TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 12 pp. 41—58, 1986, UDK 626.07

МНОГОЧАСТОТНЫЕ ВЫНУЖДЕНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНЫИМ НЕПРАВИЛЬНОСТЯМЫ (АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)

Хедрих К. Митич С., Павлович Р., Козич П.

(Поступило 5. 02. 1985.)

В работе построены первые асимптотические приближения для функции напряжений и перемещения точек в срединной поверхности, для четири--частотного режима нелинейных вынужденный колебаний тонкой оболочки с постоянной крывизной и начальними неправильностями в форме срединной поверхности оболочки на которую приложена четири-частотная распределеная по срединной поверхности вынужденна сила с постояными или медленно-изменяющимися частотамы ν_1, ν_2, ν_3 и ν_4 каждая в резонансном интервале соответствующей собственной частоты „невозмущеного'' базного колебания. Относительные деформации оболочки не малы и оболочка свободно опирается по прямоугольному контуру.

Начальные условия и начальные неправильности разрешают построение четири-частотного режима колебаний что соответствует числу частот вынужденной силы. Решение предполагается в форме восем-параметрического семейства блиского собственным линейным колебаниям „невозмущеного'' базного решения.

Построено выражение для функции напряжений и получена систима четири обыкновенных дифференциальных уравнений, которие соответствуют числу частотности вынужденной силы и числу фундаментальных функций в начальных условиях.

Для решение полученой системы использована идея асимптотической методы Крылова-Боголюбова-Митропольского и построена система дифференциальнных уравнений первого приближения для соответствующих амплитуд и фаз много-частотного режима колебаний.

Пользуясь выведеными приближениями системы дифференциальных уравнений для амплитуд и фаз четири-частотного режима колебаний, сделан анализ взаимного влияния гармоник и влияния начальных неправилности оболочки в условиях стационарных и нестационарных амплитуд и фаз.

A. Основные допущения и уравнения колебания оболочки

В пределах сделанных допущений в [1] для колебания тонкой упругой оболочки с начальными неправильностямы в форме срединной поверхности:

1. оболочка от идеально упругого, однородного, и изотропного материала; 2. толщина оболочки значительно меньше двух других измерений и в сравнении с кривызни срединной поверхности $h/R \leqslant 1/20$; 3. относительные деформации не малы; 4. линейний элемент ортогональний на срединную поверхность оболочки остается ортогональним; 5. перемещения $w(x, y, t)$ точек срединной поверхности оболочки порядка толщини оболочки; 6. перемещениями точек срединной поверхности оболочки по направлениям координатных линий будем пренебрегать, и рассматривать динамический процесс без учета распространения упругих волн в оболочке, отбрасивая инирционные члени этых перемещений; 7. вводим функцию напряжений $\Phi(x, y, t)$ в срединной поверхности; 8. главние кривизны срединной поверхности k_x и k_y постоянны; 9. оболочка свободно опирается по прямоугольному контуру; 10. начальние неправильнности $w_0(x, y)$ срединной поверхности оболочки сравнимы с ее толщиной и согласны с краевыми условиями.

С этими допущениями уравнение совместности деформаций и уравнение движения элемента оболочки имеют вид:

$$\frac{1}{E}\nabla^4 \Phi(x, y, t) = -\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial w^2}{\partial x \partial y}\right)^2\right] - \left[k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \\ + \left[\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}\right)^2\right] + \left[k_x \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}\right] \tag{1}$$

$$\frac{D}{h}\nabla^4 [w(x, y, t) - w_o(x, y)] = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \\ + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q(x, y, t)}{h} - 2\mu_o \frac{\partial w}{\partial t} \tag{2}$$

где $D = \dfrac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$, E — модуль упругости, μ — Poisson-ов модуль, μ_0 — коэффициент силы сопротивления, $q(x, y, t) = \overline{q}\,[x, y, \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \theta_4(t)]$ — приложеная четиричастотная распределеная по срединной поверхности вынужденная сила с постоянными частотамы или переменными:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \nu_1 \in Rez\,\overline{\omega}_{11}; \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = \nu_2 \in Rez\,\overline{\omega}_{12};$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \nu_3 \in Rez\,\overline{\omega}_{21}; \qquad \frac{d\theta_4}{dt} = \nu_4 \in Rez\,\overline{\omega}_{22};$$

которые в соответствующих интервалах частот ,,невозмущеного'' базного решения.

Уравнениямы (1) и (2) прилагаем следующие краевые условия для свободно опертой по контуре оболочки:

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = a \end{matrix}\right| \; w = 0 \quad M_x = 0 \qquad\qquad \left.\begin{matrix} y = 0 \\ y = b \end{matrix}\right| \; w = 0 \quad M_y = 0 \tag{3}$$

Начальные условия:

$$w(x, y, t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p_{ij} W_{ij}(x, y);$$

$$\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} q_{ij} W_{ij}(x, y) \tag{4}$$

$$N, M = 1, 2.$$

Начальные неправильности:

$$w_0(x, y) = f_{011} W_{11}(x, y) + f_{012} W_{12}(x, y) + f_{021} W_{21}(x, y) + f_{022} W_{22}(x, y) \tag{5}$$

где в общем случае p_{ij}, q_{ij}, и f_{011}, f_{012}, f_{021} и f_{022} реалние числа.

Для малых деформаций в линейном случае уравнения колебания и согласности деформаций имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{D}{h}\nabla^4 w(x, y, t) = k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\ \frac{1}{E}\nabla^4 \Phi(x, y, t) = -\left[k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\end{gathered} \tag{6}$$

Решение уравнения „невозмущеного" движения извесно. Собствение частоты имеют вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E}{\rho}\left\{\frac{D}{Eh}(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{(k_x \mu_n^2 + k_y \lambda_m^2)^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2}\right\}; \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}; \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a};$$

$$R_{mn}^{(1)} = \frac{k_x \mu_n^2 + k_y \lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} E R_{mn}^{(2)}; \quad W_{mn}(x, y) = \sin \lambda_m x \sin \mu_n y; \tag{7}$$

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}^{(1)} W_{mn}(x, y) \cos(\omega_{mn} t + \varphi_{mn})$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}^{(2)} W_{mn}(x, y) \cos(w_{mn} t + \varphi_{mn})$$

B. Приближенные решения уравнения тонкой оболочки с начальними неправильностямы

Начальние условия (4) и частоты вынужденной силы принадлежацие резонансным интервалам собственных частот ω_{11}, ω_{12}, ω_{21} и ω_{22} оболочки позволяют построение вынужденных нелинейных колебании оболочки близких четири-частотному режиму ,,невозмущенного'' колебания и поэтому предполагаем перемещения точек срединной поверхности оболочки в форме:

$$w(x, y, t) = f_{11}(t)\, W_{11}(x, y) + f_{12}(t)\, W_{12}(x, y) + f_{21}(t)\, W_{21}(x, y) + \\ + f_{22}(t)\, W_{22}(x, y) \tag{8}$$

Допустим что начальные неправильности в форме:

$$w_0(x, y) = f_{011}\, W_{11}(x, y) + f_{012}\, W_{12}(x, y) + f_{021}\, W_{21}(x, y) + f_{022}\, W_{22}(x, y) \tag{9}$$

где $f_{11}(t)$, $f_{12}(t)$, $f_{21}(t)$ и $f_{22}(t)$ неизвесные функции которые надо определить из уравнения движения, пользуя функцию напряжений, которою определяем из уравнения согласности деформаций.

