TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 12 pp. 33—40, 1986, UDK 624.07

СТАЦИОНАРНЫЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЧЕТИРИ-ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНЫМИ НЕПРАВИЛЬНОСТЯМИ

Хедрих К., Павлович Р., Козич П., Митич С.

(Поступило 7. 03. 1985.)

В статье (4) построены первые асимптотические приближения решений для четири-частотных режимов вынужденных стационарных и нестационарных колебаний тонкой упругой оболочки с начальними неправильностями и функция напряжений и система диференциальных уравнений первого приближения для амплитуд и фаз. Оболочка находится под воздействием четири-частотного усилия с четирьмя медленно меняющимися или непеременими частотами из резонансного охвата первой, второй третьей либо четвертой собственной частоте ,,невозмущеного" колебания. Оболочка свободно оперта по контуре. Контура прямоугольная, главние кривизни срединной поверхности постоянны.

Пользуясь выведеними приближениями решений и дифференциальных уравнний нервого приближения для амплитуд и фаз многочастотного режима колебаний, на основании численых результатов сделан анализ стационарних и нестационарных амплитудно-частотных характеристик и сделаны выводи о взаимном влиянию гармоников возмущеного нелинейного колебания.

1. Исследование стационарного вынужденного четири-частотного режима колебаний

Для дальнейшего анализа неопходымо построить систему уравнений для исследования стационарных амплитуд и фаз, четири-частотного режима. Остановимся нг случае когда $\bar{\xi}_{11}$, $\bar{\xi}_{12}$, $\bar{\xi}_{21}$ и $\bar{\xi}_{22}$ главные координаты (смотри (4)—(21) и (4)—(22)). Уравнения для исследования стационарных амплитуд и фаз строим, приравнивая правые части системы дифференциальних уравнений первого приближения (22) нулю:

$$\frac{dR_{11}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_1}{\bar{\omega}_{11} + \nu_1} \cos \varphi_{11} - \mu_{11} R_{11}^{(2)} (=)\ 0$$

$$\frac{d\varphi_{11}}{dt} = \bar{\omega}_{11} - \nu_1 + \frac{1}{8\,\bar{\omega}_{11}}\left\{3\,\bar{A}_{11}\,R_{11}^{(2)2} + 2\left[\bar{B}_{11}\,R_{12}^{(2)2} + \bar{C}_{11}\,R_{12}^{(2)2} + \bar{D}_{11}\,R_{22}^{(2)2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon F_1}{R_{11}^{(2)}\left[\bar{\omega}_{11} + \nu_1\right]}\sin\varphi_{11}\,(=)\,0$$

$$\frac{dR_{12}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_2}{\bar{\omega}_{12} + \nu_2}\cos\varphi_{12} - \mu_{12}\,R_{12}^{(2)}\,(=)\,0$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dt} = \bar{\omega}_{12} - \nu_2 + \frac{1}{8\,\bar{\omega}_{12}}\left\{3\,\bar{A}_{12}\,R_{12}^{(2)2} + 2\left[\bar{B}_{12}\,R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{12}\,R_{21}^{(2)2} + \bar{D}_{12}\,R_{22}^{(2)2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon F_2}{R_{12}^{(2)}\left[\bar{\omega}_{12} + \nu_2\right]}\sin\varphi_{12}\,(=)\,0$$

$$\frac{dR_{21}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_3}{\bar{\omega}_{21} + \nu_3}\cos\varphi_{21} - \mu_{21}\,R_{21}^{(2)}\,(=)\,0 \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi_{21}}{dt} = \bar{\omega}_{21} - \nu_3 + \frac{1}{8\,\bar{\omega}_{21}}\left\{3\,\bar{A}_{21}\,R_{21}^{(2)2} + 2\left[\bar{B}_{21}\,R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{21}\,R_{12}^{(2)2} + \bar{D}_{21}\,R_{22}^{(2)2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon F_3}{R_{21}^{(2)}\left[\bar{\omega}_{21} + \nu_3\right]}\sin\varphi_{21}\,(=)\,0$$

