gamma_k, \gamma_k + 2\pi]$, $g_k(\sigma) > 0$, $\forall\, \sigma \in (\gamma_k, \beta_k)$, $g(\gamma_k) = 0$.

Пусть далее

$$Q_k(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = W(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(u)\, du + \int_{\beta_k}^{\sigma} \Psi(u)\, du$$

и γ_{k+1} — ближайший к β_k на $[\beta_k, +\infty)$ корень уравнения

$$\int_{\beta_k}^{\gamma_{k+1}} \Psi(u)\, du = 0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{k \to \infty} \beta_k = +\infty$ и поэтому для всех x, σ, σ_j, $(j = 1, \ldots, m)$, можно определить функцию $U(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ следующим образом $(\gamma_1 = \sigma(\tau))$:

$$U(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = V(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m), \ \forall\, \sigma \in (-\infty, \sigma(\tau)],$$

$$U(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = U_k(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m), \ \forall\, \sigma \in [\gamma_k, \beta_k],$$

$$U(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = Q_k(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m), \ \forall\, \sigma \in [\beta_k, \gamma_{k+1}].$$

Легко видеть, что $U(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ дифференцируема и при любом t либо

$$\dot{U}(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) + 2\lambda U(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) \leqslant 0,$$

либо $\dot{U}(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) \leqslant 0$. Отсюда и из неравенства $U(x(\tau), \sigma(\tau), \sigma_1(\tau), \ldots, \sigma_m(\tau)) < 0$ следует, что $U(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) < 0$, $\forall\, t \geqslant \tau$.

Из определения $\mathfrak{D}(2\sqrt{\lambda\varepsilon})$ и β_k следует, что

$$\lim_{k \to \infty} [\beta_k - 2\pi(k-1) - 2\pi\mathcal{N}] = \mathfrak{D}(2\sqrt{\lambda\varepsilon}). \tag{4}$$

Возьмем теперь число k настолько большим, чтобы

$$\int_{\beta_k}^{2k\pi} \Psi(\sigma)\, d\sigma > \sum_{j=1}^{m} \max_u \left| \int_0^u \varphi_j(u)\, du \right| \tag{5}$$

Это неравенство при достаточно больших k вытекает из (4). Из (5), условия 2) теоремы и определения функции Q_k следует, что

$$U(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = Q_k(x, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) \geqslant 0 \ \text{при}\ \sigma = 2k\pi.$$

Последнее неравенство противоречит оценке $U(x(t), \sigma(t), \sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) < 0$, $\forall\, t \geqslant \tau$, и неограниченности $\sigma(t)$.

Таким образом $\sigma(t)$ ограничена на $(0, +\infty)$.

При получении оценок для $\mathfrak{D}(a)$ можно использовать методы, изложенные в [6]. Например, для $F(\sigma)$, удовлетворяющего (2) и $F(\nu) = 0$, где $\nu \in [0, \sigma_0]$, имеют место неравенства [6]:

$$F(\sigma) < \left((2 \int_{\sigma}^{\nu} \Psi(\sigma)\, d\sigma\right)^{1/2}, \quad \forall\ \sigma \in [\nu, \sigma_0],$$

$$F(\sigma) > \left[a^2 (\gamma - \sigma)^2 + 2 \int_{\sigma}^{\gamma} \Psi(\sigma)\, d\sigma\right]^{1/2}, \quad \forall\ \sigma \in [\sigma_0, \gamma],$$

где $\gamma \in [\sigma_0, 2\pi]$ и таково, что $F(\gamma) = 0$. Отсюда следует, что

$$\left[a^2 (\gamma - \sigma_0)^2 + 2 \int_{\sigma_0}^{\gamma} \Psi(\sigma)\, d\sigma\right]^{1/2} < \left(2 \int_{\sigma_0}^{\nu} \Psi(\sigma)\, d\sigma\right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$a^2 (\gamma - \sigma_0)^2 + 2 \int_{\nu}^{\gamma} \Psi(\sigma)\, d\sigma < 0$$

и если

$$\int_{\nu}^{0} \Psi(\sigma)\, d\sigma = \int_{\gamma}^{2\pi} \Psi(\sigma)\, d\sigma, \tag{6}$$

то

$$a^2 (\gamma - \sigma_0)^2 + 2 \int_{0}^{2\pi} \Psi(\sigma)\, d\sigma < 0. \tag{7}$$

Итак, если $F(\nu) = F(\gamma) = 0$ и выполнено (6), то имеет место (7). Отсюда следует, что

$$\mathfrak{D}(a) \leqslant 2\pi, \quad \mathfrak{D}(a) < \sigma_0 + \frac{1}{a}\left[-2 \int_{0}^{2\pi} \Psi(\sigma)\, d\sigma\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения движения двойного маятника [6]:

$$\begin{gathered}
(m_1 + m_2)\, l_1^2\, \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\, \ddot\theta_2 = m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \dot\theta_2^2 - \\
- (m_1 + m_2)\, g l_1 \sin\theta_1 + L_1 l_1 - \alpha\, l_1^2 (m_1 + m_2)\, \dot\theta_1 - \alpha\, m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\, \dot\theta_2 \\
m_2 l_2^2\, \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\, \ddot\theta_1 = - m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\, \dot\theta_1^2 - \\
- m_2 g l_2 \sin\theta_2 + L_2 l_2 - \alpha\, m_2 l_2^2\, \dot\theta_2 - \alpha\, m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\, \dot\theta_1.
\end{gathered} \tag{9}$$