Подставлая в уравнение совместности деформаций (2) претположеного решения (8) находим частное решение полученого дифференциального уравнения с частными производними и получаем функцию напряжений в форме:

$$\frac{1}{E}\Phi(x, y, t) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[\frac{k_x \lambda^2 + k_y}{(1 + \lambda^2)^2}(f_{11} - f_{011})\, W_{11} + \right.$$
$$+ \frac{4\, k_x \lambda^2 + k_y}{(1 + 4\,\lambda^2)^2}(f_{12} - f_{012})\, W_{12} + \frac{k_x \lambda^2 + 4\, k_y}{(4 + \lambda^2)^2}(f_{21} - f_{021})\, W_{21} +$$
$$+ \frac{k_x \lambda^2 + k_y}{4(1 + \lambda^2)^2}(f_{22} - f_{022})\, W_{22}\Big] - \frac{\lambda^2}{4}\left[(f_{11} f_{21} - f_{011} f_{021}) + \right.$$
$$+ 4(f_{12} f_{22} - f_{012} f_{022})\Big] \cos\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{4\,\lambda^2}\left[(f_{11} f_{12} - f_{011} f_{012}) + \right.$$
$$+ 4(f_{21} f_{22} - f_{021} f_{022})\Big] \cos\frac{\pi y}{b} + \frac{\lambda^2}{32}\left[(f_{11}^2 - f_{011}^2) + 4(f_{12}^2 - f_{012}^2)\right] \cos\frac{2\pi x}{a} +$$
$$+ \frac{1}{32\,\lambda^2}\left[(f_{11}^2 - f_{011}^2) + 4(f_{21}^2 - f_{021}^2)\right] \cos\frac{2\pi y}{b} + \frac{\lambda^2}{36}\left[(f_{11} f_{21} - f_{011} f_{021}) + \right.$$
$$+ 4(f_{12} f_{22} - f_{012} f_{022})\Big] \cos\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{36\,\lambda^2}\left[(f_{11} f_{12} - f_{011} f_{012}) + \right.$$
$$+ 4(f_{21} f_{22} - f_{021} f_{022})\Big] \cos\frac{3\pi y}{b} + \frac{\lambda^2}{128}\left[(f_{21}^2 - f_{021}^2) + \right.$$
$$+ 4(f_{22}^2 - f_{022}^2)\Big] \cos\frac{4\pi x}{a} + \frac{1}{128\,\lambda^2}\left[(f_{12}^2 - f_{012}^2) + 4(f_{22}^2 - f_{022}^2)\right] \cos\frac{4\pi y}{b} +$$
$$+ \frac{9\,\lambda^2}{4(4 + \lambda^2)^2}(f_{11} f_{12} - f_{011} f_{012}) \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} +$$
$$\frac{9\,\lambda^2}{4(1 + 4\,\lambda^2)^2}(f_{11} f_{21} - f_{011} f_{021}) \cos\frac{2\pi y}{b} \cos\frac{\pi x}{a} - \tag{10}$$

$$- \frac{\lambda^2}{4(4+9\lambda^2)^2}(f_{11}f_{12} - f_{011}f_{012}) \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{3\pi y}{b} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{4(9+4\lambda^2)^2}(f_{11}f_{21} - f_{011}f_{021}) \cos\frac{2\pi y}{b} \cos\frac{3\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{4(9+\lambda^2)^2}[25(f_{12}f_{21} - f_{012}f_{021}) + 16(f_{11}f_{22} - f_{011}f_{022})] \cos\frac{3\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{4(1+9\lambda^2)^2}[25(f_{12}f_{21} - f_{012}f_{021}) + 16(f_{11}f_{22} - f_{011}f_{022})] \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{3\pi y}{b} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{36(1+\lambda^2)^2}(f_{12}f_{21} - f_{012}f_{021}) \cos\frac{3\pi x}{a} \cos\frac{3\pi y}{b} -$$

$$- \frac{9\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2}(f_{12}f_{21} - f_{012}f_{021}) \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} -$$

$$- \frac{9\lambda^2}{(9+16\lambda^2)^2}(f_{12}f_{22} - f_{012}f_{022}) \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{4\pi y}{b} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{(16+9\lambda^2)^2}(f_{21}f_{22} - f_{021}f_{022}) \cos\frac{3\pi y}{b} \cos\frac{4\pi x}{a} +$$

$$+ \frac{9\lambda^2}{(1+16\lambda^2)^2}(f_{12}f_{22} - f_{012}f_{022}) \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{4\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{9\lambda^2}{(16+\lambda^2)^2}(f_{21}f_{22} - f_{021}f_{022}) \cos\frac{\pi y}{b} \cos\frac{4\pi x}{a}.$$

После этого подставлаем выражения для перемещения (8) и функцию напряжения (10) в дифференциальное уравнение колебания (1), умножая ее рядом со $W_{11}(x,y)\,dxdy$, $W_{12}(x,y)\,dxdy$, $W_{21}(x,y)\,dxdy$ и $W_{22}(x,y)\,dxdy$ и интегрируем отдельно в рамки $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$ и получаем систему дифференциальних уравнений по неизвестным $f_{11}(t)$, $f_{12}(t)$, $f_{21}(t)$ и $f_{22}(t)$ в форме:

$$\ddot{\bar{\xi}}_{11} + \bar{\omega}_{11}^2 \bar{\xi}_{11} - \bar{R}_{11}\bar{\xi}_{12} - \bar{S}_{11}\bar{\xi}_{21} - \bar{T}_{11}\bar{\xi}_{22} =$$

$$= \frac{4}{ab}\frac{1}{\rho h^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y,t)\,W_{11}(x,y)\,dxdy + \bar{A}_{11}\bar{\xi}_{11}^3 + \bar{B}_{11}\bar{\xi}_{11}\bar{\xi}_{12}^2 +$$

$$+ \bar{C}_{11}\bar{\xi}_{11}\bar{\xi}_{21}^2 + \bar{D}_{11}\bar{\xi}_{11}\bar{\xi}_{22}^2 + \bar{E}_{11}\bar{\xi}_{12}\bar{\xi}_{21}\bar{\xi}_{22} + \bar{F}_{11}\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{G}_{11}\bar{\xi}_{12}^2 +$$

$$+ \bar{H}_{11}\bar{\xi}_{21}^2 + \bar{I}_{11}\bar{\xi}_{22}^2 + \bar{J}_{11}\bar{\xi}_{11}\bar{\xi}_{22} + \bar{K}_{11}\bar{\xi}_{11}\bar{\xi}_{12} + \bar{L}_{11}\bar{\xi}_{11}\bar{\xi}_{21} +$$