$$\frac{dR_{22}^{(2)}}{dt} = -\frac{\varepsilon F_4}{\bar{\omega}_{22} + \nu_4}\cos\varphi_{22} - \mu_{22}\,R_{22}^{(2)}\,(=)\,0$$

$$\frac{d\varphi_{22}}{dt} = \bar{\omega}_{22} - \nu_4 + \frac{1}{8\,\bar{\omega}_{22}}\left\{3\,\bar{A}_{22}\,R_{22}^{(2)2} + 2\left[\bar{B}_{22}\,R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{22}\,R_{12}^{(2)2} + \bar{D}_{22}\,R_{21}^{(2)2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon F_4}{R_{22}^{(2)}\left[\bar{\omega}_{22} + \nu_4\right]}\sin\varphi_{22}\,(=)\,0$$

Исключая из этых уравнений фазы φ_{11}, φ_{12}, φ_{21} и φ_{22} с точноцью до малых величин второго порядка малости завысимость между амплитудамы и частотамы внешней силы по неизвесным амплитудам $R_{11}^{(2)}$, $R_{12}^{(2)}$, $R_{21}^{(2)}$ и $R_{22}^{(2)}$ получаем в виде системы нелинейных уравнений:

$$\left[\bar{\omega}_{11} + \nu_1\right]^2 \mu_{11}^2\,R_{11}^{(2)2} + R_{11}^{(2)2}\left\{\left[\bar{\omega}_{11}^2 - \nu_1^2\right] + \frac{(\bar{\omega}_{11} + \nu_1)}{8\,\bar{\omega}_{11}}\left(3\,\bar{A}_{11}\,R_{11}^{(2)2} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left[\bar{B}_{11}\,R_{12}^{(2)2} + \bar{C}_{11}\,R_{21}^{(2)2} + \bar{D}_{11}\,R_{22}^{(2)2}\right]\right)\right\}^2 - (\varepsilon F_1)^2 = 0$$

$$\left[\bar{\omega}_{12} + \nu_2\right]^2 \mu_{12}^2\,R_{12}^{(2)2} + R_{12}^{(2)2}\left\{\left[\bar{\omega}_{12}^2 - \nu_2^2\right] + \frac{(\bar{\omega}_{12} + \nu_2)}{8\,\bar{\omega}_{12}}\left(3\,\bar{A}_{12}\,R_{12}^{(1)1} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left[\bar{B}_{12}\,R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{12}\,R_{21}^{(2)2} + D_{12}\,R_{22}^{(2)2}\right]\right)\right\}^2 - (\varepsilon F_2)^2 = 0$$

$$[\bar{\omega}_{21} + \nu_3]^2 \, \mu_{21}^2 R_{21}^{(2)2} + R_{21}^{(2)2} \Big\{ [\bar{\omega}_{21}^2 - \nu_3^2] + \frac{(\bar{\omega}_{21} + \nu_3)}{8\,\bar{\omega}_{21}} \Big(3\,\bar{A}_{21} R_{21}^{(2)2} +$$

$$+ 2\,[\bar{B}_{21} R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{21} R_{12}^{(2)2} + D_{21} R_{22}^{(2)2}] \Big) \Big\}^2 - (\varepsilon F_3)^2 = 0$$

$$[\bar{\omega}_{22} + \nu_4]^2 \, \mu_{22}^2 R_{22}^{(2)2} + R_{22}^{(2)2} \Big\{ [\bar{\omega}_{22}^2 - \nu_4^2] + \frac{(\bar{\omega}_{22} + \nu_4)}{8\,\bar{\omega}_{22}} \Big(3\,\bar{A}_{22} R_{22}^{(2)2} +$$

$$+ 2\,[\bar{B}_{22} R_{11}^{(2)2} + \bar{C}_{22} R_{12}^{(2)2} + D_{22} R_{21}^{(2)2}] \Big) \Big\}^2 - (\varepsilon F_4)^2 = 0 \qquad (2)$$

Последнюю стстему нелинейных уравнений используем для расчета стационарных амплитуд четири-частотного режима колебаний, зависимые от частот внешней силы. Это делаем вычислительним способом с помощью числового метода Newton-Kantorovič-а на вычислительной машине Honywell 6.

