TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 12 pp. 135—142, 1986, UDK 531.8

О ПРОБЛЕМЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ

Драгомир Зекович

(Поступило 7. 04. 1986.)

Проблема материальной реализации нелинейной неголономной связи первый раз рассмотрена в работах П. Аппеля и Е. Делассю, опубликованных в период 1911—1913. г. Экзистенция нелинейной неголономной связи рассматривается в рамках классической ньютоновской механики, дается конкретный механизм, реализующий эту связь и составляются дифференциальные уравнения движения для этой системы. Рассмотриваемая связь язляется нелинейной неголономной связью первого ряда, (о чем в дальнейшем анализе будет речь), в отличие от связей второго ряда, которыми занимается Теория управления. Нелинейные связи первого ряда входят в домен ньютоновской механики (в них фигурируют только первые производные обобщенных координат).

В литературе [1], [3], [4] встречаемса с двумя примерами механизмов, реализующих нелинейную неголономную связь. Первый пример — это пример Аппеля-Гамеля, а второй пример — пример Маслова. Пример Аппеля-Гамеля изображен на рисунке 1.

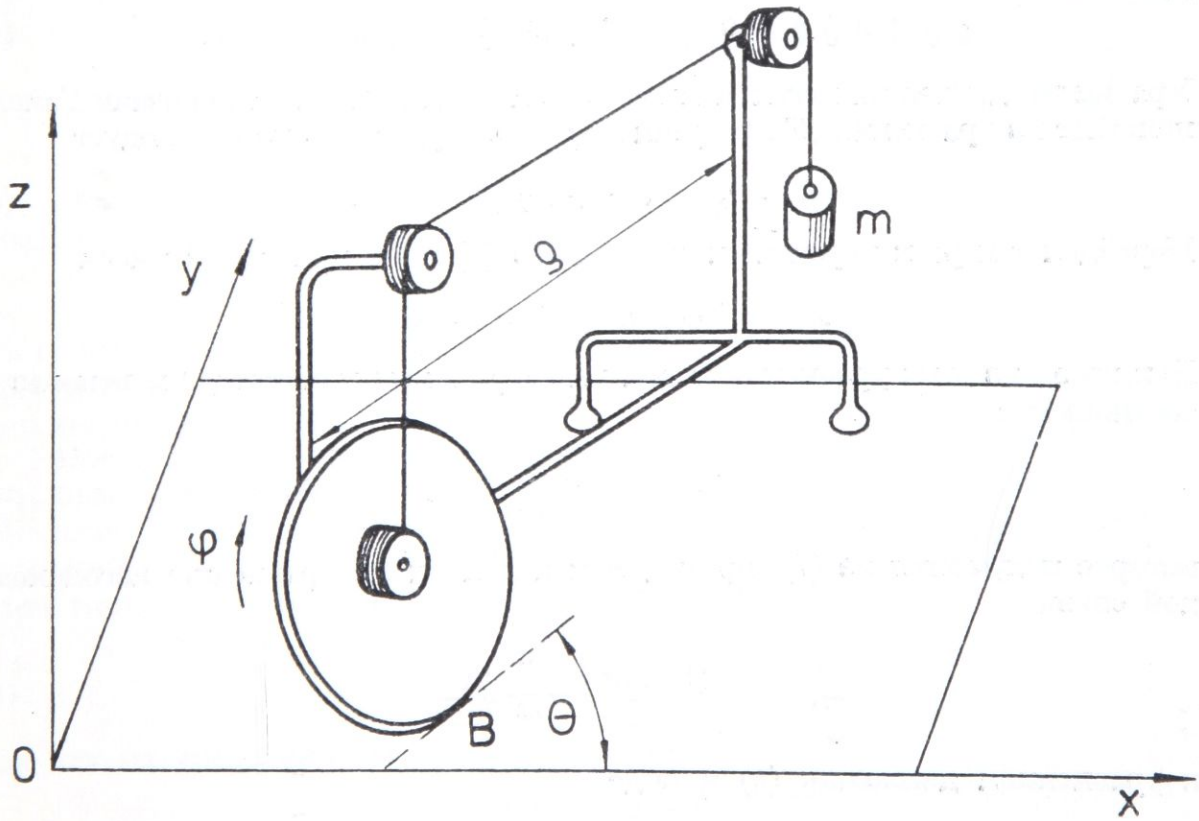

Рис. 1.

