TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 12 pp. 17—24, 1986, UDK 532

SUR UNE METHODE APPROCHEE ET UNE SOLUTION ANALYTIQUE DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE LAMINAIRE TRIDIMENSIONNELLE EN REGIME NON STATIONNAIRE POUR DES NOMBRES DE PRANDTL ARBITRAIRES

Crnojević C., Lečić M., Ašković R.

(Reçu le 10. 10. 1986.)

1. Introduction

Dans l'écoulement laminaire d'un fluide à propriétés physiques ρ et μ constantes (condition satisfaite pour l'air, par exemple, en bonne approximation dans un écoulement dont les vitesses ne depassent pas 50 m/s, tandis que les différences de temperature dans le fluide restent en dessous de 50 K environ), les équations de la couche limite thermique laminaire en régime non stationnaire à trois dimensions peuvent s'écrire, après application du principe de prévalence, sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} - u \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{\partial u}{\partial n}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (e_2 u)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v)}{\partial n} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (u^2 - u_e^2) - u \frac{\partial w}{\partial s} - v \frac{\partial w}{\partial n}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\nu}{P} \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{\nu}{C_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 \right] - u \frac{\partial T}{\partial s} - w \frac{\partial T}{\partial z} - v \frac{\partial T}{\partial n}. \tag{4}$$

Le système (s, z, n) de coordonnées curvilignes utilisé est basé sur les lignes de courant pariétales de l'écoulement à potentiel [1]; $e_1(s, z)$, $e_2(s, z)$ et $e_3 = 1$ sont les coefficients metriques de ce système, P est le nombre de Prandtl. Par convention expresse toutes les intégrations du système (1) à (4) seront exécutées le long des lignes-coordonnées.

2. Méthode approchée du traitement des équations

En supposant que pour les premiers instants du mouvement, tous les termes convectifs du système ont des valeurs très faibles par rapport aux autres termes, nous pouvons définir un procédé d'approximations successives pour la solution du système des équations (1) à (4):

Soit u_0, v_0, w_0, T_0 une première approximation qui décrit les premiers instants du mouvement, u_1, v_1, w_1, T_1 une deuxième approximation tenant compte de l'influence des termes convectifs, u_i, v_i, w_i, T_i des approximations ultérieures telles que les deuxièmes membres du système contiennent seulement des termes d'itérations précédentes déjà connus. On peut alors décomposer le système des équations (1) à (4) en une succession de systèmes et de conditions aux limites:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial (e_2 u_0)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v_0)}{\partial n} = 0, \tag{6}$$

avec $u_0 = v_0 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$, ainsi que pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et $u_0 \rightarrow u_e$ (s, z, t) pour $n \rightarrow \infty$;

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (u_0^2 - u_e^2) \tag{7}$$

avec $w_0 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$, ainsi que pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et $w_0 \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$;

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\nu}{P} \frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = \frac{\nu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial n} \right)^2 \right], \tag{8}$$

avec $T_0 = T_p$ ou $\dfrac{\partial T_0}{\partial n} = 0$ pour $n = 0$, $T_0 \rightarrow T_\infty$ pour $n \rightarrow \infty$.

Ce système (5) à (8) pour u_0, v_0, w_0, T_0 sera suivi de:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial n}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial (e_2 u_1)}{\partial s} + \frac{\partial (e_2 v_1)}{\partial n} = 0, \tag{10}$$

avec $u_1 = v_1 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$, pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et pour $n \rightarrow \infty$;

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial n^2} = -(u_0 + u_1) \frac{\partial w_0}{\partial s} - (v_0 + v_1) \frac{\partial w_0}{\partial n} + \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (2 u_0 u_1 + u_1^2), \tag{11}$$

avec $w_1 = 0$ pour $t = 0$ et $n \geqslant 0$, pour $n = 0$ et $t \geqslant 0$ et pour $n \rightarrow \infty$;

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\nu}{P} \frac{\partial^2 T_1}{\partial n^2} = \\ &= \frac{2\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial w_0}{\partial n} \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) - u_0 \frac{\partial T_0}{\partial s} - w_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} - v_0 \frac{\partial T_0}{\partial n}, \end{aligned} \tag{12}$$

avec $T_1 = 0$ ou $\dfrac{\partial T_1}{\partial n} = 0$ pour $n = 0$, $T_1 \to 0$ pour $n \to \infty$.

On peut continuer ainsi pour u_i, v_i, w_i, T_i $(i = 2, 3, 4, \ldots)$.