Для числового примера примем следующие числовые данные для оболочки и начальных неправильностей:

$$a = 1\,[m], \quad b = 2\,[m], \quad h = 0{,}01\,[m], \quad k_x = 0{,}12, \quad k_y = 0{,}06, \quad k_x^* = 12,$$

$$k_y^* = 24, \quad k^* = 36; \quad E = 2 \cdot 10^{11}\,[\mathrm{N/m^2}], \quad \rho = 7{,}8 \cdot 10^3\,[\mathrm{kg/m^1}], \quad \bar{\mu} = \frac{1}{3};$$

$$\mu_{ij} = 6; \quad \mu = 468 \left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m^3}}\right]; \quad \varepsilon \bar{F}_1 = 6153{,}8; \quad \varepsilon \bar{F}_2 = 10256{,}4; \quad \varepsilon F_3 = 4871{,}79;$$

$$\varepsilon F_4 = 7692{,}3; \quad \bar{f}_{011} = 0{,}5; \quad \bar{f}_{012} = \bar{f}_{021} = \bar{f}_{022} = 0; \quad \nu_1 \in (340{,}440\,[\mathrm{s^{-1}}]);$$

$$\nu_2 \in (400,\, 560\,[\mathrm{s\$^1}]); \quad \nu_3 \in (600,\, 800\,[\mathrm{s^{-1}}]); \quad \nu_4 \in (800,\, 900\,[\mathrm{s^{-1}}]);$$

Собственные частоты оболочки соответствуюце ,,невозмущенной', системи (без начальных неправильностей):

$$\omega_{11} = 411{,}714\ [\mathrm{s^{-1}}]; \qquad \omega_{12} = 548{,}955\ [\mathrm{s^{-1}}];$$

$$\omega_{21} = 725{,}548\ [\mathrm{s^{-1}}]; \qquad \omega_{22} = 847{,}524\ [\mathrm{s^{-1}}].$$

Собственные частоты оболочки соответствующие ,,невозмущеной'' базной системы (с начальними неправильностямы):

$$\bar{\omega}_{11} = 367{,}467\ [\mathrm{s^{-1}}]; \qquad \bar{\omega}_{12} = 459{,}828\ [\mathrm{s^{-1}}];$$

$$\bar{\omega}_{21} = 707{,}259\ [\mathrm{s^{-1}}]; \qquad \bar{\omega}_{22} = 829{,}729\ [\mathrm{s^{-1}}].$$

Выдно что для выбраного вычислительного примера амплитуды вынужденой силы в форме фундаментальных функций $W_{ij}(x, y)$ гармоник ,,невозмущеного'' режима колебаний соответствующих резонансным частотам.

Мгновеные частоты ν_1, ν_2, ν_3 и ν_4 вынужденой силы выбираем через частотные резонансные интервалы

$\bar{\omega}_{11} \rightarrow \nu_1 \in (340,\ 440)$ $\qquad$ $\bar{\omega}_{12} \rightarrow \nu_2 \in (400,\ 560)$

$\bar{\omega}_{21} \rightarrow \nu_3 \in (600,\ 800)$ $\qquad$ $\bar{\omega}_{22} \rightarrow \nu_4 \in (800,\ 900)$

$$W_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi}{a} x \sin \frac{j\pi}{b} y \qquad i, j = 1, 2.$$

Пользуясь вычислительнымы результатамы можно построить амплитудно-частотные и фазно-частотные кривые стационарных амплитуд и фаз резонансного четири-частотного режима колебаний.

