TEORIJSKA I PRIMENJENA **MEHANIKA** 12 pp. 13—16, 1986, UDK 531.36

ЗАМЕТКА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗАМИ

Р. М. Булатович

(Поступила 24. 9. 1985)

Рассмотрим голономную механическую систему с n степенями свободы, положение которой определяется обобщенными координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$, с функцией Лагрэнжа

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(x)\, \dot{x}_i\, \dot{x}_j, \quad \Pi = \Pi(x). \tag{1}$$

Допустим, что на систему наложены еще некоторые односторонние связи. Пусть обобщенные координаты выбраны так, что односторонние связи определяются так

$$x_k \geqslant 0 \quad k = 1, \ldots, m \leqslant n. \tag{2}$$

Такой выбор обобщенных координат всегда возможен. Для движений рассматриваемой системы, вообще говоря, характерно наличие ударных взаимодействий. Будем предполагать, что коэффициенты восстановления при ударах о связи равны единице. При сделанных предположениях система допускает интеграл энергии $T + \Pi = h$.

Если в точке $x^0 = (0, \ldots, 0, \overset{0}{x}_{m+1}, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ выполены условия

$$C_\rho = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_\rho}\right)_{x^0} \geqslant 0 \quad \rho = 1, \ldots, m$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_j}\right)_{x^0} = 0 \quad j = m + 1, \ldots, n$$

то x^0 — положение равновесия системы [1]. Монжо принять, что $\Pi(x^0) = 0$.

1. **Устойчивость**

Пусть $C_\rho > 0$ $(\rho = 1, \ldots, l)$ и $C_\rho = 0$ $(\rho = l + 1, \ldots, m)$. Достаточные условия устойчивости равновесия дает

Теорема 1. Если в точке x^0 функция $\Pi(x^*)$, где $x^* = (0, \ldots, 0, |x_{l+1}|, \ldots, |x_m|, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, имеет строгий минимум, то это положеине равновесия устойчиво.

Теорема доказана в работе [2], она является обобщением на системы с односторонними связами теоремы Лагранжа-Дирихле. В случае $l = n$ теорема неприменима. Рассмотрим теперь этот случай.

Поскольку в достаточно малой окрестности положения равновесия

$$\Pi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right)_{0x} x_i, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 1; \ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right)_{0x} > 0,$$

то в области $x \geqslant 0$ функция $\Pi(x)$ имеет в точке $x = 0$ строгий минимум. Далее рассмотрением интеграла энергии, аналогично доказательству теоремы Лагранжа-Дирихле, можно доказать

Предложение 1. Если $l = n$, то положение равновесия устойчиво.

В качестве примера рассмотрим тяжелую материальную точку на которую наложены связи $f_1 = y + z \geqslant 0$, $f_2 = y^2 + z^2 - R^2 \leqslant 0$, $f_2 = x = 0$. В окрестности точки A за координаты примем x_1, x_2 (рис. 1). Потенциальная энергия имеет вид $\Pi = -mg(R - x_2)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + x_1)$. В точке A получаем $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\right)_0 = mg\,R\,\frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$