$$+ \bar{M}_{11}\bar{\xi}_{12}\bar{\xi}_{21} + \bar{N}_{11}\bar{\xi}_{12}\bar{\xi}_{22} + \bar{P}_{11}\bar{\xi}_{21}\bar{\xi}_{22},$$

$$\ddot{\bar{\xi}}_{12} + \bar{\omega}_{12}^2 \bar{\xi}_{12} - \bar{Q}_{12}\bar{\xi}_{11} - \bar{S}_{12}\bar{\xi}_{21} - \bar{T}_{12}\bar{\xi}_{22} =$$

$$= \frac{4}{ab}\frac{1}{\rho\, h^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q\,(x,y,t)\, W_{12}\,(x,y)\, dxdy + \bar{A}_{12}\,\bar{\xi}_{12}^3 + \bar{B}_{12}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{C}_{12}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{21}^2 +$$

$$+ \bar{D}_{12}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{22}^2 + \bar{E}_{12}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{F}_{12}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{G}_{12}\,\bar{\xi}_{12}^2 + \bar{H}_{12}\,\bar{\xi}_{21}^2 + \bar{I}_{12}\,\bar{\xi}_{22}^2 +$$

$$+ \bar{J}_{12}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{K}_{12}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{12} + \bar{L}_{12}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{M}_{12}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{N}_{12}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{P}_{12}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{22},$$

$$\ddot{\bar{\xi}}_{21} + \bar{\omega}_{21}^2\,\bar{\xi}_{21} - \bar{Q}_{21}\,\bar{\xi}_{11} - \bar{R}_{21}\,\bar{\xi}_{12} - \bar{T}_{21}\,\bar{\xi}_{22} = \tag{11}$$

$$= \frac{4}{ab}\frac{1}{\rho\, h^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q\,(x,y,t)\, W_{21}\,(x,y)\, dxdy + \bar{A}_{21}\,\bar{\xi}_{21}^3 + \bar{B}_{21}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{C}_{21}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{12}^2 +$$

$$+ \bar{D}_{21}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{22}^2 + \bar{E}_{12}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{F}_{21}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{G}_{21}\,\bar{\xi}_{12}^2 + \bar{H}_{21}\,\bar{\xi}_{21}^2 + \bar{I}_{21}\,\bar{\xi}_{22}^2 +$$

$$+ \bar{J}_{21}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{K}_{21}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{12} + \bar{L}_{21}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{M}_{21}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{N}_{21}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{P}_{21}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{22},$$

$$\ddot{\bar{\xi}}_{22} + \bar{\omega}_{22}^2\,\bar{\xi}_{22} - \bar{Q}_{22}\,\bar{\xi}_{11} - \bar{R}_{22}\,\bar{\xi}_{12} - \bar{S}_{22}\,\bar{\xi}_{21} =$$

$$= \frac{4}{ab}\frac{1}{\rho\, h^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q\,(x,y,t)\, W_{22}(x,y)\, dxdy + \bar{A}_{22}\,\bar{\xi}_{22}^3 + \bar{B}_{22}\,\bar{\xi}_{22}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{C}_{22}\,\bar{\xi}_{22}\,\bar{\xi}_{12}^2 +$$

$$+ \bar{D}_{22}\,\bar{\xi}_{22}\,\bar{\xi}_{21}^2 + \bar{E}_{22}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{F}_{22}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{G}_{22}\,\bar{\xi}_{12}^2 + \bar{H}_{22}\,\bar{\xi}_{11}^2 + \bar{I}_{22}\,\bar{\xi}_{22}^2 +$$

$$+ \bar{K}_{22}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{12} + \bar{L}_{22}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{M}_{22}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{21} + \bar{N}_{22}\,\bar{\xi}_{12}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{P}_{22}\,\bar{\xi}_{21}\,\bar{\xi}_{22} + \bar{J}_{22}\,\bar{\xi}_{11}\,\bar{\xi}_{22},$$

в которюх введены следующие обозначения:

$$\bar{\xi}_{11} = \frac{1}{h}(f_{11} - f_{011}); \qquad \bar{\xi}_{12} = \frac{1}{h}(f_{12} - f_{012});$$

$$\bar{\xi}_{21} = \frac{1}{h}(f_{21} - f_{021}); \qquad \bar{\xi}_{22} = \frac{1}{h}(f_{22} - f_{022});$$

$$k^* = k_x^* + k_y^*\,; \qquad k_{mn} = m^2\,k_x^* + n^2\,k_y^*\,;$$

$$k_x^* = \frac{a^2}{h}k_x; \qquad k_y^* = \frac{b^2}{h}k_y; \qquad \lambda = \frac{a}{b};$$

$$\varkappa = \frac{Eh^2}{\rho}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2; \qquad d = \frac{Eh^2}{\rho\, b^4}; \qquad \mathbf{r}_{mn} = (m^2 + n^2\,\lambda^2)^{-2};$$

$$\bar{\omega}_{11}^2 = \omega_{11}^2 - \frac{4}{3}\,d\left[\left(\frac{k_x^*}{\lambda^4} + k_y^*\right) + 8\,k^*\,\mathbf{r}_{11}\right]f_{011} + \varkappa\left\{\frac{(\lambda^4+1)}{8\,\lambda^2}\,\bar{f}_{011}^2 + \right.$$

$$+\left[\frac{1}{4\,\lambda^2} + \frac{81}{16}\,\lambda^2\,\mathbf{r}_{21} + \frac{1}{16}\,\lambda^2\,\mathbf{r}_{23}\right]\bar{f}_{012}^2 + \left[\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32})\right]\bar{f}_{021}^2 +$$

$$\left. + 16\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31})\,\lambda^2\,\bar{f}_{022}^2\right\}; \tag{12.1}$$

$$\overline{\omega}_{12}^2 = \omega_{12}^2 - d\left[\frac{64\,k_x^*}{15\,\lambda^2} + \frac{8}{15}(15\,k_{12}^*\,\mathbf{r}_{21} + k_{32}^*\,\mathbf{r}_{23} + 48\,k_{21}^*\,\mathbf{r}_{12})\right]\overline{f}_{011} +$$

$$+ \varkappa\left\{\left[\frac{1}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23})\right]\overline{f}_{011}^2 + \frac{(1+16\,\lambda^4)}{8\,\lambda^2}\overline{f}_{012}^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2}{16}[82\,\mathbf{r}_{11} + 625\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})]\,\overline{f}_{021}^2 + \lambda^2(4 + 81\,\mathbf{r}_{14} + \mathbf{r}_{34})\,\overline{f}_{022}^2\right\}; \quad (12.2)$$

$$\overline{\omega}_{12}^2 = \omega_{21}^2 - 32\,d\left(\frac{2}{15}k_y^* + \frac{1}{4}k_{21}^*\,\mathbf{r}_{12} + \frac{1}{60}k_{23}^*\,\mathbf{r}_{32} + \frac{4}{5}k_{12}^*\,\mathbf{r}_{21}\right)\overline{f}_{011} +$$