Возможно очень большое число вычислительных результат завысимо от выбора частот ν_1, ν_2, ν_3, ν_4. Поэтому мы сделалы выбор семейства амплитудно-частотных кривых характеризующие завысимость стационарных амплитуд первой, второй, третей и четвертой гармоники соответствующих установывщемуся режиму колебаний оболочки с начальнимы неправильностямы в форме первой фундаментальной функции „невозмущеного" движения, для неперерывного изменения дискретных числовых значений частот ν_1 и ν_2 и дискретно выбраных числовых значений частот $\nu_3 = 670$ (s^{-1}], $\nu_4 = 780$ [s^{-1}], которые выбраны непосредствено близко третей и четвертой собственным базным частотам „невозмущеной', системы.

На следующих рисунках № 1. a, b, c и d прыведены семейства амплитудно-частотных кривых первой, второй, третей и четвертой гармоники для непреривного изменения дискретных частот $\nu_1 \in (340,\ 400)$ и на рис. № 1. e, f, g и h для непреривного изменения дискретних частот $\nu_2 \in (400,\ 560\ s^{-1})$.

Для отличия от линейных в нелинейных систем являются части амплитудно-частотных кривых с неустойчивыми амплитудамы и фазамы. Для одночастотных режимов является по одын резонансный скачок при дискретном увеличнию или уменьшению частот, а для многочастотных режимов бывает их большое число. Как последствые взаимного влияния гармоник и начальных неправилностей для двухчастотного режима могут явится по два резонансных скачка в случае увеличивания и уманения значений частот внешней силы. Для четири-частотного режима колебаний форма амплитудно-частотных кривых зависит от конкретного выбора частот.

На всех рисунках № 1. показаны скачки и неустоичивые амплитуды которие можно обнаружить между ними.

II. Исследование нестационарного вынужденого четири-частотного режима колебаний оболочки

Для анализа нестационарного вынужденого четири-частотного режима колебаний оболочки пользуемся системы дифференциальных уравнений первого приближения (1). Эти уравнения интегрируем методом Runge-Kutte на вычислительной машине Honywell 6. Предполагается линейное медленно изменение частот внешних сил, как в направлении увеличения $\nu_1 = 350 + \beta t$, также и в направлении уменьшения $\nu_1 = 420 - \beta t$ частот.

На следующих рисунках № 2. а и б нарисовано семейство амплитудно-частотных кривых нестационарных амплитуд для увеличения и уменшения,