Toutes ces équations sont valables pour $u_e\ (s, z, t)$ quelconques, avec la seule restriction $u_e\ (s, z, 0) = 0$, et pour n'importe quelles valeurs constantes

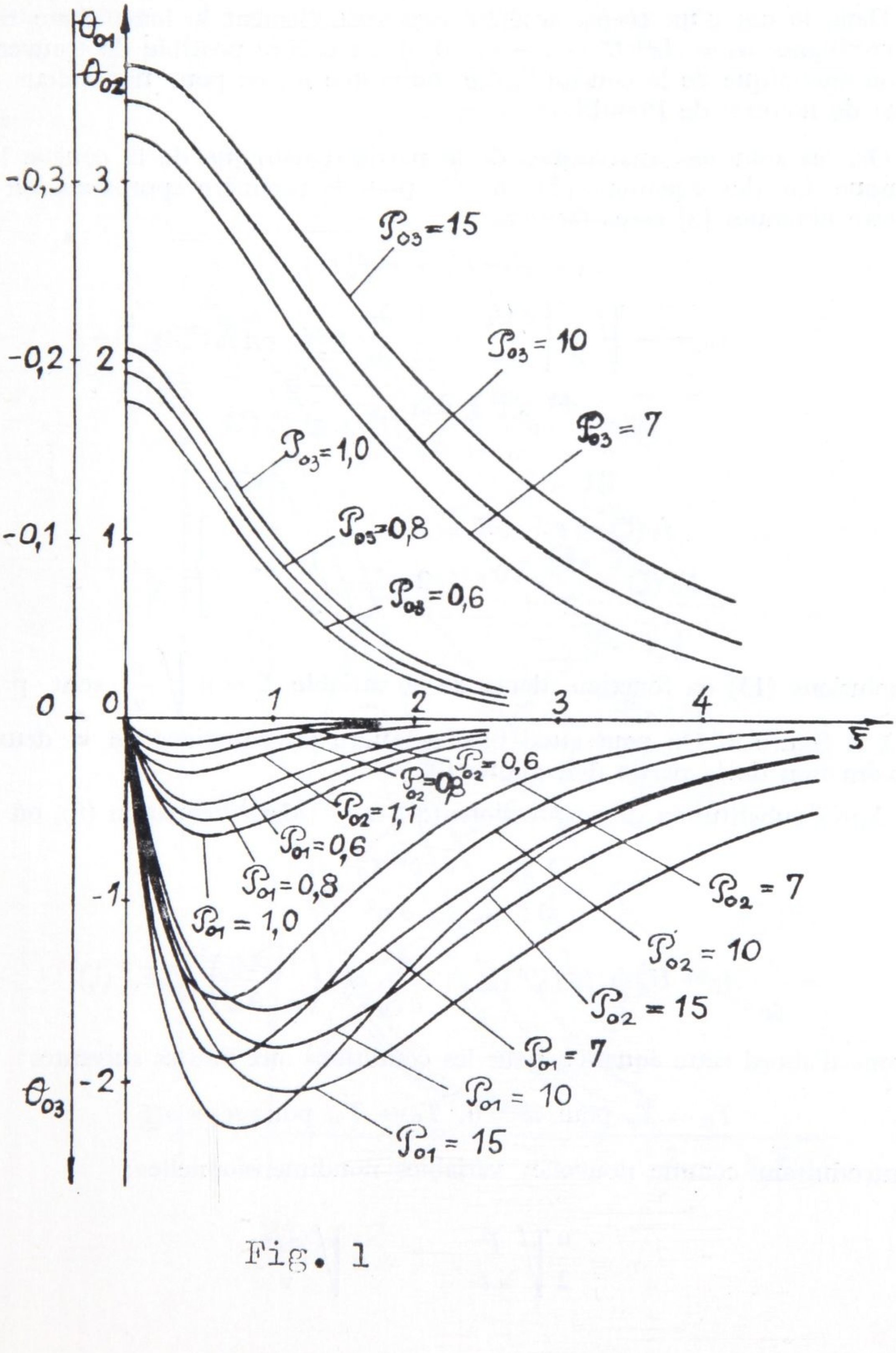

Fig. 1

de. P. T_p peut être une fonction quelconque des variables s et z. La convergence des séries $u = \Sigma\, u_i$, $v = \Sigma\, v_i$, $w = \Sigma\, w_i$ et $T = \Sigma\, T_i$ ne peut raisonnablement être attendue que sous l'hypothèse de faibles valeurs des termes convectifs au début du mouvement.

