

L'APPLICATION DES SYSTÈMES AUTOÉQUILIBRÉS DANS LA THÉORIE DES CONSTRUCTIONS¹⁾

J. D. Lazić, V. B. Lazić

(Reçu le 16. 01. 1986.)

Introduction

La paire des couples autoéquilibrés ainsi que les paires des forces autoéquilibrées dans la direction tangentielle et normale sur l'axe de la poutre courbe dans le plan sont introduites comme les forces généralisées, et les déformations locales sont obtenues comme les déplacements généralisés correspondants. C'est fait sur la base des expressions connues de la Résistance des matériaux [1].

Pour cette poutre dont le comportement est élastique on a développé la dérivée par rapport au deuxième argument des fonctions d'influence pour les déplacements généralisés, le moment de flexion, l'effort normale et l'effort tranchant dûs à l'action des forces unités dans la direction tangentielle et normale. A cette occasion les forces généralisées introduites ont été employées. L'influence de la déformation due aux efforts normaux et transchants a été prise en considération. Les dérivées mentionnées des fonctions d'influence trouvent leurs applications dans les équations intégrales de la théorie du second ordre quand on fait la linéarisation des conditions d'équilibre par rapport aux fonctions inconnues [2], [3].

On a démontré comment, par des fonctions d'influence, la déformation donnée de la poutre courbe, laquelle peut être „concentrée” (comme la rotation de la section encastree ou les dénivelations d'appui), a été introduite dans le calcul.

1 Les forces généralisées

Nous allons écrire le principe des forces virtuelles dans la forme:

$$\zeta_n(s) = \sum_p \int_L S_{pn}(\sigma, s) D_p(\sigma) d\sigma, \quad n, p = \varphi, v, u; \quad (1)$$

où ζ_n est la rotation de la section ($n = \varphi$), le déplacement dans la direction tangentielle ($n = v$) et dans la direction normale ($n = u$) en s ; $D_\varphi = \kappa$ (le changement de la courbure), $D_v = \varepsilon$ (l'allongement unitaire), $D_u = \theta$ (le changement de l'angle droit entre la section et l'axe de la poutre); $S_{\varphi n} = M_n$ (le moment

¹⁾ Cet article a été supporté par une bourse de la Communauté des Sciences de la République de Serbie.

de flexion), $S_{vn} = N_n$ (l'effort normal), $S_{un} = T_n$ (l'effort tranchant) en s dûs à la force virtuelle généralisée unité P_n en s (Fig. 1 a, b, c) correspondant au déplacement généralisé ζ_n .

L'action du moment de flexion unité en s peut être représentée comme l'action de la paire des couples autoéquilibrés unité $P_{\bar{\varphi}}$ dans ce point (Fig. 1d). Alors:

$$S_{\varphi\bar{\varphi}}(\sigma, s) = \delta(\sigma - s), \quad S_{v\bar{\varphi}} \equiv 0, \quad S_{u\bar{\varphi}} \equiv 0, \quad (2)$$

et l'expression (1) pour $n = \bar{\varphi}$ donne:

$$\zeta_{\bar{\varphi}}(s) = D_{\varphi}(s) = \kappa(s). \quad (3)$$

L'action de l'effort normal unité, c'est-à-dire l'effort tranchant unité, en s peut être présentée comme l'action de la paire des forces autoéquilibrées unités dans la direction tangentielle P_v , c'est-à-dire dans la direction normale P_n , dans ce point (Fig. 1e et f). Alors:

$$S_{\varphi\bar{v}}(\sigma, s) \equiv 0, \quad S_{v\bar{v}}(\sigma, s) = \delta(\sigma - s), \quad S_{u\bar{v}}(\sigma, s) \equiv 0, \quad (4)$$