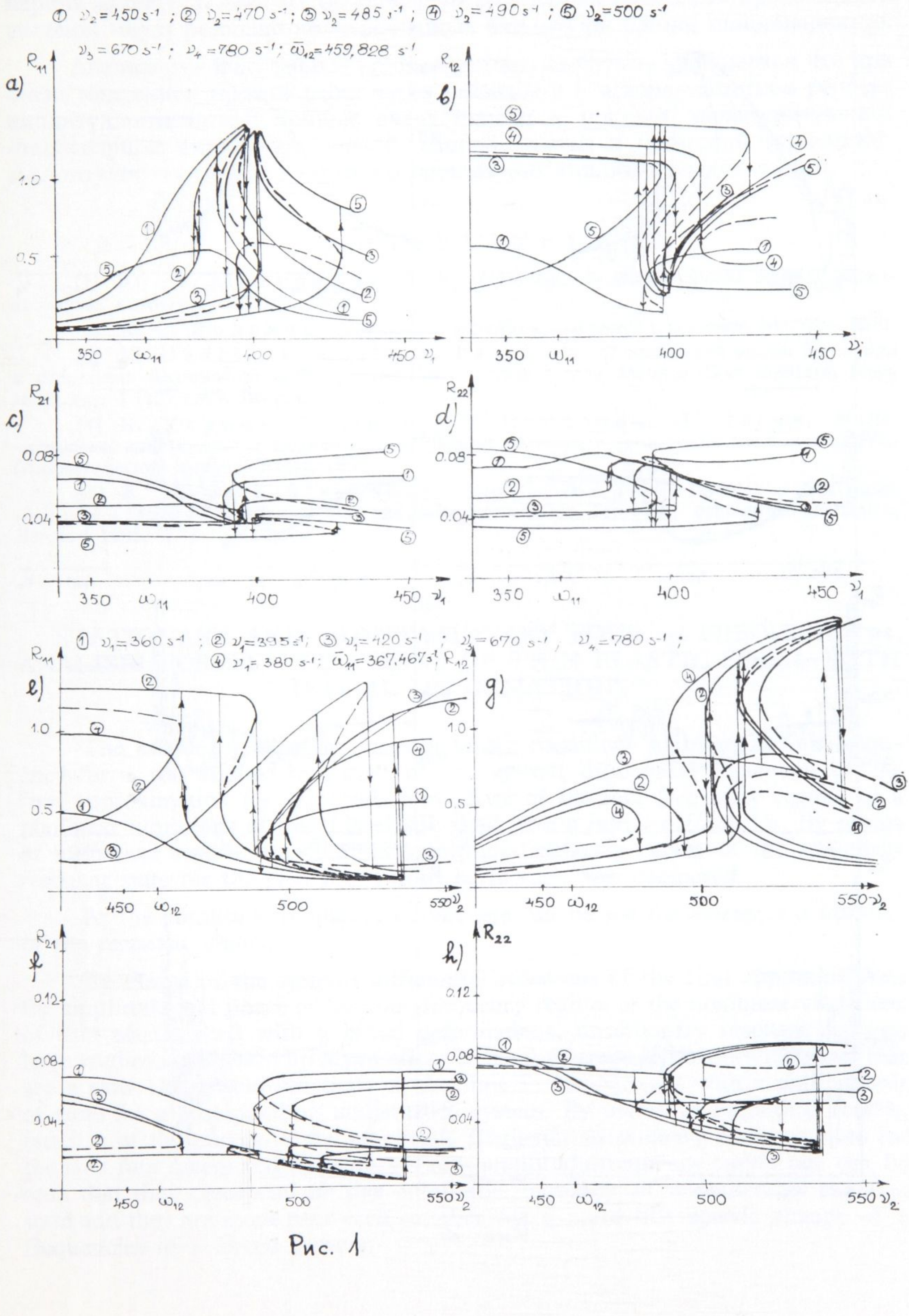
① $\nu_2=450\ s^{-1}$; ② $\nu_2=470\ s^{-1}$; ③ $\nu_2=485\ s^{-1}$; ④ $\nu_2=490\ s^{-1}$; ⑤ $\nu_2=500\ s^{-1}$
$\nu_3=670\ s^{-1}$; $\nu_4=780\ s^{-1}$; $\bar{\omega}_{12}=459{,}828\ s^{-1}$
a)
b)
c)
d)
R_{11}
R_{12}
R_{21}
R_{22}
ω_{11}
ν_1
① $\nu_1=360\ s^{-1}$; ② $\nu_1=395\ s^{-1}$; ③ $\nu_1=420\ s^{-1}$; $\nu_3=670\ s^{-1}$; $\nu_4=780\ s^{-1}$;
④ $\nu_1=380\ s^{-1}$; $\bar{\omega}_{11}=367{,}467\ s^{-1}$
e)
g)
f)
h)
ω_{12}
ν_2