3. Une solution analytique pour P quelconque

Dans le cas d'un corps, accéléré exponentiellement le long d'une trajéctoire réctiligne: $u_e = Ae^{ct}\, U_e(s, z)$, $c > 0$, il est encore possible de trouver une solution analytique de la couche limite thermique même pour une valeur quelconque de nombre de Prandtl P.

Or, les solutions analytiques de la partie dynamique de la couche limite thermique, i.e. des équations (5), (6), (7) pour la première approximation peuvent être obtenues [2] assez facilement:

$$u_0 = Ae^{ct}\, U_e(s, z) f_0'(\zeta), \tag{5'}$$

$$v_0 = -\sqrt{\frac{\nu}{c}}\left[\frac{\partial U_e}{\partial s} + \frac{1}{e_2}\frac{\partial e_2}{\partial s} U_e^2(s, z)\right] f_0(\zeta), \tag{6'}$$

$$w_0 = \frac{A^2}{c} e^{2ct} \frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z} U_e^2(s, z)\, F_0(\zeta), \tag{7'}$$

où:

$$\left.\begin{aligned} f_0(\zeta) &= e^{-\zeta} + \zeta - 1, \\ F_0(\zeta) &= \frac{5}{2} e^{-\zeta\sqrt{2}} - 2\, e^{-\zeta} - \frac{1}{2} e^{-2\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Les solutions (13) en fonction, donc, de la variable $\zeta = n\sqrt{\frac{c}{\nu}}$ sont présentées à la figure 2. On peut aussi bien resoudre les équations de la deuxième approximation de la partie dynamique [2].

Après substitution des expressions (5') et (7') dans l'équation (8), on aura:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\nu}{P}\frac{\partial^2 T_0}{\partial n^2} = \\ &= \frac{c}{c_p} Ae^{2ct}\, U_e^2(s, z) f_0''^2(\zeta) + \frac{A^4}{c\, c_p} e^{4ct}\left(\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\right)^2 U_e^4 F_0'^2(\zeta). \end{aligned} \tag{14}$$

Traitons d'abord cette équation pour les conditions aux limites suivantes:

$$T_0 = T_p \text{ pour } n = 0, \quad T_0 \to T_\infty \text{ pour } n \to \infty. \tag{15}$$

En introduisant comme nouvelles variables nondimensionnelles:

$$\eta = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{P}{\nu t}}, \quad \zeta = n\sqrt{\frac{c P}{\nu}},$$

nous cherchons la solution de l'équation (14) sous la forme:

$$T_0 - T_\infty = (T_p - T_\infty)\,\theta_0(\overline{\eta}) + \frac{A^2}{c_p}\,e^{2ct}\,U_e^2\,\theta_{01}(\overline{\zeta};P) + \\ + \frac{A^4}{c^2 c_p}\,e^{4ct}\left(\frac{1}{e_1}\frac{\partial e_1}{\partial z}\right)^2 U_e^4\,\theta_{02}(\overline{\zeta};P) \tag{16}$$

et nous obtenons:

$$\theta_0'' + 2\,\overline{\eta}\,\theta_0' = 0, \tag{17}$$

$$\theta_{01}'' - 2\,\theta_{01} = -f_0''^2, \tag{18}$$

$$\theta_{02}'' - 4\,\theta_{02} = -F_0''^2, \tag{19}$$

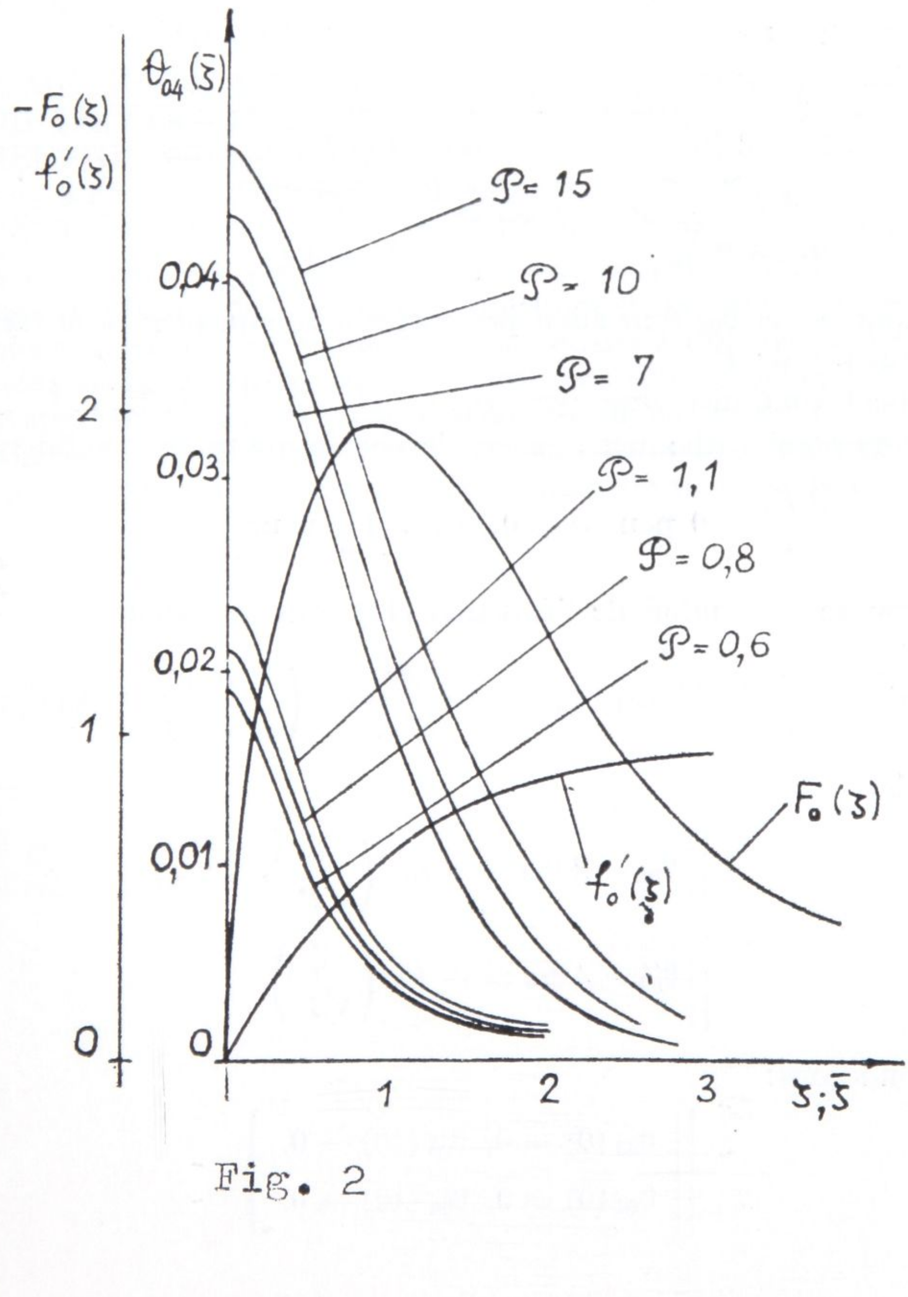

Fig. 2

avec les conditions:

$$\left.\begin{array}{ll} \theta_0\,(0) = 1, & \theta_0\,(\infty) \to 0, \\ \theta_{01}\,(0) = 0, & \theta_{01}\,(\infty) \to 0, \\ \theta_{02}\,(0) = 0, & \theta_{02}\,(\infty) \to 0. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Il est possible de trouver les solutions analytiques des équations (17), (18), (19), tenant compte des conditions (20), pour n'importe quelle valeur de P:

$$\theta_0 = 1 - Erf\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\frac{P}{\nu\, t}}, \tag{17'}$$

$$\theta_{01} = \frac{P}{4 - 2\,P}\left(e^{-\frac{2}{\sqrt{P}}\bar{\zeta}} - e^{-\bar{\zeta}\sqrt{2}}\right) \tag{18'}$$

$$\begin{aligned} \theta_{02} = {} & \frac{5\sqrt{2}\,P}{6+4\sqrt{2}-4P}\left(e^{-\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{P}}\bar{\zeta}} - e^{-2\bar{\zeta}}\right) + \frac{10\sqrt{2}\,P}{3+2\sqrt{2}-4P}\left(e^{-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{P}}} - e^{-2\bar{\zeta}} + \right. \\ & + \frac{25\,P}{16-8\,P}\left(e^{-2\bar{\zeta}} - e^{-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{P}}\bar{\zeta}}\right) + \frac{P}{1-P}\left(e^{-2\bar{\zeta}} - e^{-\frac{2}{\sqrt{P}}\bar{\zeta}}\right) + \\ & + \frac{4\,P}{9-4\,P}\left(e^{-2\bar{\zeta}} - e^{-\frac{3}{\sqrt{P}}\bar{\zeta}}\right) + \frac{P}{16-4\,P}\left(e^{-2\bar{\zeta}} - e^{-\frac{4}{\sqrt{P}}\bar{\zeta}}\right). \end{aligned} \tag{19'}$$

Les fonctions θ_{01} et θ_{02} sont aussi présentées graphiquement à la figure 1 pour certaines valeurs de P.