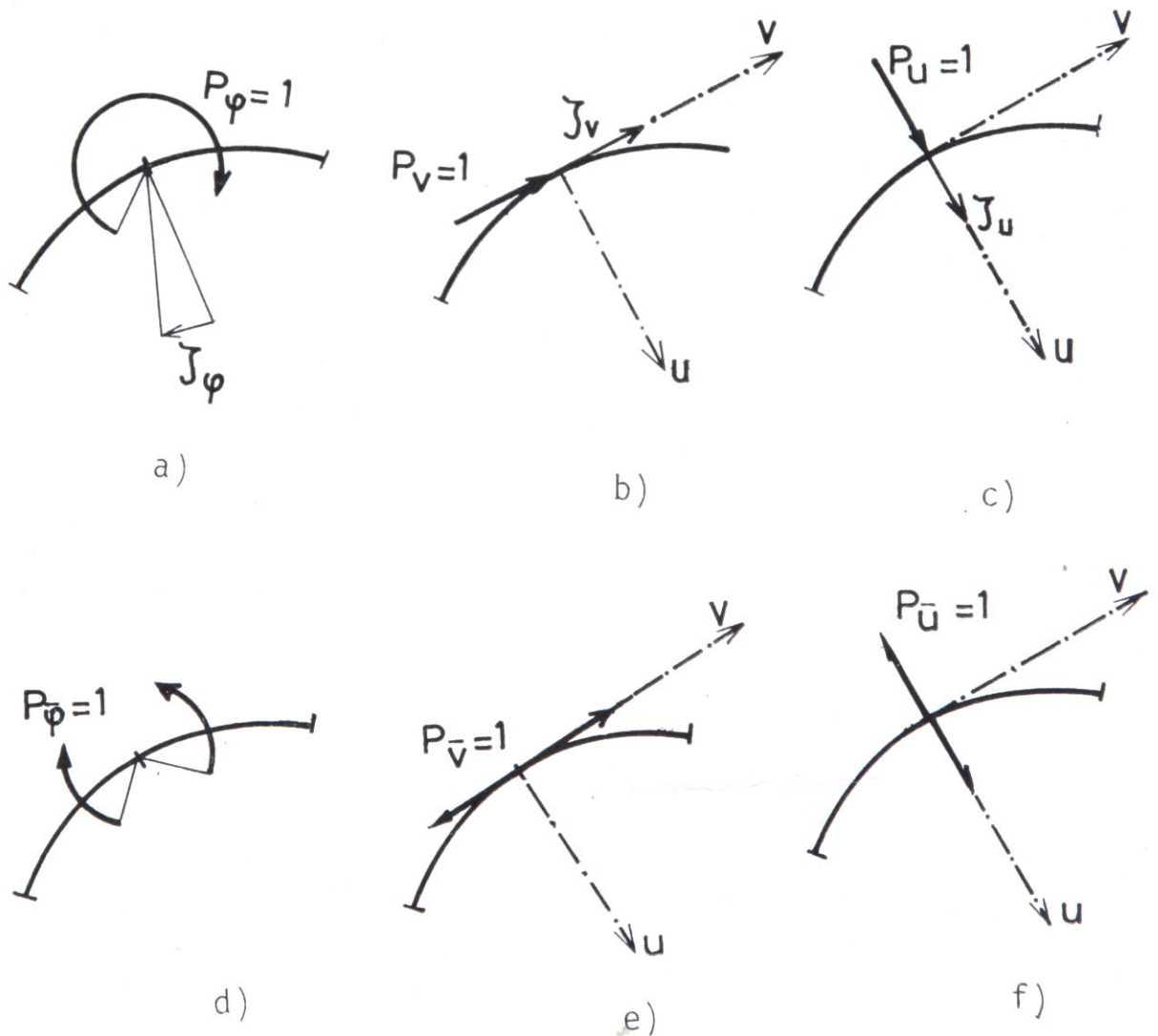


Fig. 1 Les forces généralisées

et:

$$\zeta_{\bar{v}}(s) = D_v(s) = \varepsilon(s); \quad (5)$$

c'est-à-dire:

$$S_{\varphi\bar{u}}(\sigma, s) \equiv 0, \quad S_{v\bar{u}}(\sigma, s) \equiv 0, \quad S_{u\bar{u}}(\sigma, s) = \delta(\sigma - s), \quad (6)$$

et:

$$\zeta_{\bar{u}}(s) = D_u(s) = \theta(s). \quad (7)$$

Nous concluons que aux paires des couples autoéquilibrées unités $P_{\bar{\varphi}}$ et aux paires des forces autoéquilibrées unités dans la direction tangentielle $P_{\bar{v}}$ et dans la direction normale $P_{\bar{u}}$, comme des forces généralisées, correspondent les déformations locales \varkappa , ε et θ respectivement, comme déplacements généralisés.