$$+ \varkappa\left\{(4 + 81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32})\,\frac{\lambda^2}{16}\overline{f}_{011}^2 + \frac{\lambda^2}{16}[82\,\mathbf{r}_{11} + 625\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})]\,\overline{f}_{012}^2 +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{4}{\lambda^2} + \lambda^2(81\,\mathbf{r}_{41} + \mathbf{r}_{43})\right]\overline{f}_{022}^2 + \frac{16+\lambda^4}{8\,\lambda^2}\overline{f}_{021}^2\right\}; \quad (12.3)$$

$$\overline{\omega}_{22}^2 = \omega_{22}^2 - \frac{256}{15}\,d\left[k_{13}^*\,\mathbf{r}_{31} + k_{31}^*\,\mathbf{r}_{13} + \frac{1}{2}k^*\,\mathbf{r}_{11}\right]\overline{f}_{011} + \varkappa\left\{16\,\lambda^2(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})\,\overline{f}_{011}^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\lambda^2}\,(1+\lambda^4)\,\overline{f}_{022}^2 + \left[\frac{4}{\lambda^2} + \lambda^2(\mathbf{r}_{43} + 81\,\mathbf{r}_{41})\right]\overline{f}_{021}^2\right\}; \quad (12.4)$$

$$\overline{R}_{11} = d\,\frac{4}{15}\left[\left(\frac{k_x^*}{\lambda^4} + 20\,k_y^*\right) + 96\,k_{21}^*\,\mathbf{r}_{12}\right]\overline{f}_{012} -$$

$$- \varkappa\left\{\left[\frac{1+2\,\lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23})\right]\overline{f}_{012}\,\overline{f}_{011} +\right.$$

$$\left. + \lambda^2\,[1 + 25\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31})]\,\overline{f}_{021}\,\overline{f}_{022}\right\}; \quad (13)$$

$$\overline{S}_{11} = \frac{4}{15}\,d\left[\left(\frac{20\,k_x^*}{\lambda^4} + k_y^*\right) + 96\,k_{12}^*\,\mathbf{r}_{21}\right]\overline{f}_{021} -$$

$$- \varkappa\left\{\left[\frac{2+\lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32})\right]\overline{f}_{011}\,\overline{f}_{021} +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\lambda^2} + 25\,\lambda^2(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31})\right]\overline{f}_{012}\,\overline{f}_{022}\right\};$$

$$\overline{T}_{11} = \frac{16}{15}\,d\left[\left(\frac{k_x^*}{\lambda^4} + k_y^*\right) + 16\,k^*\,\mathbf{r}_{11}\right]\overline{f}_{022} -$$

$$- \varkappa\left\{16\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31})\,\overline{f}_{011}\,\overline{f}_{022} + \frac{(1+\lambda^4)}{\lambda^2}\,\overline{f}_{012}\,\overline{f}_{021}\right\};$$

$$\underset{\sim}{Q}_{12} = \frac{8}{15} d \left[8 \frac{k_x^*}{\lambda^4} + 15 k_{12}^* \mathbf{r}_{21} + k_{32}^* \mathbf{r}_{23} + 16 k^* \mathbf{r}_{11} \right] \bar{f}_{012} -$$

$$- \varkappa \left\{ \left[\frac{1 + 2\lambda^4}{2\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81 \mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23}) \right] \bar{f}_{011} \bar{f}_{012} + \right.$$

$$\left. + \lambda^2 [1 + 25 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})] \bar{f}_{021} \bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{T}_{12} = \frac{32}{75} d \left[40 \frac{k_x^*}{\lambda^4} + 15 k_{14}^* \mathbf{r}_{41} + k_{34}^* \mathbf{r}_{43} + 44 k^* \mathbf{r}_{11} \right] \bar{f}_{021} -$$

$$- \varkappa \left\{ \left[\frac{1}{\lambda^2} + 25 \lambda^2 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13}) \right] \bar{f}_{011} \bar{f}_{021} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{8\lambda^4 + 1}{2\lambda^2} + \lambda^2 (81 \mathbf{r}_{14} + \mathbf{r}_{34}) \right] \bar{f}_{012} \bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{S}_{12} = \frac{32}{75} d \left[40 \frac{k_x^*}{\lambda^4} + 15 k_{14}^* \mathbf{r}_{41} + k_{34}^* \mathbf{r}_{43} + 176 k_{12}^* \mathbf{r}_{21} \right] \bar{f}_{022} -$$

$$- \varkappa \left\{ \frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} \bar{f}_{011} \bar{f}_{022} + \frac{\lambda^2}{16} [82 \mathbf{r}_{11} + 625 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})] \bar{f}_{021} \bar{f}_{012} \right\};$$

$$\underset{\sim}{Q}_{21} = \frac{8}{15} d [8 k_y^* + 15 k_{21}^* \mathbf{r}_{12} + k_{23}^* \mathbf{r}_{32} + 48 k^* \mathbf{r}_{11}] \bar{f}_{021} -$$

$$- \varkappa \left\{ \left[\frac{\lambda^4 + 2}{4\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81 \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32}) \right] \bar{f}_{011} \bar{f}_{021} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\lambda^2} + 25 \lambda^2 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13}) \right] \bar{f}_{012} \bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{R}_{21} = \frac{32}{75} d [40 k_y^* + 15 k_{41}^* \mathbf{r}_{14} + k_{43}^* \mathbf{r}_{34} + 176 k_{21}^* \mathbf{r}_{12}] \bar{f}_{022} -$$

$$- \varkappa \left\{ \frac{\lambda^2}{16} [82 \mathbf{r}_{11} + 625 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})] \bar{f}_{012} \bar{f}_{021} + \frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} \bar{f}_{011} \bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{T}_{21} = \frac{32}{75} d [40 k_y^* + 15 k_{41}^* \mathbf{r}_{14} + k_{43}^* \mathbf{r}_{34} + 44 k^* \mathbf{r}_{11}] \bar{f}_{012} -$$

$$- \varkappa \left\{ \left[\frac{8 + \lambda^4}{2\lambda^2} + \lambda^2 (81 \mathbf{r}_{41} + \mathbf{r}_{43}) \right] \bar{f}_{021} \bar{f}_{022} + \lambda^2 [1 + 25 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})] \bar{f}_{011} \bar{f}_{012} \right\};$$

$$\underset{\sim}{Q}_{22} = \frac{256}{15} d [k_{13}^* \mathbf{r}_{31} + k_{31}^* \mathbf{r}_{13} + 2 k^* \mathbf{r}_{11}] \bar{f}_{022} -$$

$$- \varkappa \left\{ \frac{(1 + \lambda^4)}{\lambda^2} \bar{f}_{012} \bar{f}_{021} + + 16 \lambda^2 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13}) \bar{f}_{011} \bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{R}_{22} = \frac{16}{75} d\,[125\,(k_{13}^* \mathbf{r}_{31} + k_{31}^* \mathbf{r}_{13}) + 26\,k^* \mathbf{r}_{11} + 352\,k_{21}^* \mathbf{r}_{12}]\,\bar{f}_{021} -$$