„Грузик массы m висит на нити, перекинутой через блоки и намотанной на барабан радиуса b. Барабан скреплен с колесом радиуса a, которое катается без проскальзывания по горизонтальной плоскости, соприкасаясь с ней в точке B. Ножки рамы, поддерживающей блоки и сохраняющей плоскость колеса вертикальной скользят по горизонтальной плоскости без трения. Пусть x_B, y_B — координаты точки B, θ — угол между плоскостью колеса и осью Ox, φ — угол собственного вращения колеса, x, y, z — координаты массы m. Из рис. 1. следует, что

$$dz = b d\varphi \qquad (b > 0). \tag{1}$$

Координаты x_B, y_B и x, y связаны в соотвествии с рис. 1. соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x &= x_B + \rho\cos\theta \\ y &= y_B + \rho\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Условие качения без проскальзывания приводит к уравнениям неголономной связи

$$dx_B = a\cos\theta\, d\varphi, \qquad dy_B = a\sin\theta\, d\varphi. \tag{3}$$

В переменых φ, θ получим следующие уравнения движения системы:

$$\left.\begin{aligned} (A + m\rho^2)\,\ddot\theta + ma\rho\,\dot\theta\,\dot\varphi &= 0 \\ [(m + m_1)\,a^2 + mb^2 + C^2]\,\ddot\varphi - ma\rho\,\dot\theta^2 + mgb &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

(m_1, A, C — масса и центральные моменты инерции колеса). Следуя Гамелю, пренебрежем массой колеса ($m_1 = A = C = 0$), тогда вместо (4) получим уравнения

$$\rho\,\ddot\theta + a\,\dot\theta\,\dot\varphi = 0, \qquad (a^2 + b^2)\,\ddot\varphi - a\rho\,\dot\theta^2 = -gb. \tag{5}$$

Уравнения движения неголономной системы с нелинейными связами Гамель получает из уравнения (5), устремляя $\rho \to 0$. При $\rho \to 0$ из (5) следует

$$\dot\theta = 0, \qquad (a^2 + b^2)\,\ddot\varphi = -gb. \tag{6}$$

Перейдем теперь к переменым x, y, z. Из (3) и (2) при $\rho = 0$ имеем

$$\dot x = a\,\dot\varphi\cos\theta, \qquad \dot y = a\,\dot\varphi\sin\theta. \tag{7}$$

Исключая из этих уравнений переменные φ, θ при помощи (1) и используя соотношение

$$\dot x\ddot y - \dot y\ddot x = \frac{a^2}{b^2}\,\dot z^2,$$

которое получается из (7), приходим к нелинейному уравнению неголономной связи

$$\dot x^2 + \dot y^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\dot z^2 \tag{8}$$

и уравнениям движения (6) в виде

$$\dot x\ddot y - \dot y\ddot x = 0, \qquad (a^2 + b^2)\,\ddot z = -gb^2, \tag{9}$$

”, [3].

Второй пример реализации нелинейной неголономной связи есть механизм Маслова (1964 г.). Пример Маслова изображен на рисунке 2.