On peut continuer ainsi pour u_i, v_i, w_i, T_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Pour la paroi „athermane" nous devons satisfaire les conditions:

$$\frac{\partial\, T_0}{\partial\, n} = 0 \text{ pour } n = 0,\; T_0 \to T_\infty \text{ pour } n \to \infty. \tag{21}$$

Si l'on suppose la solution de l'équation (14) sous la forme:

$$T_0 = T_\infty + \frac{A^2}{c_p}\, e^{2ct}\, U_e^2\, \theta_{03}\,(\bar{\zeta};\ P) + \frac{A^4}{c^2\, c_p}\, e^{4ct}\left(\frac{1}{e_1}\frac{\partial\, e_1}{\partial\, z}\right)^2 U_e^4\, \theta_{04}\,(\bar{\zeta};\ P) \tag{22}$$

on obtiendra:

$$\theta_{03}'' - 2\,\theta_{03} = -\,f_0''^{\,2}\left(\frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{P}}\right), \tag{23}$$

$$\theta_{04}'' - 4\,\theta_{04} = -\,F_0'^{\,2}\left(\frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{P}}\right), \tag{24}$$

avec les conditions:

$$\left.\begin{array}{l} \theta_{03}\,(0) = 0,\ \theta_{03}\,(\infty) \to 0, \\ \theta_{04}\,(0) = 0,\ \theta_{04}\,(\infty) \to 0. \end{array}\right\} \tag{25}$$

On a trouvé les solutions analytiques des équations (23) et (24), tenant compte des conditions (25). Ces solutions sont aussi présentées à la figure 2 pour quelques valeurs du nombre de Prandtl.

REFERENCES

[1] E. A. Eichelbrenner et R. Ašković: *Sur une methode approchée de traiter les couches limites laminaires non stationnaires d'un écoulement dans un fluide incompressible à trois dimensions.* Journal de mécanique, Paris, Vol. 6, No 3 (1967).

[2] R. Ašković: *Etude de la couche limite laminaire tridimensionnelle en régime non stationnaire.* RAPPORT A-9 du Laboratoire d'Aérodynamique de l'Université Laval, Canada (1967).

SUR UNE METHODE APPROCHEE ET UNE SOLUTION ANALYTIQUE DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE LAMINAIRE TRIDIMENSIONNELLE EN REGIME NON STATIONNAIRE POUR DES NOMBRES DE PRANDTL ARBITRAIRES

Dans ce travail on expose, d'abord, une methode d'approximations successives pour la solution du système des èquations de la couche limite thermique de l'écoulement laminaire en régime non stationnaire à trois dimensions. Ensuite, on trouve des solutions analytiques des équations différentielles issues de cette methode d'approximations successives pour des nombres de Prandtl quelconques. Finalement, ces solutions analytiques sont aussi calculées numériquement et présentées graphiquement pour certains valeurs du nombre de Prandtl.

JEDNO REŠENJE TEMPERATURSKOG LAMINARNOG GRANIČNOG SLOJA PRI PROIZVOLJNOJ VREDNOSTI PRANDTLOVOG BROJA

U ovom radu autori, najpre, formiraju jednu metodu uzastopnih približenja za tretiranje sistema parcijalnih diferencijalnih jednaèina temperaturskog laminarnog graničnog sloja pri nestacionarnom režimu strujanja. Zatim je nađeno jedno analitièko rešenje diferencijalnih jednačina proizašlih iz metode sukcesivnih aproksimacija čak za proizvoljne vrednosti Prandtlovog broja. I konačno, nekoliko tih rešenja su, ilustracije radi, numerički proračunata i grafički predstavljena za nekoliko vrednosti Prandtlovih brojeva.

Dipl. ing. C. Crnojević, assistant;
M. Lečić, étudiant;
Prof. Dr R. Ašković;
Mašinski fakultet,
27. marta 80,
11000 Beograd