$$- \varkappa \left\{ \left[\frac{1}{\lambda^2} + 25\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{34}) \right] \bar{f}_{011}\,\bar{f}_{021} + \right.$$

$$\left. \left[\frac{1 + 8\,\lambda^4}{2\,\lambda^2} + \lambda^2\,(\mathbf{r}_{34} + 81\,\mathbf{r}_{14}) \right] \bar{f}_{012}\,\bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{16}{75} d\,[125\,(k_{13}^* \mathbf{r}_{31} + k_{31}^* \mathbf{r}_{13}]) + 26\,k^* \mathbf{r}_{11} + 352\,k_{21}^* \mathbf{r}_{12}]\,\bar{f}_{021} -$$

$$- \varkappa \left\{ [1 + 25\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})]\,\lambda^2\,\bar{f}_{011}\,\bar{f}_{012} + \left[\frac{8 + \lambda^4}{2\,\lambda^2} + \lambda^2\,(\mathbf{r}_{43} + 81\,\mathbf{r}_{41}) \right] \bar{f}_{021}\,\bar{f}_{022} \right\};$$

$$\bar{A}_{11} = - \varkappa \frac{\lambda^4 + 1}{16\,\lambda^2} \tag{14}$$

$$\bar{B}_{11} = - \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23}) \right]$$

$$\bar{C}_{11} = - \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32}) \right]$$

$$\bar{D}_{11} = - 16\,\varkappa\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31}) = \bar{B}_{22}$$

$$\bar{E}_{11} = - \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31}) \right]$$

$$\bar{F}_{11} = d \left[\frac{2}{3} \left(\frac{k_x^*}{\lambda^4} + k_y^* \right) + \frac{32}{3} k^* \mathbf{r}_{11} \right] - 3\,\varkappa \frac{\lambda^4 + 1}{16\,\lambda^2} \bar{f}_{011}$$

$$\bar{G}_{11} = d \left[\frac{2}{15} \left(\frac{k_x^*}{\lambda^4} + 20\,k_y^* \right) + \frac{384}{15} k_{21}^* \mathbf{r}_{12} \right] - \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23}) \right] \bar{f}_{011}$$

$$\bar{\bar{H}}_{11} = d \left[\frac{2}{15} \left(\frac{20\,k_x^*}{\lambda^4} + k_y^* \right) + \frac{384}{15} k_{12}^* \mathbf{r}_{21} \right] - \varkappa \left[\frac{\lambda^4 + 1}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32}) \right] \bar{f}_{011}$$

$$\bar{I}_{11} = d \left[\frac{8}{15} \left(\frac{k_x^*}{\lambda^4} + k_y^* \right) + \frac{128}{15} k^* \mathbf{r}_{11} \right] - \varkappa\,16\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31})\,\bar{f}_{011};$$

$$\bar{J}_{11} = - 32\,\varkappa\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31})\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{K}_{11} = - 2\,\varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23}) \right] \bar{f}_{012};$$

$$L_{11} = - 2\,\varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16} (81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32}) \right] \bar{f}_{021};$$

$$\bar{M}_{11} = - \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_{31}) \right] \bar{f}_{022} = \bar{E}_{12}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{N}_{11} = \bar{M}_{11} \frac{\bar{f}_{021}}{\bar{f}_{022}};$$

$$\bar{P}_{11} = \bar{M}_{11} \frac{\bar{f}_{012}}{\bar{f}_{022}};$$

$$\bar{A}_{12} = -\varkappa \frac{1 + 16\lambda^4}{16\lambda^2}; \tag{15}$$

$$\bar{B}_{12} = \frac{\bar{K}_{11}}{2\bar{f}_{012}};$$

$$\bar{C}_{12} = -\varkappa \frac{\lambda^2}{16}[82 + 625(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})];$$

$$\bar{D}_{12} = -\varkappa\left[\frac{1 + 16\lambda^4}{4\lambda^2} + \lambda^2(81\,\mathbf{r}_{14} + \mathbf{r}_{34})\right];$$

$$\bar{E}_{12} = -\varkappa\left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25\lambda^2(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})\right];$$

$$\bar{F}_{12} = -\varkappa\left[\frac{1 + \lambda^4}{4\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23})\right]\bar{f}_{012} = \bar{B}_{12}\bar{f}_{012};$$

$$\bar{G}_{12} = 3A_{12}\bar{f}_{012}$$

$$\bar{H}_{12} = \bar{C}_{12}\bar{f}_{012}$$

$$\bar{K}_{12} = \frac{8}{15}d\left[8\frac{k_x^*}{\lambda^4} + 15k_{12}^*\mathbf{r}_{21} + k_{32}^*\mathbf{r}_{23} + 48k^*\mathbf{r}_{11} + 48k_{21}^*\mathbf{r}_{12}\right] -$$

$$-2\varkappa\left[\frac{1 + \lambda^4}{4\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{21} + \mathbf{r}_{23})\right]\bar{f}_{011};$$

$$\bar{L}_{12} = \bar{E}_{12}\bar{f}_{022};$$

$$\bar{M}_{12} = 2\bar{C}_{12}\bar{f}_{021};$$

$$\bar{N}_{12} = 2\bar{D}_{12}\bar{f}_{022};$$

$$\bar{P}_{12} = \frac{32}{75}d\left[40\frac{k_x^*}{\lambda^4} + 25k_{14}^*\mathbf{r}_{41} + k_{34}^*\mathbf{r}_{43} + 44k^*\mathbf{r}_{11} + 176k_{12}^*\mathbf{r}_{21}\right] -$$

$$-\varkappa\left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25\lambda^2(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})\right]\bar{f}_{011};$$

$$\bar{A}_{21} = -\varkappa\frac{16 + \lambda^4}{16\lambda^2};$$

$$\bar{B}_{21} = -\varkappa\left[\frac{\lambda^4 + 1}{4\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}(81\,\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{32})\right];$$

$$\bar{C}_{21} = -\varkappa \frac{\lambda^2}{16} [82\,\mathbf{r}_{11} + 625\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{23})] = \bar{C}_{12};$$

$$\bar{D}_{21} = -\varkappa \left[\frac{16 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \lambda^2\,(81\,\mathbf{r}_{41} + \mathbf{r}_{43})\right];$$

$$\bar{E}_{21} = -\varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})\right] = \bar{E}_{12};$$

$$\bar{F}_{21} = \bar{B}_{21}\,\bar{f}_{021};$$

$$\bar{G}_{21} = \bar{C}_{21}\,\bar{f}_{021};$$

$$\bar{H}_{21} = 3\,\bar{A}_{21}\,\bar{f}_{021};$$

$$\bar{I}_{21} = \bar{D}_{21}\,\bar{f}_{021};$$

$$\bar{J}_{21} = \bar{E}_{21}\,\bar{f}_{012};$$

$$\bar{K}_{21} = \bar{E}_{21}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{L}_{21} = \frac{8}{15}\,d\,[8\,k_y^* + 15\,k_{21}^*\,\mathbf{r}_{12} + k_{23}^*\,\mathbf{r}_{32} + 48\,(k^*\,\mathbf{r}_{11} + k_{12}^*\,\mathbf{r}_{21})] -$$