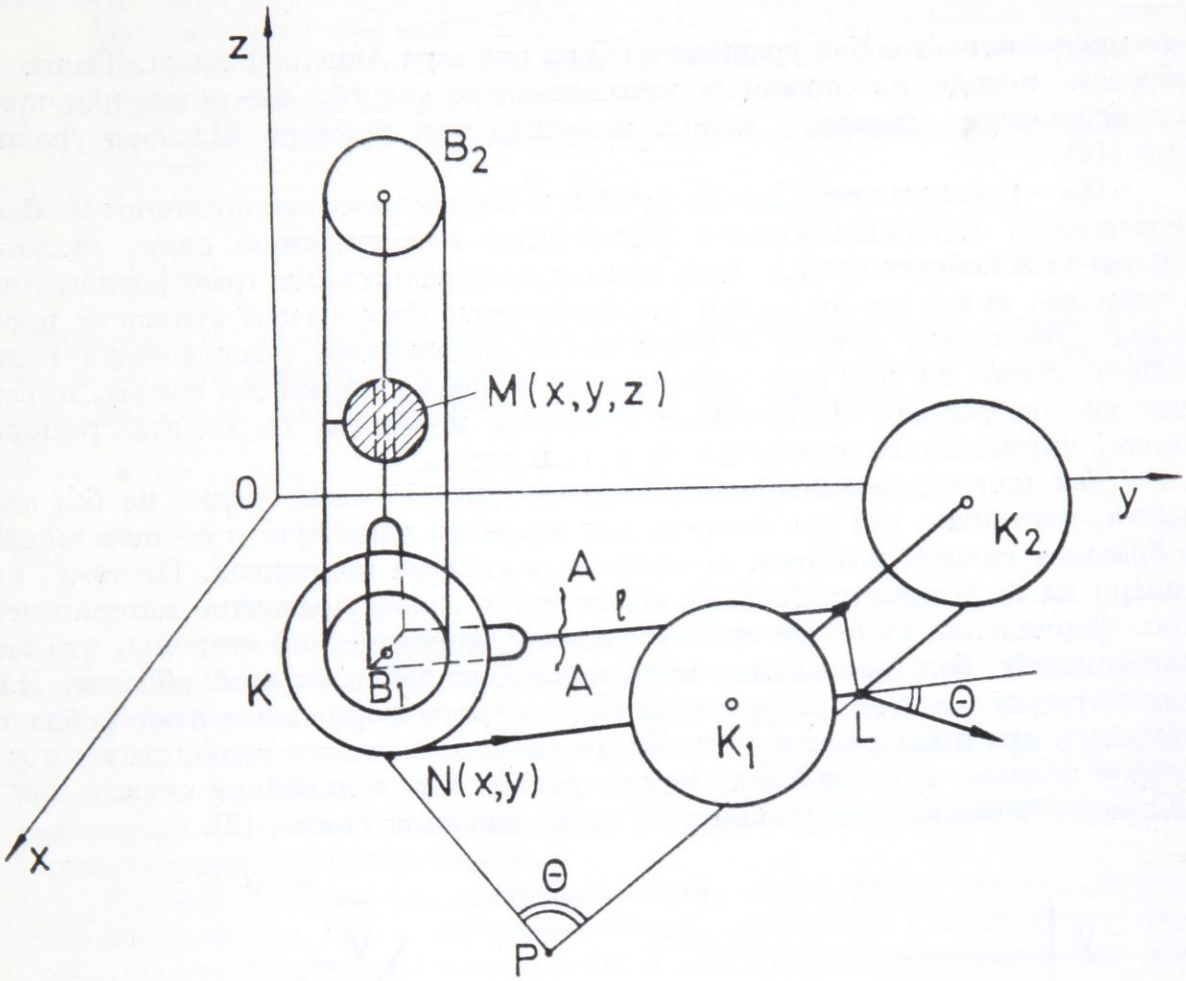

Рис. 2.

„Рассмотрим движение точки M (x, y, z), подчиненное связи аналитически выражающейся уравнением:

$$\alpha^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dot{z}^2. \tag{10}$$

Эта связь осуществвляется с помощью механизма, узображенного на рис. 2. Материальной мы считаем только точку M, массой же всех остальных частей системы пренебрегаем", [4].

После этих детальных изображений примеров нелинейной неголономной связи сделаем анализ происхождения этих связей. Уравнение нелинейной связи (8), в примере Аппеля-Гамеля, полученное после показаных трансформаций, можно получить из уравнения (7), сначала из квадрированием, а затем сложением так полученных уравнений, то есть

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^2 &= a^2\, \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \\ \dot{y}^2 &= a^2\, \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}\right\} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\, \dot{\varphi}^2.$$

Так как из уравнения (1) следует, что

$$\dot{z} = b\, \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{z}}{b},$$

в конце получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2,$$

что представлюет собой уравнение (8) из примера Аппеля-Гамеля. Таким же образом, исходя из линейных неголономных связей, совершив над ними алгебраические операции, можно получить и в примере Маслова уравнение (10).

На основании этого можно прийти к следующему заключению: В обоих механизмах, материализующих нелинейную неголономную связь имеются случаи нелинейных связей, полученных алгебраическими трансформациями. Очевидно, связи не являются последствиями физической сущности проблемы. Это ставит вопрос о коректности механизмов, реализующих нелинейную связь, так как речь идёт не о природных нелинейных связах, то есть они не отображают физическую сущность проблемы (в смысле реакции связи, виртуальных перемещений и т. п.).