Предполагая далее, что $L_2 = 0$, $0 < L_1 < (m_1 + m_2) g$, рассмотрим задачу о плобальной асимптотической устойчивости системы (9). Для этого сделав замену $\sigma = \theta_1 - \theta_0$, $\sigma_1 = \theta_2 - \pi$, $y_1 = \dot\theta_1$, $y_2 = \dot\theta_2$, где $\theta_0 = -\pi - \arcsin(L_1/(m_1 + m_2) g)$, введем в рассмотрение функции

$$W(x) = B(cby_1^2 + y_2^2 + 2 by_1 y_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)),$$

$$\Psi(\sigma) = 2 b [(m_1 + m_2) g \sin(\sigma + \theta_0) - L_1], \ \varphi_1(\sigma_1) = 2 m_2 g \sin(\sigma_1 + \pi).$$

Здесь

$$x = \begin{Vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}, \qquad B = m_2 l_2, \quad b = \frac{l_1}{l_2}, \quad c = \frac{(m_1 + m_2) l_1}{m_2 l_2}.$$

Если положить $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, $\varepsilon = 2(\alpha - \lambda) B b (c - b)$, то будут выполнены условия 2)—4) теоремы 1. Из условия $c > b$ следует, что найдутся положительные числа γ и R, для которых $\dot W(x(t)) + \gamma W(x(t)) \leqslant R$. Здесь $x(t)$ — решение (9). Отсюда следует ограниченность на $(0, +\infty)$ величины $\dot\sigma(t) = y_1(t)$. Поскольку с помощью функции

$$W(x) + 2 b \int\limits_0^{\theta_1} \Psi(\theta_1 - \theta_0)\, d\theta_1 + 2 \int\limits_0^{\theta_2} \varphi_1(\theta_2 - \pi)\, d\theta_2$$

легко установить дихотомичность (9), для глобальной асимптотической устойчивости (9) в силу теоремы 1 достаточно, чтобы устойчиво по Лагранжу уравнение $\ddot\theta + \alpha \sqrt{2 B b (c - b)}\, \dot\theta + \Psi(\theta) = 0$ и выполнялось условия 5) теоремы 1. Поэтому используя теорему 1.8.3(a) [6] и оценку (8) получим следующее утверждение

Теорема 2. Если $\alpha^2 B(c - b)(2\pi - \sigma_0)^2 \geqslant \pi L_1$, $d < 2\pi$,

$$\int\limits_d^{2\pi} b[(m_1 + m_2) g \sin(\sigma + \theta_0) - L_1]\, d\sigma < 2 m_2 g,$$

где $d = \sigma_0 + \sqrt{2\pi L_1}/\alpha \sqrt{B(c - b)}$, то система (9) глобально асимптотически устойчива.

Легко видеть, что при L_1 и α малы по отношению к другим параметрам системы, условия теоремы 2 принимают следующий простой вид

$$\alpha^2 > \frac{2 L_1}{\pi m_1 l_1}, \frac{l_1(m_1 + m_2)}{m_2 l_2}\left(1 + \cos \sqrt{\frac{2\pi L_1}{\alpha^2 m_1 l_1}}\right) > 2. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь уравнения движения двух связанных маятников [6]:

$$\begin{aligned} &\ddot\theta_1 + \alpha_1 \dot\theta_1 + \beta_1 \sin\theta_1 - L_1 = \gamma_1 F(\dot\theta_2 - \dot\theta_1) + k_1 \eta(\theta_2 - \theta_1) \\ &\ddot\theta_2 + \alpha_2 \dot\theta_2 + \beta_2 \sin\theta_2 - L_2 = -\gamma_2 F(\dot\theta_2 - \dot\theta_1) - k_2 \eta(\theta_2 - \theta_1), \end{aligned} \tag{11}$$

где α_j, β_j, γ_j, k_j — положительные числа, $F(\xi)$, $\eta(\xi)$ — нечотные дифференцируемые функции, характеризующие связи между маятниками. Будем предполагать далее, что $F(\xi)$ ограничена на R^1, $\eta(\xi) - 2\pi$ — периодична, $F(\xi)\,\xi \geqslant 0$, $\forall\ \xi \in R^1$, $\eta(\xi)\,\xi \geqslant 0$, $\forall\ |\xi| \in [0, \pi]$, $L_2 = 0$, $0 < L_1 < \beta_1$, $k_1\,\gamma_1^{-1} = k_2\,\gamma_2^{-1}$.