$$- 2\,\varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{4\,\lambda^2} + \frac{\lambda^2}{16}\,(\mathbf{r}_{32} + 81\,\mathbf{r}_{12})\right] \bar{f}_{011};$$

$$\bar{M}_{21} = 2\,\bar{C}_{21}\,\bar{f}_{021};$$

$$\bar{N}_{21} = \frac{32}{75}\,d\,[40\,k_y^* + 15\,k_{41}^*\,\mathbf{r}_{14} + k_{43}^*\,\mathbf{r}_{34} + 44\,k^*\,\mathbf{r}_{11} + 176\,k_{21}^*\,\mathbf{r}_{12}] -$$

$$- \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13})\right] \bar{f}_{011};$$

$$\bar{P}_{21} = 2\,\bar{D}_{21}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{A}_{22} = 16\,\bar{A}_{11}; \tag{16}$$

$$\bar{B}_{22} = -16\,\varkappa\,\lambda^2\,(\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13}) = \bar{D}_{11};$$

$$\bar{C}_{22} = -\varkappa \left[\frac{16\,\lambda^4 + 1}{4\,\lambda^2} + \lambda^2\,(\mathbf{r}_{34} + 81\,\mathbf{r}_{14})\right] = \bar{D}_{12};$$

$$\bar{D}_{22} = \bar{D}_{21};$$

$$\bar{E}_{22} = \bar{E}_{11} = \bar{E}_{12} = \bar{E}_{21};$$

$$\bar{F}_{22} = \bar{B}_{22}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{G}_{22} = \bar{C}_{22}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{H}_{22} = \bar{D}_{22}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{I}_{22} = 3\,\bar{A}_{22}\,\bar{f}_{022};$$

$$\bar{J}_{22} = \frac{256}{15} d \left[k_{13}^{*} \mathbf{r}_{31} + k_{31}^{*} \mathbf{r}_{13} + \frac{5}{2} k^{*} \mathbf{r}_{11} \right] - 32 \varkappa \lambda^2 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13}) \bar{f}_{011};$$

$$\bar{K}_{22} = \bar{E}_{22} \bar{f}_{021};$$

$$\bar{L}_{22} = \bar{E}_{22} \bar{f}_{012};$$

$$\bar{N}_{22} = 2 \bar{C}_{22} \bar{f}_{012};$$

$$\bar{M}_{22} = \frac{16}{75} d [25 (k_{13}^{*} \mathbf{r}_{31} + k_{31}^{*} \mathbf{r}_{13}) + 78 k^{*} \mathbf{r}_{11} + 352 (k^{*} \mathbf{r}_{21} + k_{21}^{*} \mathbf{r}_{12})] -$$

$$- \varkappa \left[\frac{1 + \lambda^4}{\lambda^2} + 25 \lambda^2 (\mathbf{r}_{31} + \mathbf{r}_{13}) \right] \bar{f}_{011};$$

$$\bar{P}_{22} = 2 \bar{D}_{22} \bar{f}_{021};$$

$$q(x, y, t) = \varepsilon F_1 \sin \theta_1 W_{11}(x, y) + \varepsilon F_2 \sin \theta_2 W_{12}(x, y) +$$

$$+ \varepsilon F_3 \sin \theta_3 W_{21}(x, y) + \varepsilon F_4 \sin \theta_4 W_{22}(x, y)$$

$$q_w \left(\frac{\partial w}{\partial \iota} \right) = - 2 \mu_0 \frac{\partial w}{\partial t}$$

Полученая система обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае с сопяженымы уравнениямы линейними и нелинейними членами, в отличии с соответствующими для оболочку без начальных неправилности, для которю эти уравнения сопряжены нелинейними членами.

Используя идею асимптотических методов (1) и работы (3), (4), (5) и принимая в качестве малого параметра h^2, для базного невозмущеного системи уравнений (11) выбираем систему в которй нелинейные члени отбрасываем и для эту систему собственные частоты обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 и их вычисляем из частотного уравнения:

$$\begin{vmatrix} \bar{\omega}_{11}^2 - \omega_s^2 & - \bar{R}_{11} & - \bar{S}_{11} & - \bar{T}_{11} \\ - \bar{Q}_{12} & \bar{\omega}_{12}^2 - \omega_s^2 & - \bar{S}_{12} & - \bar{T}_{12} \\ - \bar{Q}_{21} & - \bar{R}_{21} & \bar{\omega}_{21}^2 - \omega_s^2 & - \bar{T}_{21} \\ - \bar{Q}_{22} & - \bar{R}_{22} & - \bar{S}_{22} & \bar{\omega}_{22}^2 - \omega_s^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

Бтзным частотам ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 отвечают амплитудные векторы с координатама $A_i^{(s)}$ $(i, s = 1, 2, 3, 4)$ которые вычисляем извесным образом. Из будем называть базные амплитудные векторы.

Для четири-частотного решения (8) уравнения (1) и (2) получаем неизвестные функци $\bar{\xi}_{11}(t)$, $\bar{\xi}_{12}(t)$, $\bar{\xi}_{21}(t)$ и $\bar{\xi}_{22}(t)$ в форме:

$$\bar{\xi}_{11}(t) = A_1^{)1)} a_1 \cos(\theta_1 + \varphi_1) + \bar{A}_1^{(2)} a_2 \cos(\theta_2 + \varphi_2) + A_1^{(3)} a_3 \cos(\theta_3 + \varphi_3) +$$

$$+ A_1^{(4)} a_4 \cos(\theta_4 + \varphi_4)$$

$$\bar{\xi}_{12}(t) = \sum_{s=1}^{4} A_2^{(s)} a_s \cos(\theta_s + \varphi_s)$$

$$\bar{\xi}_{21}(t) = \sum_{s=1}^{4} A_3^{(s)} a_s \cos(\theta_s + \varphi_s) \tag{18}$$

$$\bar{\xi}_{22}(t) = \sum_{s=1}^{4} A_4^{(s)} a_s \cos(\theta_s + \varphi_s)$$

в которых амплитуди a_s и фазы φ_s функции времени вычисляются из системы дифференциальных уравнений первого приближения:

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\mu_1}{2} a_1 - \frac{h^2 H_1}{\omega_1 + \nu_1} \cos \varphi_1$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 - \nu_1(\tau) + h^2 B_1(a_1, a_2, a_3, a_4) + \frac{h^2 H_1}{a_1(\omega_1 + \nu_1)} \sin \varphi_1$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{\mu_2}{2} a_2 - \frac{h^2 H_2}{\omega_2 + \nu_2} \cos \varphi_2$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 - \nu_2(\tau) + h^2 B_2(a_1, a_2, a_3, a_4) + \frac{h^2 H_2}{a_2(\omega_2 + \nu_2)} \sin \varphi_2$$

$$\frac{da_3}{dt} = -\frac{\mu_3}{2} a_3 - \frac{h^2 H_3}{\omega_3 + \nu_3} \cos \varphi_3 \tag{19}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3 - \nu_3(\tau) + h^2 B_3(a_1, a_2, a_3, a_4) + \frac{h^2 H_3}{a_3(\omega_3 + \nu_3)} \sin \varphi_3$$

$$\frac{da_4}{dt} = -\frac{\mu_4}{2} a_4 - \frac{h^2 H_4}{\omega_4 + \nu_4} \cos \varphi_4$$

$$\frac{d\varphi_4}{dt} = \omega_4 - \nu_4(\tau) + h^2 B_4(a_1, a_2, a_3, a_4) + \frac{h^2 H_4}{a_4(\omega_4 + \nu_4)} \sin \varphi_4$$

$$h^2 Hs = \frac{1}{m_s} \sum_{j=1}^{4} \in F_j A_j^{(s)}; \qquad m_s = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(s)}$$