Так полученные нелинейные неголономные связи однако не без значения, учитывая, что эта связь может заменить линейную в составе вполне собранных связей, которым механическая система подчинена. Поэтому, несмотря на отсуствие природных нелинейных связей, развитие математического формализма является значительным с теоретической стороны, что нам потверждает большое число опубликованных работ из этой области. Для иллюстрации значения развития математического формализма в этой области приведём два примера, где нелинейная связь появляется равноправно с линейной связью, т. е. проблему можно решать или с линейной связью или с нелинейной связью, эквивалентной этой линейной связи, [2].

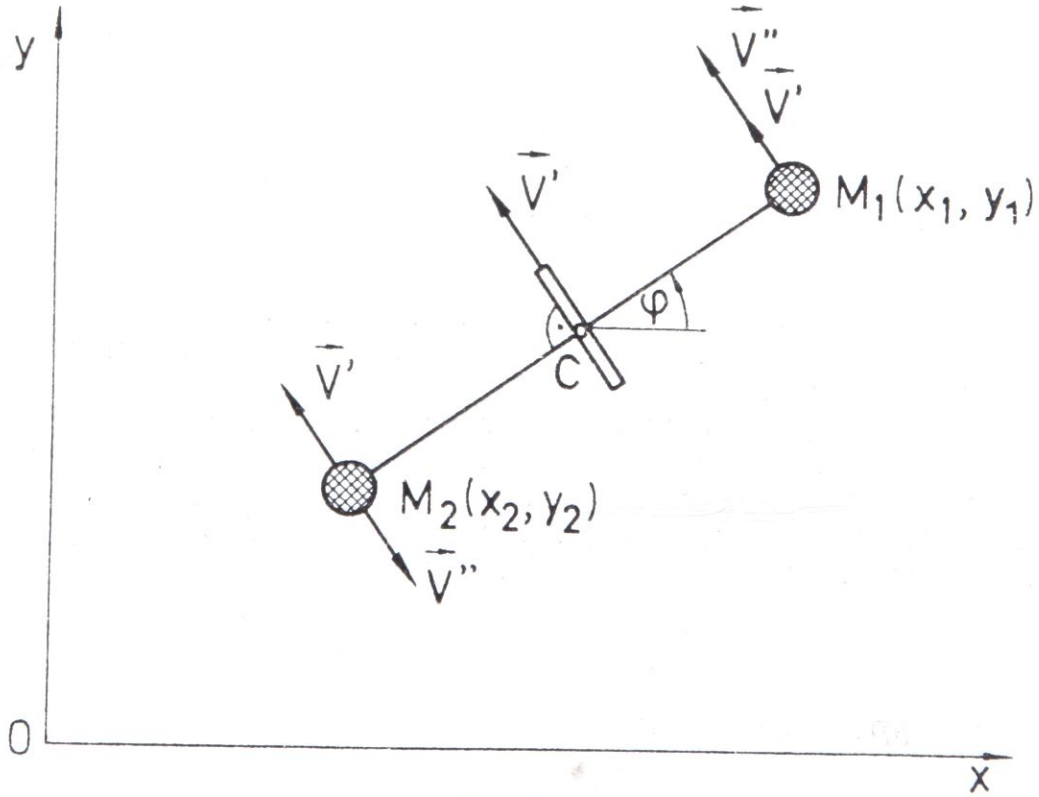

Рис. 3.

Пример 1. Две материальние точки массы m, соединены в плоскости лёгким тростом константной длини l и могут двигаться только так, чтобы скорость центра троста была всегда перпендикулярной к тросту.

Материяльная реализация этого примера осуществляется так, что на середине троста нужно пставить лезвие, перпендикулярное к направлению троста, как показано на рисунке 3.

Для обобщенных координат x_1, x_2, y_1 и y_2 уравнения связи имеют вид:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2, \tag{10}$$

$$\frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} = \frac{\dot{y}_2}{\dot{x}_2}. \tag{11}$$

Уравнение (11) виражает условие параллельности абсолютных скоростей точки M_1 и M_2, что представляет собой нелинейную неголономную связь. Между тем, эту связь можно выразить следующим способом:

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2} = -\operatorname{tg}\varphi = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

или

$$\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\dot{y}_1 - \dot{y}_2} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \tag{12}$$

К трансформации нелинейной связи (11) в линейную связь (12) приходится е этом случае потому что $\dot{y}_1/\dot{x}_1 = \dot{y}_2/\dot{x}_2 = \operatorname{tg}\varphi$, т. е. компоненты скорости $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ создают угол φ, который можно виразить с помощью координат x_1, x_2, y_1 и y_2. Использование вида связи (11) или вида связи (12) вполне равноправно, потому что и первый и второй вид связи вполне отображает кинематоческие свойства связи.