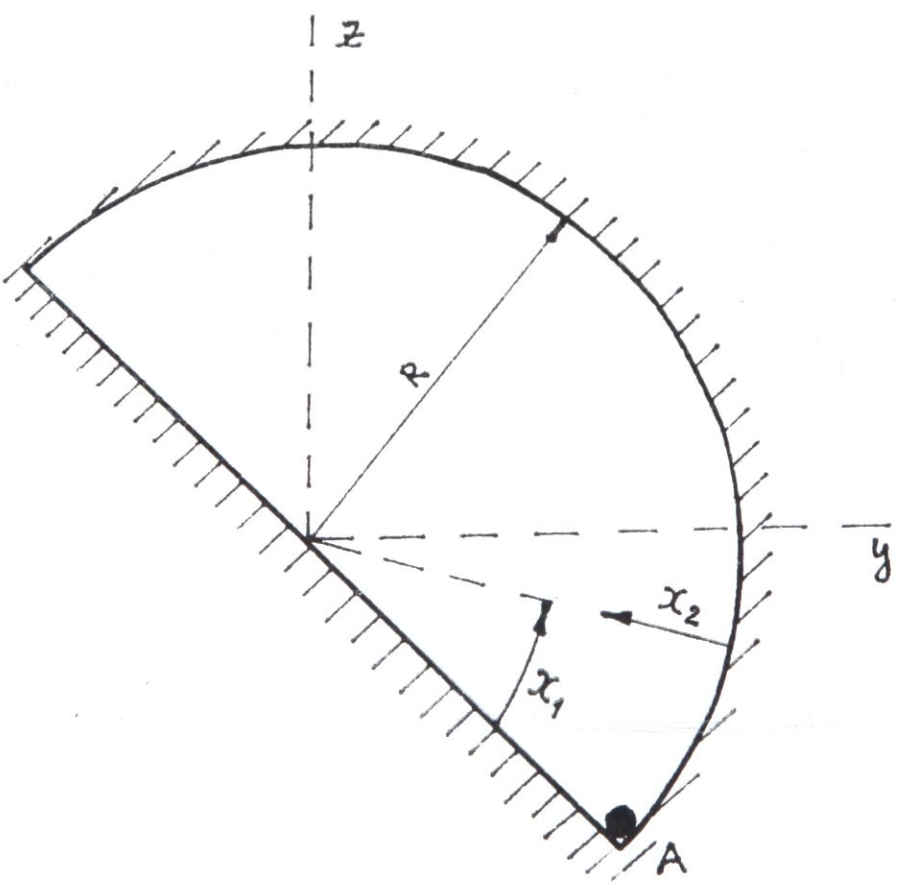

рис. 1

Следовательно, выполнено условие данного предложения, утверждающего (очевидную здесь непосредственно устойчивост равновесия.

2. **Неустойчивость**

Пусть $m < n$. Предпологая связи (2) двусторонними система превращается в вспомогательную систему с $n - m$ степенями свободы. Возможны следующие два случая

1. В положении равновесия $l = m$. Показивается, что тогда в фазовом пространстве существует такая окрестность состояния равновесия, в которой траектории вспомогательной системы являются и траекториями рассмотриваемой системы, для которых $x_\rho = 0$ $(\rho = 1, \ldots, l)$ [3], [4] (см. также [2]). Отсюда следует, что неустойчивость равновесия вспомогательной системы влечет неустойчивость равновесия системы (1), (2).

2. В положении равновесия $l < m$. Допустим, что $x^0 = 0$. Предположим, что в окрестности начала функция $\Pi(x^*)$, где $x^* = (0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n)$ может принимать отрицательные значения. Пусть

$$D = \{x^* : \Pi(x^*) < 0, \ |x^*| < \varepsilon\}.$$

Теорема 2. Если существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$1)\ D \subset \{x^* : x_\rho > 0\, (\rho = l + 1, \ldots, m)\},\ x^* = 0 \in \partial D;$$

$$2)\ \sum_{j=l+1}^{n} \frac{\partial\, \Pi(x^*)}{\partial\, x_j} x_j < 0 \quad \text{для всех } x^* \in D;$$

тогда положение равновесия неустойчиво.

Доказательство следует из теоремы Четаева [5]

Заметим, что в отличие от случая 1 здесь может имеет место неустойчивость и кагда потенциальная энергия вспомогательной системњ имеет минимум. Вот простой пример

$$\Pi = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Предложение 2. Если $a_{ij}(x)$ и $\Pi(x)$ аналитичны в окрестности положения равновесия и существует область D из теоремы 2, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство основывается на результатах работ [6], [7] и замечанию, что траектории асимптотических движений лежат в области $\Pi(x^*) < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Vujičić V., *Statika*, Beograd, 1969.

[2] Иванов А. П., *Об устойчивости в системах с неудерживающими связями*, П М М, 1984, т. 48, вып. 5.

[3] Bulatović R., *Stabilnost ravnotežnog stanja djelimično slobodnih sistema* (magistarski rad), Beograd, 1981.

[4] Bulatović R., *Kriterijum nestabilnosti djelimično slobodnih sistema*, XV jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, Zbornik radova, Kupari, 1981.

[5] Четаев Н. Г., *О неустойчивости равновесия в некоторых случаях когда функция сил не естъ максимум*, П М М, 1952, т. 16, вып. 1.

[6] Козлов В. В., *Асимптотические решения уравнений классической механики*, П М М, 1982, т. 46, вып. 4.

[7] Козлов В. В., Паламодов В. П., *Об асимптотических решениях уравнений классической механики*, Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 2.

EINE BEMERKUNG UBER DIE GLEICHGEWICHTSSTABILITAT VON MECHANISCHEN SYSTEMEN MIT NICHTBERGRENZENDEN VERBINGUNGEN

Es ist eine Klasse immer stabiler Gleichgewichtslagen bemerkbar. Dabei werden Instabilitatskriterien nachgeuresen.

NAPOMENA O STABILNOSTI RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA MEHANIČKIH SISTEMA SA NEZADRŽAVAJUĆIM VEZAMA

Razmatra se stabilnost ravnotežnih položaja mehaničkih sistema u potencijalnom polju sila, na čija kretanja su naložena dopunska ograničenja u obliku nezadržavajućih veza. Kretanja u okolini ravnotežnog položaja, u opštem slučaju, su okarakterisana pojavom udara. Pretpostavlja se da su koeficijenti uspostavljanja jednaki jedinici.

Pokazuje se da ako je u ravnotežnom položaju broj „napregnutih" nezadržavajućih veza jednak broju stepeni slobode sistema, onda je taj položaj stabilan. Ovaj zaključak dopunjava teoremu 1 iz rada [2].

Dalje se daju kriterijumi nestabilnosti ravnotežnog položaja posmatranih sistema.

Ранислав Булатовић,
Машински факултет
Цетињски пут бб,
81000 Титоград