Перемещения для точек срединней поверхносты в первом приближении:

$$w(x, y, t) = W_{11}(x, y) \left\{ h \sum_{s=1}^{4} a_s A_1^{(s)} \cos(\theta_s + \varphi_s) + f_{011} \right\} +$$

$$+ W_{12}(x, y)\left\{h \sum_{s=1}^{4} a_s A_2^{(s)} \cos(\theta_s + \varphi_s) + f_{012}\right\} +$$

$$+ W_{21}(x, y)\left\{h \sum_{s=1}^{4} a_s A_3^{(s)} \cos(\theta_s + \varphi_s) + f_{021}\right\} + \tag{20}$$

$$+ W_{22}(x, y)\left\{h \sum_{s=1}^{4} a_s A_4^{(s)} \cos(\theta_s + \varphi_s) + f_{022}\right\}$$

где a_s и φ_s вычисляем из сыстемы уравнений (19).

Когда начальные неправилности такие что коэффициенты $\bar{R}_{ij}$, $\bar{S}_{ij}$, $\bar{T}_{ij}$ и $\bar{Q}_{ij}$ малы то можна для базных частот невозмущеного движения утвеждать $\omega_1 \approx \bar{\omega}_{11}$, $\omega_2 \approx \bar{\omega}_{12}$, $\omega_3 \approx \bar{\omega}_{21}$ и $\omega_4 \approx \bar{\omega}_{22}$. Это случай и когда начальные неправильности в форме фундаментальнной функции первой гармоники ,,невозмущенного'' движения, тагда все кеэффициенты $\bar{R}_{ij}$, $\bar{S}_{ij}$, $\bar{T}_{ij}$ и $\bar{Q}_{ij}$ равни нулю. В этом случае решения для неизвесных функций $\bar{\xi}_{11}(t)$, $\bar{\xi}_{12}(t)$, $\bar{\xi}_{21}(t)$ и $\bar{\xi}_{22}(t)$ в форме:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{11} &= a_1 A_1^{(1)} \cos(\theta_1 + \varphi_1) = R_{11}^{(2)} \cos(\theta_1 + \varphi_{11}) \\
\bar{\xi}_{12} &= a_2 A_2^{(2)} \cos(\theta_2 + \varphi_2) = R_{12}^{(2)} \cos(\theta_2 + \varphi_{12}) \\
\bar{\xi}_{21} &= a_3 A_3^{(3)} \cos(\theta_3 + \varphi_3) = R_{21}^{(2)} \cos(\theta_3 + \varphi_{21}) \\
\bar{\xi}_{22} &= a_4 A_4^{(4)} \cos(\theta_4 + \varphi_4) = R_{22}^{(2)} \cos(\theta_4 + \varphi_{22})
\end{aligned} \tag{21}$$

и система диференциалных уравнений первого приближения получает форму:

$$\frac{dR_{11}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_1}{\bar{\omega}_{11} + \nu_1} \cos\varphi_{11} - \mu_{11} R_{11}^{(2)}$$

$$\frac{d\varphi_{11}}{dt} = \bar{\omega}_{11} - \nu_1 + \frac{1}{8\bar{\omega}_{11}}\left\{3\bar{A}_{11} R_{11}^{(2)2} + 2\left[\bar{B}_{11} R_{12}^{(2)2} + \bar{C}_{11} R_{22}^{(2)2} + \bar{D}_{11} R_{22}^{(2)2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon F_1 \sin\varphi_{11}}{R_{11}^{(2)}[\bar{\omega}_{11} + \nu_1]}$$

$$\frac{dR_{12}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_2}{\bar{\omega}_{12} + \nu_2} \cos\varphi_{12} - \mu_{12} R_{12}^{(2)}$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dt} = \bar{\omega}_{12} - \nu_2 + \frac{1}{8\bar{\omega}_{12}}\left\{3\bar{A}_{12} R_{12}^{(2)2} + 2\left[\bar{B}_{12} R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{12} R_{21}^{(2)2} + \bar{D}_{12} R_{22}^{(2)2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon F_2}{R_{12}^{(2)}[\bar{\omega}_{12} + \nu_2]} \sin\varphi_{12} \tag{22}$$

$$\frac{dR_{21}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_3}{\bar{\omega}_{21} + \nu_3} \cos \varphi_{21} - \mu_{21} R_{21}^{(2)}$$

$$\frac{d\varphi_{21}}{dt} = \bar{\omega}_{21} - \nu_3 + \frac{1}{8\bar{\omega}_{21}} \{3\bar{A}_{21} R_{21}^{(2)2} + 2[\bar{B}_{21} R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{21} R_{12}^{(2)2} + \bar{D}_{21} R_{22}^{(2)2}]\} + $$

$$+ \frac{\varepsilon F_3}{R_{21}^{(2)}[\bar{\omega}_{21} + \nu_3]} \sin \varphi_{21}$$

$$\frac{dR_{22}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_4}{\bar{\omega}_{22} + \nu_4} \cos \varphi_{22} - \mu_{22} R_{22}^{(2)}$$

$$\frac{d\varphi_{22}}{dt} = \bar{\omega}_{22} - \nu_4 + \frac{1}{8\bar{\omega}_{22}} \{3\bar{A}_{22} R_{22}^{(2)2} + 2[\bar{B}_{22} R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{22} R_{12}^{(2)2} + \bar{D}_{22} R_{21}^{(2)2}]\} + $$

$$+ \frac{\varepsilon F_4}{R_{22}^{(2)}[\bar{\omega}_{22} + \nu_4]} \sin \varphi_{22}$$

С. Анализ полученых систем уравнений. Влияние начальных неправильностей.

Анализ полученых уравнений (11) в случае начальных неправилности и их сравнение с соответствующими, когда неправилностяма пренебрегаем указывает что базные частоты ,,невозмущенного'' решения изменены влянием начальных неправильностей. В общем случае когда все f_{0ij} $(i, j = 1, 2)$ отличны от нуля, в каждой форме фундаментальной функции гармоника ,,невозмущенного'' решения для ,,возмущеного'' движения являются все четири частоты возмущающей силы и $\bar{\xi}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ не главны но обобщение координаты базной системы, системы (11). Так что в каждой формы фундаментальной функции четири-частотний режим колебания, что-прямое влияные началных неправилностей.