Пример 2. Диск O_1, пренебрежаемой массы, может вращаться вокруг неподвижной оси. Вдоль вожатых, твёрдо связанный с осью диска (разрез „A—A") могут поступательно двигаться два троста, пренебрежаемой массы, на концах которых прикреплены материальние точки массы m — рисунок 4.

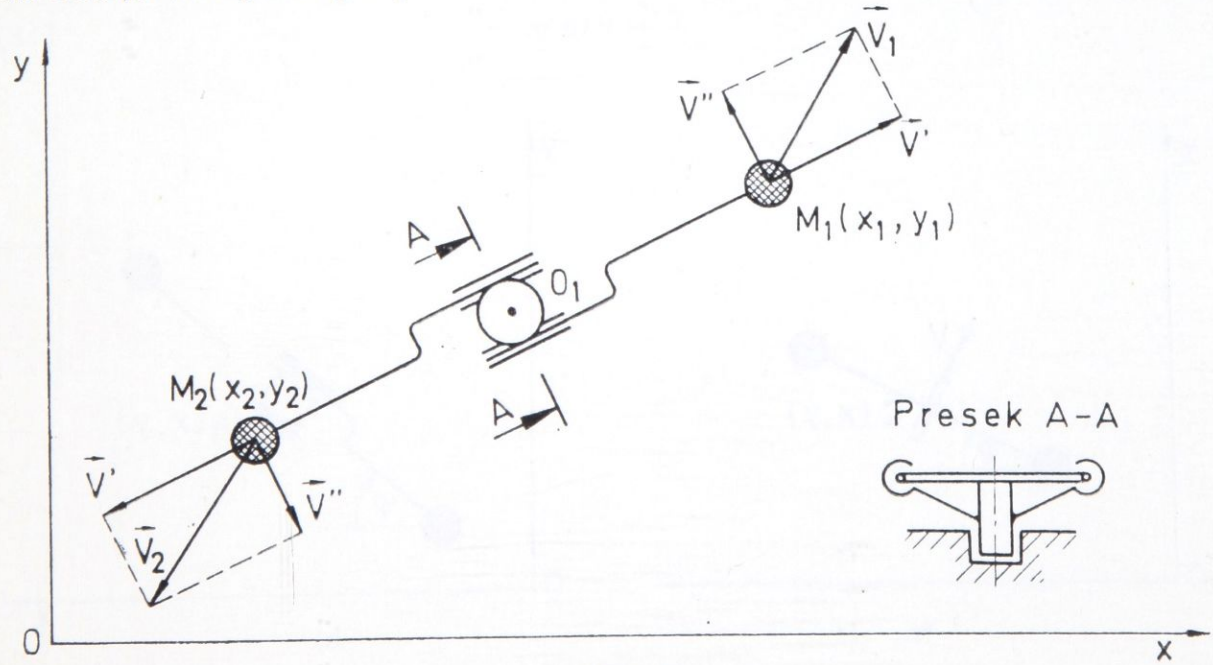

Рис. 4.

Для выбраных обобщенных координат (x_1, y_1, x_2, y_2) уравнениями связи являются:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = f^2(t), \tag{13}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = C^2, \tag{14}$$

$$\dot{y}_1/\dot{x}_1 = \dot{y}_2/\dot{x}_2. \tag{15}$$

Связь (15) в развитом виде гласит:

$$\dot{y}_1\,\dot{x}_2 - \dot{y}_2\,\dot{x}_1 = 0,$$

и представляет собой пример нелинейной неголономной связи. Между тем, и здесь, вместе связи (14) и (15) можно пользоваться двумя голономными связами:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = C_1, \tag{16}$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = C_2, \tag{17}$$

которые представлашт собой условие константности координат точки O_1. очевидно, что использование связи (14) и (15), или связи (16) и (17), приводит к тем же резултатом.