Рис. 1

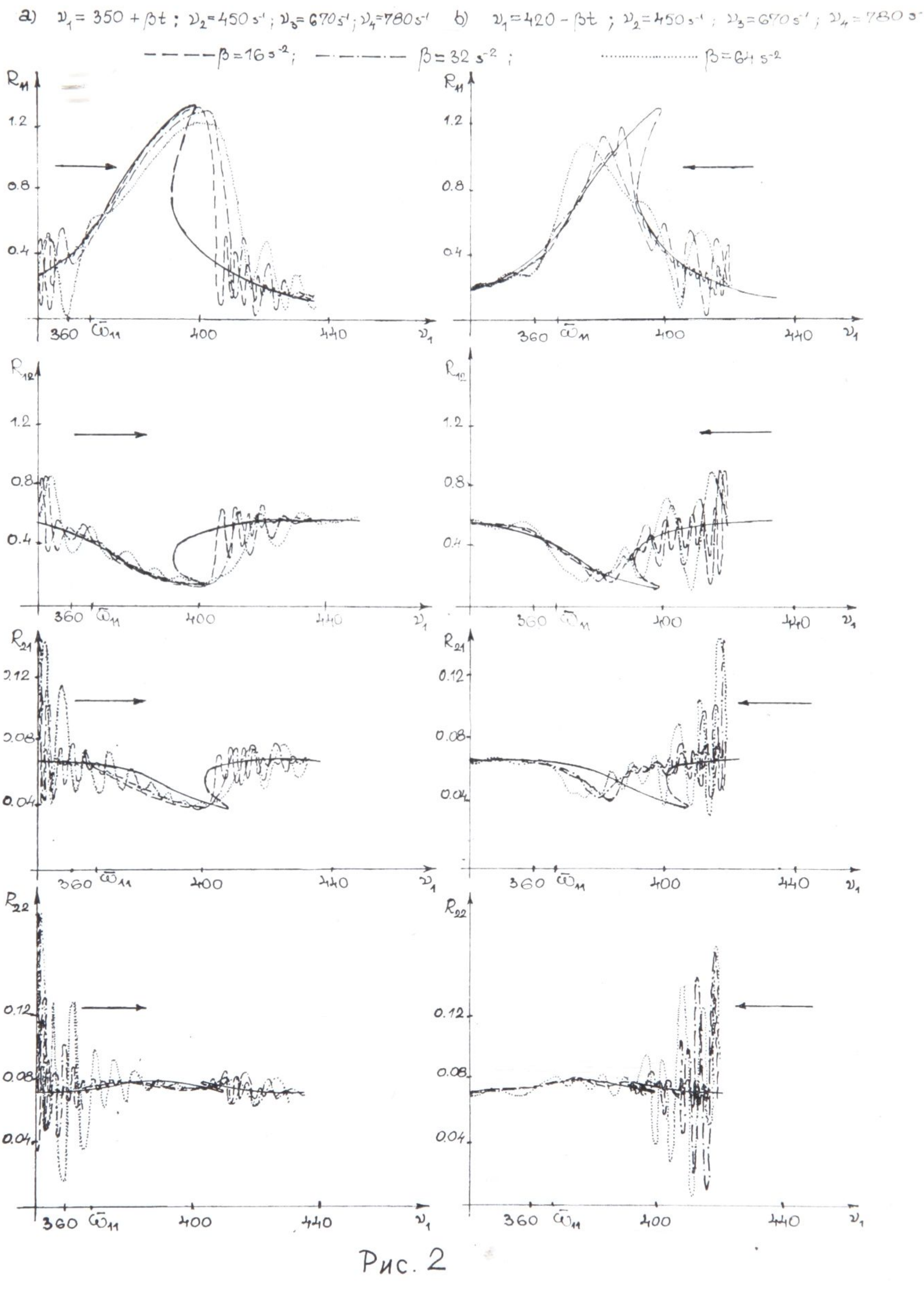
a) $\nu_1 = 350 + \beta t$; $\nu_2 = 450\, s^{-1}$; $\nu_3 = 670\, s^{-1}$; $\nu_4 = 780\, s^{-1}$
b) $\nu_1 = 420 - \beta t$; $\nu_2 = 450\, s^{-1}$; $\nu_3 = 670\, s^{-1}$; $\nu_4 = 780\, s^{-1}$
$\beta = 16\, s^{-2}$; $\beta = 32\, s^{-2}$; $\beta = 64\, s^{-2}$
R_{11}
R_{12}
R_{21}
R_{22}
1.2
0.8
0.4
0.12
0.08
0.04
360
$\bar{\omega}_{11}$
400
440
ν_1

Рис. 2

а и б, частот внешней сылы различними скоростямы. Также на каждом рисунке приведенна соответствующая амплитудно-частотная кривая стационарних амплитуд, что бы было выдно для малых скоростях прохождения системы через резонанс нестационарные амплитуды ближи стационарнимы.