Les expressions suivantes sont connues:

$$D_p(s) = \frac{S_p(s)}{R_p(s)}, \quad p = \varphi, v, u, \quad (8)$$

où les déformations locales \varkappa , ε et θ sont exprimées à travers le moment de flexion ($S_{\varphi} = M$), l'effort normal ($S_v = N$), l'effort tranchant ($S_u = T$) et les rigidités correspondantes:

$$R_{\varphi}(s) = E\mathcal{J}(s), \quad R_v(s) = EA(s), \quad R_u(s) = GA_1(s), \quad (9)$$

respectivement. Par (8) nous écrivons l'expression (1) dans la forme connue:

$$\zeta_n(s) = \sum_p \int_L \frac{S_{pn}(\sigma, s) S_p(\sigma)}{R_p(\sigma)} d\sigma, \quad p = \varphi, v, u, \quad (10)$$

où le déplacement généralisé à présent embrasse les déformations locales, de sorte que $n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}$.

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti est valable pour les ensembles des forces généralisées introduites $P_{\bar{n}}$ et pour les déplacements généralisés D_p ($n, p = \varphi, v, u$) correspondants.

2 Les fonctions d'influence

Nous allons désigner par $K_{nf}(s, \sigma)$ la fonction d'influence pour le déplacement généralisé. La premier indice désigne le type du déplacement généralisé en s et le deuxième indice la force généralisée unité en σ .

Premièrement, nous allons écrire l'expression pour les fonction d'influence pour les déformations locales dues à la force généralisée unité P_f ($f = \varphi, v, u$). Sur la base de (8) on a:

$$K_{\bar{p}f}(s, \sigma) = \frac{S_{pf}(s, \sigma)}{R_p(s)}, \quad p, f = \varphi, v, u. \quad (11)$$

Par l'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti on obtient, de ces expressions, les fonctions d'influence pour les déplacements généralisés dûs à la force généralisée unités $P_{\bar{p}}$ ($p = \varphi, v, u$):

$$K_{\bar{p}f}(s, \sigma) = \frac{S_{pf}(\sigma, s)}{R_p(\sigma)}, \quad f, p = \varphi, v, u. \quad (12)$$

Dans le système isostatique les fonctions d'influence pour les déformations locales dues à la force généralisée unité P_p^- ($p = \varphi, v, u$) sont:

$$K_{f\bar{p}}(s, \sigma) = \delta_{fp} \frac{\delta(\sigma - s)}{R_p(\sigma)}, \quad \delta_{fp} = \begin{cases} 1 & \text{pour } f = p \\ 0 & \text{pour } f \neq p \end{cases} \quad f, p = \varphi, v, u. \quad (13)$$

Les fonctions d'influence pour le système hyperstatique on détermine, des expressions au-dessus, par les méthodes habituelles de la Théorie des constructions.

De (10) siut l'expression connue pour les fonctions d'influence:

$$K_{nf}(s, \sigma) = \sum_p \int_L \frac{S_{pn}(t, s) S_{pf}(t, \sigma)}{R_p(t)} dt, \quad p = \varphi, v, u, \quad (14)$$

valable pour les déplacements généralisés et pour les forces généralisées introduites, de sorte que $n, f = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}$. Ces cas particulières sont (11), (12) et (13), obtenus par l'utilisation de (2), (4) et (6).

Dans le système isostatique les fonctions d'influence pour le moment de flexion, l'effort normal et tranchant en s dûs à la force généralisée unité P_f en σ sont:

$$S_{p\bar{f}}(s, \sigma) = \delta_{pf} \delta(s - \sigma), \quad \delta_{pf} = \begin{cases} 1 & \text{pour } p = f \\ 0 & \text{pour } p \neq f \end{cases} \quad p, f = \varphi, v, u. \quad (15)$$

Par les méthodes habituelles de la Théorie des constructions on détermine, de ces expressions, les fonctions d'influence respectives pour le système hyperstatique.