Сделав замену $\sigma = \theta_1 - \theta_0$, $\sigma_2 = \theta_2 - \pi$, $\sigma_2 = \theta_2 - \theta_1 - \pi$, $y_1 = \dot{\theta}_1$, $y_2 = \dot{\theta}_2$, где $\theta_0 = -\pi - \arcsin \dfrac{L_1}{\beta_1}$, введем в рассмотрение функции

$$W(x) = y_1^2 + \frac{k_1}{k_2}\,y_2^2,\ \Psi(\sigma) = \beta_1 \sin(\sigma + \theta_0) - L_1, \qquad x = \left\| \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|.$$

$$\varphi_1(\sigma_1) = \beta_2 \sin(\sigma_1 + \pi),\ \varphi_2(\sigma_2) = k_1\,\eta(\sigma_2 + \pi),$$

Предполагая далее, что $2\,\alpha_2 > \alpha_1$, выберем $\lambda = \varepsilon = \dfrac{\alpha_1}{2}$. В этом случае выполнены условия 2)—4) теоремы 1. Ограниченность $\dot{\sigma}(t)$ здесь следует из ограниченности $F(\xi)$.

Поскольку с помощью функции

$$W(x) + 2\int\limits_0^{\theta_1} [\beta_1 \sin \xi - L_1]\, d\,\xi + 2\,\frac{k_1}{k_2} \int\limits_0^{\theta_2} \beta_2 \sin \xi\, d\,\xi + 2\,k_1 \int\limits_0^{\theta_1 - \theta_2} \eta(\xi)\, d\,\xi$$

легко установить дихотомичность системы (11), для глобальной асимптотической устойчивости в силу теоремы 1 достаточно, чтобы было устойчиво по Лагранжу уравнение $\ddot{\theta} + \alpha_1\,\dot{\theta} + \beta_1 \sin\theta - L_1 = 0$ и выполнено условие 5) теоремы 1. Также как и ранее, используя теорему 1.8.3(*a*) [6] и оценку (8) сразу получим следующее утверждение

Теорема 3. Если $\alpha_1^2\,(2\,\pi - \sigma_0)^2 \geqslant 2\,\pi\,L_1$, $d < 2\,\pi$,

$$\int\limits_d^{2\pi} [\beta_1 \sin(\sigma + \theta_0) - L_1]\, d\,\sigma > 2\,\frac{k_1}{k_2}\,\beta_2 + k_1 \int\limits_0^{\pi} \eta(\xi)\, d\,\xi,$$

где $d = \sigma_0 + \sqrt{4\,\pi\,L_1}\,/\,\alpha_1$, то система (11) глобально асимптотически устойчива.

При малых L_1 и α_1 условия теоремы 3 принимают следующий вид

$$4\,\alpha_2^2 \geqslant \alpha_1^2 \geqslant \frac{4\,L_1}{\pi},\quad \beta_1\left(1 + \cos\sqrt{\frac{4\,\pi\,L_1}{\alpha_1^2}}\right) > 2\,\frac{k_1}{k_2}\,\beta_2 + k_1 \int\limits_0^{\pi} \eta(\xi)\, d\,\xi.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонов Г. А. *Устойчивость и колебания фазовых систем*. Сибирский мат. журнал, № 5, 1975.

[2] Леонов Г. А. *Метод нелокального сведения в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем*. Автомат. и телемех., № 2, № 3, 1984.

[3] Попов Е. П., Верещагин А. С., Зенкевич С. Л. *Манипуляционные роботы*. Динамика и алгоритмы. М., „Наука", 1976.

[4] Вайман М. Н. *Исследование систем, устойчивых „в большом"*. М., „Наука", 1981.

[5] Зайцев В. В., Клибанова И. М. *Стабилизация автоколебанний в двойном кольце ФАП*. Радиотехника и электроника, № 7, 1977.

[6] Барбашин Е. А., Табуева В. А. *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством*. М., „Наука", 1969.

ON GLOBAL STABILITY OF DOUBLE AND CONNECTED PENDULUMS

Differential equations describing dynamics of double and connected pendulums are considered. For these equations the method of non-local reduction si developed. In several cases it allows to reduce the stability problem of pendulum with two degrees of freedom to studying the equation of pendulum with one degree of freedom. The method of non-local reduction gives conditions when pendulums asympthoticaly approach the equilibrium point for any initial conditions.

O GLOBALNOJ STABILNOSTI DVOJNOG I SVEZANIH KLATNA

Metod nelokalnog svođenja razvija se za dinamičke sisteme sa mnogim uglovnim koordinatama. Formulirana je apstraktna lema svođenja, na osnovu čega je dobijen sledeći rezultat.

Sistem jednačina dvojnog klatna (9) je globalno asimptotski stabilan pri malim L_1 i α, ako je $L_2 = 0$ i ispunjeni uslovi (10). Analogni rezultat je dobijen za svezanih klatna. Pri ovim uslovima kretanja klatana teže pri $t \to +\infty$ k stabilnom ravnotežnom položaju pri bilo kojim početnim otklonjenjima.

Г А. Леонов,
Математико-механический факультет Ленинградского государственного университета, СССР,

Р. И. Алидема,
Природно-математически факултет
38000 Приштина
Улпиана 5