Когда начальная неправилнось в форме первой гармоники ,,невозмущеного'' колебания базные частоты решения $\omega_1 = \bar{\omega}_{11}$, $\omega_2 = \bar{\omega}_{22}$, $\omega_3 = \bar{\omega}_{21}$ и $\omega_4 = \bar{\omega}_{22}$ и в сравнении с соответствующимы ω_{11}, ω_{12}, ω_{21} и ω_{22} без начальных неправильностей уменшены. Тогда функции $\bar{\xi}_{11}(t)$, $\bar{\xi}_{12}(t)$, $\bar{\xi}_{21}(t)$ и $\bar{\xi}_{22}(t)$ остаются главными координатамы базной системы для системы (11). В определенной конфигурации начальных неправилностей можно получить малые коэффициенты для $\bar{R}_{ij}$, $\bar{Q}_{ij}$, $\bar{S}_{ij}$ и $\bar{T}_{ij}$, для базного решения принять частоты $\omega_1 = \bar{\omega}_{11}$, $\omega_2 = \bar{\omega}_{12}$, $\omega_3 = \bar{\omega}_{21}$ и $\omega_4 = \bar{\omega}_{22}$.

Если амплитуды вынужденной силы распределеной по срединной поверхносты оболочки постыяние тогда она входыт в правой часты системы уравнений только в этих которые получены для интегрированые дифференциального уравнения с частнымы производными умноженого на $W_{ij}(x, y)\,dxdy$, где каждый индекс нечетное число, а не входит если один индекс четное число. Тогда можно говорить о ,,динамической апсорпции'' по гармонике, но если реч идет о начальных неправильностях, тогда в каждой форме фундаментальной функции гармоника, в функции времени являются частоты этой вынужденной силы. Начальные неправильности уничтожают эффект ,,динамической апсорпции'' по определеному гармонику. Этот эффект сильнее показывается в случае когда на оболочку действуют силы которых частоты в резонансном интервале частоты ,,невозмущеного'' движения с четнимы индексами. В этом случае оболочка без начальных неправильностей не имеется эффект резонансного явления, а если оболочка имеет начальние неправильности является эффект резонансного явления дла ,,возмущеного'' движения для каждой форме ,,невозмущеного'' базного решения.

Когда амплитуды вынужденной силы в форме фундаментальных функций гармоника ,,невозмущеного'' движения тогда она входит в соответствующее уравнение по $\bar{\xi}_{ij}$. Асимптотические решения для $\bar{\xi}_{ij}$ когда не имеются начальные неправыльности содержат только соответствующие частоты вынужденной силы, а когда являются начальные неправильности все частоты внешней силы с принимаемым допущениями входят в кождое $\bar{\xi}_{ij}$. Вывирая амплитуду силы в форме фундаментальной функции гармоника ,,невозмущеного'' движения которого частота резонансная увеличиваем эффект резонансного режима по определеному гармонику, а с явлением начальных неправильностей вищих гармонк, переносим резонансний эффект и в форме их фундаментальныхфункций.

Амплитуды вынужденых сил одинакового порядка в резонансном опсеге базных частот вызивают (возбуждают) большие амплитуды гармоник с низжими частотамы, а небольшие амплитуды гармоник с вышими частотамы. Согласно с этим гармоники с низжими частотамы больше влияют на гармоники с вышими частотамы. Влияние гармоника с высшими частотамы для одинаковых амплитуд сил, на гармоники с низшими частотамы выражается с малимы эффектамы. Для сильнейшего влияния надо что бы амплитуды виших гармоник болы несколько раз увеличени.

Функция напряжения в первом приближению нелинейно зависима от функций $f_{11}(t)$, $f_{12}(t)$, $f_{21}(t)$ и $f_{22}(t)$ для всех четири гармоника. Когда известна функция $\Phi(x, y, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$ для оболочки без начальных неправильностей функцию напряжений $\Phi(x, y, t)$ для оболочки с начальними неправильностями в четиричастотном режиме колебаний в первом приближении можно получит через ,,нелинейную супурпозицию'':

$$\Phi(x, y, t) = \Phi[x, y, f_{11}(t), f_{12}(t), f_{21}(t), f_{22}(t)] - \Phi[x, y, f_{011}, f_{012}, f_{021}, f_{022}].$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Митропольский, *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Москва 1964.

[2] А. С. Вольмир, *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*, Москва 1972.

[3] К. Стеванових-Хедрих, *Двух-частотные нестационарные вынужденые колебания балки*, Математическая физика, вып. 12, 1972.

[4] K. Hedrih, P. Kozić, R. Pavlović, *O uzajamnot uticaju harmonika u nelinearnim sistemima sa malim parametrom*, Zbornik radova Matematičkog instituta, Nova serija knj. 4 (12) 1983, Beograd

MULTIFREQUENCY FORCED VIBRATIONS OF THIN ELASTIC SHELL WITH A INITIAL DEFORMATIONS (THE ANALITIC PART)

In this paper, a first asimptotic approximations solutions for four-frequency regime a forced vibrations of thin elastic shell is composed, with a initial deformities into nonlinear conditions, when the frequencies of the force are into resonant intervals of the first four own vibrations undisturbed vibrations of the shell.

The expressions for the tension function and movement under the conditions of the four-frequency forced nonlinear vibrations, and also an approximations for amplitudes and phases of the promted harmonics was derived. By means this derived systems of the differencial equations of the first approximations and phases the analysis of a mutual influenc'es of the harmonics, and also the comparison with the linear regime, was performed.

The conclusions on mutual influence between harmonics in function of consequences of initial deformities of the shell, was derived.

VIŠEFREKVENTNE PRINUDNE OSCILACIJE TANKE ELASTIČNE LJUSKE SA POČETNIM NEPRAVILNOSTIMA (ANALITIČKI DEO)

U radu su sastavljene prve asimptotske aproksimacije rešenja za četvorofrekventni režim prinudnih oscilacija tanke elastične ljuske sa početnim nepravilnostima u nelinearnim uslovima, kada su frekvencije prinude u rezonantnim intervalima prvih četiri sopstvenih oscilacija neporemećenog oscilovanja ljuske.

Izvedeni su izrazi za naponsku funkciju i pomeranje u uslovima četvorofrekventnih prinudnih nelinearnih oscilacija, kao i aproksimacije za amplitude i faze pobuđenih harmonika. Pomoću izvedenog sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitude i faze izvršena je analiza uzajamnog uticaja harmonika, kao i upoređenje sa linearnim režimom. Izvedeni su zaključci i o uzajamnom uticaju harmonika kao posledice početnih nepravilnosti ljuske.

Др Катица Хедрих, проф,
18000 — Ниш, Војводе Танкосића 3/22

Мр Ратко Повловић, асист.
18000 — Ниш, Браће Тасковића 79/16

Мр Предраг Козић, асист.
Ниш, Станка Пауновића 43/2

Славка Митић, асист.
18000 — Ниш, Факултет заштите на раду

Югославия — Машински факултет — 18000 — Ниш