3 Les dérivées des fonctions d'influence

Nous allons déterminer la dérivée des fonctions d'influence $K_{nf}(s, \sigma)$ par rapport à l'argument σ . $K_{nf}(s, \sigma)$ sont les fonctions d'influence pour les déplacements généralisés ($n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}$) ainsi que pour le moment de flexion ($n = M$), l'effort normal ($n = N$) et l'effort tranchant ($n = T$) en s dûs aux forces généralisées unités P_f dans la direction tangentielle et normale ($f = v, u$) en σ .

Nous allons écrire ces expressions à deux manières. Premièrement, nous allons écrire les relations connues entre les déformations et les déplacements:

$$\varphi(s) + \theta(s) = \frac{du(s)}{ds} + \frac{1}{\rho(s)} v(s), \quad (16)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{dv(s)}{ds} - \frac{1}{\rho(s)} u(s), \quad (17)$$

où la somme $\varphi(s) + \theta(s)$ représente le changement de pente de l'axe de la poutre en s .

Les relations entre les fonctions d'influence correspondantes suivant de (16) sont:

$$K_{\varphi n}(s, \sigma) + K_{\bar{u}n}(s, \sigma) = \frac{\partial K_{un}(s, \sigma)}{\partial s} + \frac{1}{\rho(s)} K_{vn}(s, \sigma), \quad (18)$$

et celles suivant de (17) sont:

$$K_{\bar{v}n}(s, \sigma) = \frac{\partial K_{vn}(s, \sigma)}{\partial s} - \frac{1}{\rho(s)} K_{un}(s, \sigma), \quad (19)$$

où $n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}$. Quand on applique le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti des dérivées recherchées sont obtenues:

$$\frac{\partial K_{nu}(s, \sigma)}{\partial \sigma} = K_{n\varphi}(s, \sigma) - \frac{1}{\rho(\sigma)} K_{nv}(s, \sigma) + K_{n\bar{u}}(s, \sigma), \quad (20)$$

et:

$$\frac{\partial K_{nv}(s, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\rho(\sigma)} K_{nu}(s, \sigma) + K_{n\bar{v}}(s, \sigma), \quad (21)$$

pour $n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}$. Par les expressions (11) et (13) on démontre que les relations obtenues sont relatives aux fonctions d'influence pour le moment de flexion ($n = M$) et pour l'effort normal et tranchant ($n = N, T$).

La seconde manière pour obtenir les dérivées de ces fonctions d'influence rend possible la détermination par la considération géométrique pour les fonctions d'influence aux cotés droites des expressions (20) et (21).

Nous partons de la définition:

$$\frac{\partial K_{nu}(s, \sigma)}{\partial \sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{K_{nu}(s, \sigma + \Delta\sigma) - K_{nu}(s, \sigma)}{\Delta\sigma}, \quad (22)$$

pour $n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}, M, N, T$, c'est-à-dire nous observons le cas quand la force $P_u = -\frac{1}{\Delta\sigma}$ est appliquée en σ , et la force $P_u = \frac{1}{\Delta\sigma}$ en $\sigma + \Delta\sigma$ (Fig. 2). L'élément d'arc est $\Delta\sigma = \rho\Delta\alpha$. Quand $\Delta\sigma \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\Delta\alpha \rightarrow 0$, le système équivalent en σ est:

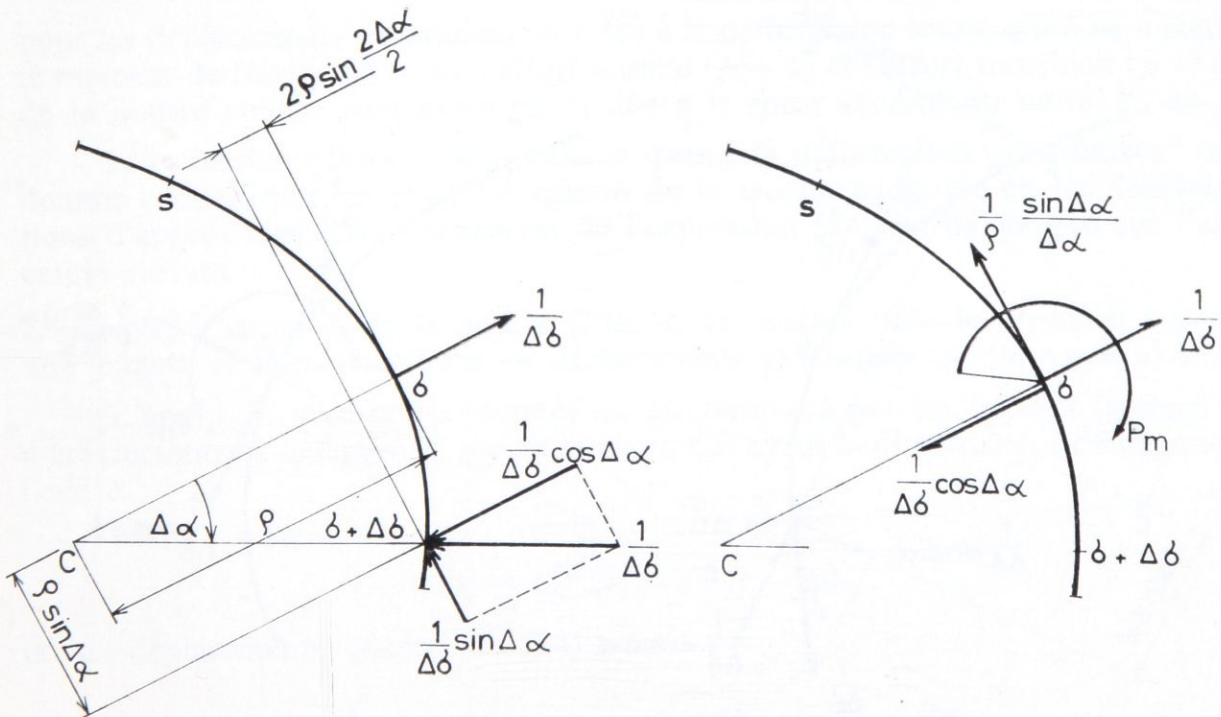


Fig. 2 La description géométrique de la dérivée de la fonction d'influence K_{nu} par rapport à l'argument σ

a) la couple concentrée unité:

$$P_\varphi = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\alpha}{\Delta\alpha} \left(\cos \Delta\alpha + 2 \sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2} \right) = 1;$$

b) la force concentrée:

$$P_v = -\frac{1}{\rho(\sigma)};$$

c) la paire des forces concentrées autoéquilibrées:

$$P_u = \delta(t - \sigma).$$

Sur la base de cela, nous écrivons immédiatement l'expression (20).

Dans le second cas nous formons l'expression:

$$\frac{\partial K_{nv}(s, \sigma)}{\partial \sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{K_{nv}(s, \sigma + \Delta\sigma) - K_{nv}(s, \sigma)}{\Delta\sigma}, \quad (23)$$

pour $n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}, M, N, T$, c'est-à-dire nous observons le cas quand la force $P_v = -\frac{1}{\Delta\sigma}$ est appliquée en σ et la force $P_v = \frac{1}{\Delta\sigma}$ en $\sigma + \Delta\sigma$ (Fig. 3).

Quand $\Delta\sigma \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\Delta\alpha \rightarrow 0$, le système équivalent en σ est:

a) la force concentrée:

$$P_u = \frac{1}{\rho(\sigma)};$$

b) la paire des forces concentrées autoéquilibrées:

$$P_v = \delta(t - \sigma);$$

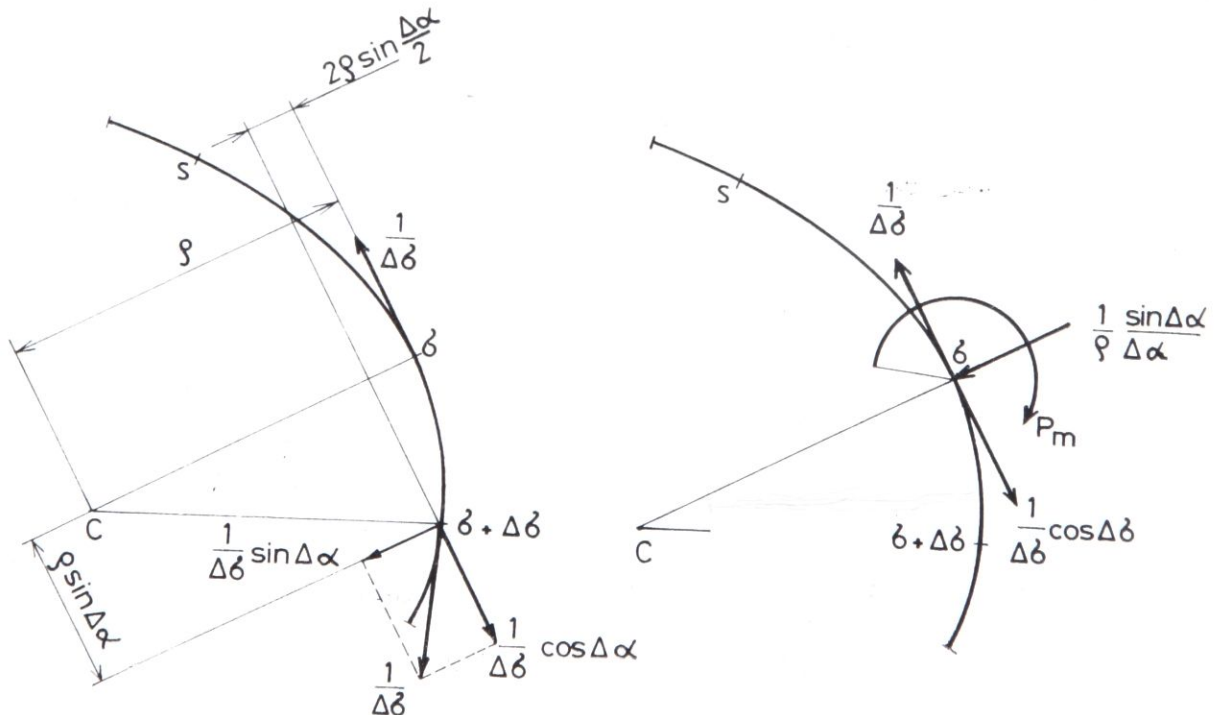


Fig. 3 La description géométrique de la dérivée de la fonction d'influence K_{nv} par rapport à l'argument σ

tandis que:

$$P_\varphi = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \Delta\alpha}{\Delta\alpha} - \cos \alpha \frac{\sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \right] = 0,$$

Sur la base de cela nous écrivons directement l'expression (21).

L'influence de la déformation due aux efforts normaux et tranchants est prise en compte et introduite par les membres derniers des expressions (20) et (21).

4 L'influence de la déformation donnée

Nous cherchons le déplacement généralisé ζ_n ($n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}$) de la poutre courbe dont la déformation est donnée par les fonctions $\kappa = \kappa_0(s)$, $\varepsilon = \varepsilon_0(s)$ et $\theta = \theta_0(s)$.

L'expression pour le déplacement généralisé est obtenue de (12), (13) et (8):

$$\zeta_n(s) = \sum_p \int_L S_{pn}(\sigma, s) D_p(\sigma) d\sigma, \quad n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}; \quad p = \varphi, v, u. \quad (24)$$

Cette expression a évidemment la même forme comme (1) exprimant le principe des forces virtuelles, la différence étant que dans ce cas les déformations de la poutre courbe sont données et non réelles.

Les fonctions d'influence:

$$K_{nD_p}(s, \sigma) = S_{pn}(\sigma, s), \quad n = \varphi, v, u, \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{u}; \quad p = \varphi, v, u \quad (25)$$

pour les déplacements généralisés en s dus à la déformation locale unité en σ sont: le moment de flexion ($p = \varphi$), l'effort normal ($p = v$) et l'effort tranchant ($p = u$) de la poutre courbe considérée en σ , dus à la force généralisée unité P_n en s .