Интересно, что при выборе вторых обобщенных координат не получаем, ни в одном варианте тех же примеров, нелинейную связь. За первый пример если виберем для обобщенных координат x, y и φ (рис. 5.а), существует только одна неголономная линейная связь вида

$$\dot{x} = \dot{y}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{18}$$

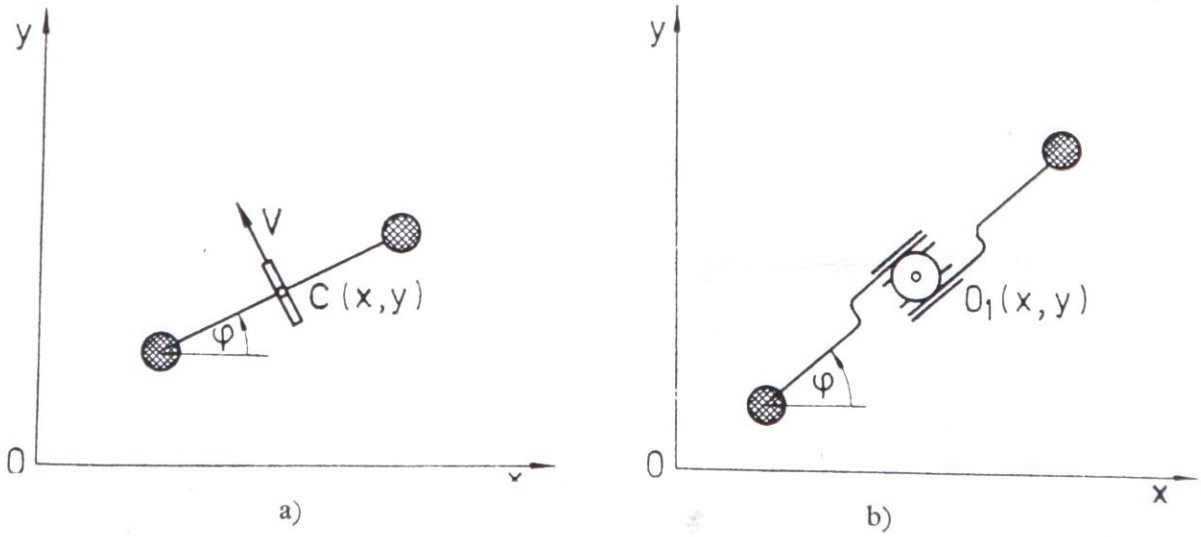

Рис. 5.

За второй пример, если выберем для обобщенных координат x, y и φ существуют две связи уравнения вида

$$x = C_1, \tag{19}$$

$$y = C_2. \tag{20}$$

Из этого следует заключение, что вопрос экзистенции нелинейной неголономной связи (как эквивалент линейной неголономной связи) часто является вопросом выбора обобщенных координат, что из приложених примеров можно лекго утвердить.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Apell, P., *Sur les liaisons non lineaires par rapport aux vitesses*, Rendic. del circolo mat. di Palermo, v. 33, (1912).

[2] Zeković, D., *Neki problemi dinamike neholonomnih sistema sa primenom na tehničkđ objekte, doktorska disertacija*, Mašinski fakultet, Beograd, (1984).

[3] Неймарк, Ю., Фуфаев, Н., *Динамика неголономных систем*, „Наука", Москва, (1967).

[4] Маслов, Ю., *О неголономных системах с нелинейными связами*, Таш. Г. У., вып. 242, (1964).

ON A PROBLEM OF THE MATERIALISTIC REALIZATION OF A NON-LINEAR NON-HOLONOMIC CONSTRAINT

By analyzing the existing examples of non-linear non-holonomic constraints it is shown that these were brought about by algebraic transformations of linear non-holonomic constraints. Two examples are also given in which a non-linear non-holonomic constraint can be used in the analysis equally instead of a corresponding linear non-holonomic constraint.

O PROBLEMU MATERIJALNE REALIZACIJE NELINEARNE NEHOLONOMNE VEZE

Analizirajući postojeće primere nelinearnih neholonomnih veza pokazano je da su one nastale algebarskim transformacijama od linearnih neholonomnih veza. Daju se i dva primera gde se nelinearna neholonomna veza može ravnopravno koristiti, u analizi, umesto odgovarajuće linearne neholonomne veze.

Драгомир Зековић,

Машински факултет Универзитета у Београду
27. марта, 80, 11000 Београд