Анализируя полученные кривые амплитуда-частота убеждаемся что при очень медленном прохождении через резонанс и в четири-частотном режиме амплитудно-частотние кривые очень блиски к кривым характеризующим стационарные амплитуды первой, второй, третей и четвертой гармоники. Амплитудно-частотные кривые нестационарних амплитуд следят скачки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Митропольский, *Проблеми асимптотической теории нестационарних колеваний*, Москва 1964

[2] А. С. Вольмир, *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*, Москва, 1972.

[3] K. Hedrih, P. Kozić, R. Pavlović, *O uzajamnom uticaju harmonika u nelinearnim sistemima sa malim parametrom*, Zbornik radova Matematičkog instituta, Nova serija knj. 4 (12) 1983, Beograd.

[4] К. Хедрих, С. Митич, Р. Павлович, П. Козич, *Многочастотные вынужденые колебания тонкой упругой оболочки с начальными неправильностями* (Аналитический анализ) Варна 1984.

[5] K. Hedrih-Stevanović, *Multifrequency forced vibrations of thin elastic shels with a pozitive Gausse's curvature and finite deformations*, Teorijska i primenjena Mehanika, Beograd 1985.

STATIONARY AND NONSTATIONARY FOUR — FREQUENCY ANALISIS FORCED VIBRATIONS OF THIN ELASTIC SHELL WITH INITIAL DEFORMATIONS

The stationary resonant regimes under conditions of effect a four-frequency force, was studied by means of the system differential equations of the first approximation for amplitude and phase of the four-frequency regime of a nonlinear vibrations of the thin elastic shell with a initial deformities. By means of numerical results, the families amplitude-frequency curves of the stationary resonant state for the first four forced harmonics, was composed.

At the amplitude-frequency curves one can be see the existence a number of the resonant jumps.

By means of the systems differential equations of the first approximations for amplitude and phase of the four-frequency regime of the nonlinear vibrations of thin elastic shell with a initial deformations, unstationary resonant regimes have studied, under conditions of effect of the four-frequent forced vibrations that are a slow changeable functions of the time in comparisons with a natural unit of time for a coresponding undisturbed system. By means of numerical results, families of the curves of the amplitude frequency ustacionary resonant state for the first four incentived harmonics. From amplitude-frequency curves one can be seen that they corespond to the amplitude-frequency of a stationary resonant state and they are move near each another for a more litle speeds change of a frequencies of a forced powers.

STACIONARNA I NESTACIONARNA ČETVORO-FREKVENTNA ANALIZA PRINUDNIH OSCILACIJA TANKE ELASTIČNE LJUSKE SA POČETNIM NEPRAVILNOSTIMA

Pomoću sistema diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitude i faze četvorofrekventnog režima nelinearnih oscilacija tanke elastične ljuske sa početnim nepravilnostima proučavani su stacionarni i nestacionarni rezonantni režimi u uslovima dejstva četvorofrekventne prinude frekvencija, koje su sporo-promenljive funkcije vremena u poređenju sa prirodnom jedinicom vremena od-govarajućeg „neporemećenog" sistema. Pomoću numeričkih rezultata sastavljene su familije amplitudno-frekventnih krivih stacionarnog i nestacionarnog rezo-nantnog stanja za prva četiri pobuđena harmonika. Sa amplitudno-frekventnih krivih stacionarnog rezonantnog stanja se vidi postojanje više rezonantnih sko-kova. Amplitudno-frekventne krive nestacionarnog rezonantnog stanja prate od-govarajuće krive stacionarnog rezonantnog stanja, a bliže su im za manje brzine promene frekvencija prinudne sile.

Mašinski fakultet
18000 Niš
Jugoslavija