L'expression (24) est aussi valable quand la déformation „concentrée” est donnée comme, par exemple, la rotation de la section encastree ou les dénivellations d'appui. Une telle application de l'expression (24) est démontrée sur l'exemple suivant.

L'exemple. L'appui B de la poutre (Fig. 4) se déplace dans la direction l pour une longueur c . Nous cherchons les déplacements généralisés ζ_n ($n = \varphi, v, u$) en s .

L'appui B , avec la coordonnée s_0 , est remplacé par les liaisons (comme il a été démontré à la figure 4) quand la barre CB ayant la direction l , a l'élongation finie c .

Alors:

$$\varepsilon_0(s) = \varepsilon_0^{CB}(s) = c \delta(s - s_0).$$

et les déplacements généralisés (24) sont:

$$\zeta_n(s) = \int_{L+CB} S_{vn}(\sigma, s) \varepsilon_0(\sigma) d\sigma = S_{vn}^{CB}(s_0, s) = cN_n^{CB}(s_0, s),$$

où $N_n^{CB}(s_0, s)$ est l'effort normal dans l'élément CB c'est-à-dire la réaction R_n^l en s_0 , dû aux forces généralisées $P_n = 1$ ($n = \varphi, v, u$) en s .

Selon les dénominations à la figure 4 les déplacements généralisés recherchés sont: =

$$\zeta_\varphi(s) = c \frac{1}{r_B} = \text{const.}, \quad \zeta_v(s) = c \frac{r_v(s)}{r_B}, \quad \zeta_u(s) = c \frac{r_u(s)}{r_B}.$$

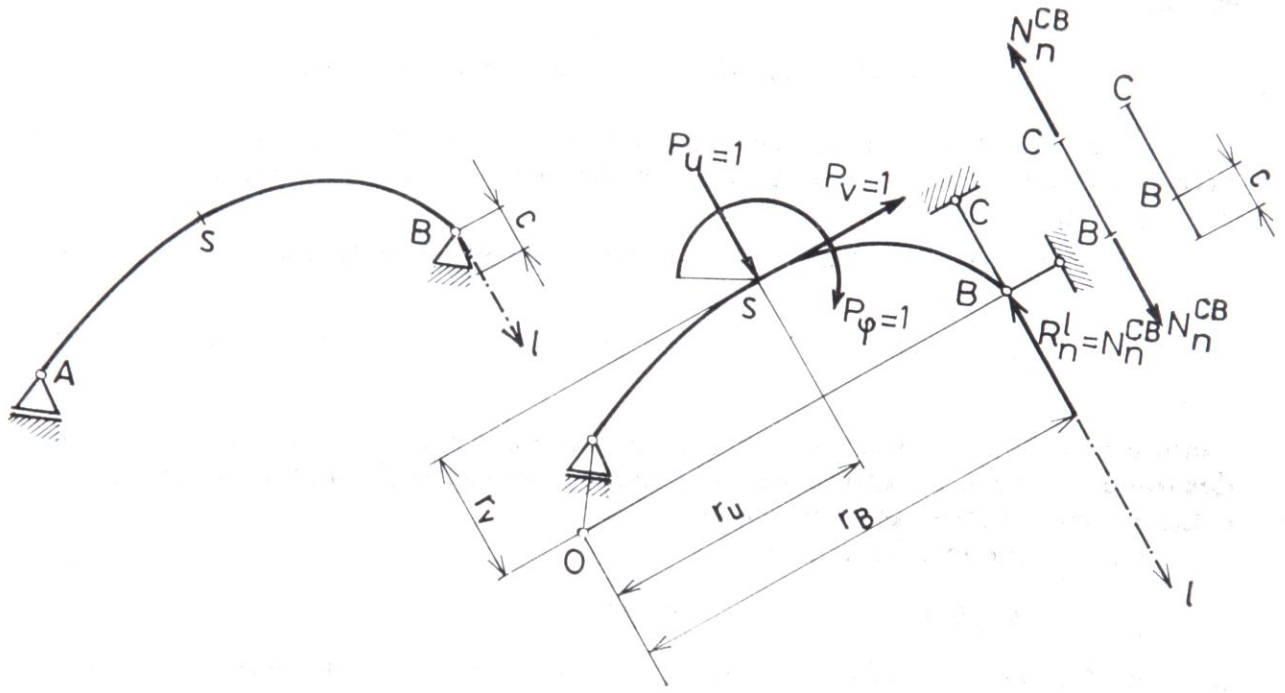


Fig. 4 Le déplacement d'appui B de la poutre AB dans la direction l

Notations

s, σ, t	la distance le long de l'axe
$\kappa = \kappa(s)$	le changement de la courbure
$\varepsilon = \varepsilon(s)$	l'allongement unitaire de la fibre moyenne
$\theta = \theta(s)$	le changement de l'angle droit entre la section et l'axe de la poutre courbe
$M = M(s)$	le moment de flexion positif dans le cas où les fibres intérieures de l'élément sont tendues
$N = N(s)$	l'effort normal positif dans le cas d'une traction
$T = T(s)$	l'effort tranchant positif dans le cas quand l'élément tourne dans la direction de l'aiguille de la montre
$\delta = \delta(s - \sigma)$	la conction de Dirac
E	le module d'élasticité

G	le module d'élasticité transversal
$A = A(s)$	l'aire de la section
$A_1 = A_1(s)$	l'aire de la section réduite pour le calcul de la déformation d'effort tranchant
$\mathcal{J} = \mathcal{J}(s)$	le moment d'inertie de la section
$\varphi = \varphi(s)$	la rotation de la section; $\kappa = -d\varphi/ds$
$u = u(s)$	la composante normale du déplacement
$v = v(s)$	la composante tangentielle du déplacement
$\rho = \rho(s)$	le rayon de courbure de l'axe avant la déformation de la poutre courbe

B I B L I O G R A P H I E

- [1] Courbon J.: *Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, tome 1 (1964) et tome 2 (1965).
- [2] Radenkovic D., Lazić J.: *Calcul pratique des arcs de grande portée*, Annales de l'I.T.B.T.P., série TMC/173, novembre 1974.
- [3] Bolotin V. V.: *Stabilité dynamique des systèmes élastiques*, (en russe), Moscou, 1966.

APPLICATION OF THE BALANCED SYSTEMS
IN THE THEORY OF STRUCTURES

A pair of balanced couples and pairs of balanced forces directed toward the normal or the tangent of the curved beam lying in a plane are defined. On the basis of the principle of virtual forces it is shown that the local deformations are the corresponding generalized displacements.

These generalized forces are applied in the Theory of Structures. First, for determination of the derivative (referring to the second argument) of the influence functions for generalized displacements or for cross section resultants of the elastic curved beam due to the unit force in the normal or in the tangential direction. The influence of the axial forces and the shear forces on a beam deformation is taken into account. The mentioned derivatives of the influence functions are used in the second order theory. Second, for determination of a generalized displacement of a curved beam due to a known „concentrated” deformations. This is shown in the example.

PRIMENA RAVNOTEŽNIH SISTEMA U TEORIJI KONSTRUKCIJA

Par ravnotežnih spregova i parovi ravnotežnih sila u pravcu normale i tangente na osu krivog štapa u ravni uvedeni su kao generalisane sile, čija su odgovarajuća generalisana pomeranja deformacijske veličine.

Ove generalisane sile primenjene su u teoriji konstrukcija. Prvo, za određivanje izvoda, po drugom argumentu, uticajnih funkcija za generalisana pomeranja i za sile u preseku usled jedinične sile u pravcu tangente ili normale na osu elastičnog krivog štapa, kada se uzmu u obzir uticaji normalnih i transverzalnih sila na deformaciju štapa. Ovi izvodi uticajnih funkcija koriste se u teoriji drugog reda. Drugo, za određivanje generalisanog pomeranja krivog štapa ako je zadata njegova „koncentrisana” deformacija. To je pokazano na jednom primeru.

J. D. Lazić
Građevinski fakultet u Beogradu
B. revolucije 73
11000 Beograd, YU.

V. B. Lazić
Saobraćajni fakultet u Beogradu
V. Stepe 305
11000 Beograd, YU