TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 12 pp. 115—120, 1986, UDK 531.50

ПРИВЛЕЧЕНИЕ ФОРМУЛЫ СТОКСА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ САМОПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТРАЕКТОРИЙ

Я. В. Татаринов

(Поступила 5. 04. 1985.)

Рассматривается натуральные системы с двумя степенями свободы, риманова метрика которых допускает равностепенную деформацию или, что то же самое, которое при движении по инерции обладают нетриввиальным квадратичным по скоростям интегралом. При заданной потенциальной энергии существует взаимосвязь между углом самопересечения траектории и охваченной ею площадью. При некоторых условиях, например, в некоторой конечной окрестности устойчивого положения равновесия с несовпадающими собственными частотами, невозможны самопересекающиеся траектории, закрученные все время в одну сторону.

1. Основной прием. Для начала рассмотрим движение точки единичной массы в плоскости; потенциал пусть будет $V(x_1, x_2)$. Интеграл энергии есть

$$K = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + V(x_1, x_2) = k,$$

область возможности движения с заданной полной энергией определяется неравенством $V \leqslant k$. В этой области рассмотрим движение $x(t)$, которое в мгновение t_1 впервые после t_0 вернулось в начальную точку x_0, охватив площадь S. Скорость его в моменты t_0, t_1 пусть составляла с осью x_1 углы φ_0, φ_1 соответственно.

Если мы возьмем функцию состояния $\Phi = \dot{x}_1\,\dot{x}_2$ и продифференцируем ее в силу уравнений движения, то будем иметь

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_1 - \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_2.$$

Наоборот, интегрируя последнее от t_0 до t_1, констатируем, что

$$\Phi_1 - \Phi_0 = -\int\limits_{\{x(t),\, t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}} \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_2,$$

где интеграл в правой части уже не зависит от параметризации рассматриваемого куска траектории. По формуле Стокса

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int\limits_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Но

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 = \frac{v^2}{2} \sin 2\varphi, \quad v = \sqrt[3]{2(k - V(x_1, x_2)},$$

так что

$$\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0 = \frac{1}{k - V(x_1^0, x_2^0)} \int\limits_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

Теперь можно делать оценки. Например,

$$|\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0| \leqslant \frac{S}{k - V(x_1^0, x_2^0)} \cdot \max_{V \leqslant k} \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right|.$$

Или так:

$$|\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0| \leqslant \frac{1}{k - V(x_1^0, x_2^0)} \cdot \int\limits_{V \leqslant h} \left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right| dx_1\, dx_2.$$

Совершенно аналогично можно получить неравенства на $\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_0$, взяв $\Phi = (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2)/2$; в интегралах будет участвовать только $\partial^2 V/\partial x_1 \partial x_2$. Если переменные x_1, x_2 разделяются, то есть $V = V_1(x_1) + V_2(x_2)$, то $\cos 2\varphi_1 = \cos 2\varphi_0$.

Видим, что полученные оценки тем лучше, чем меньше по модулю подынтегральная функцля и чем дальше начальная точка от границы области возможности движения (чем больше v_0). Эти неравенства выделяют допустимые секторы направлений скорости после первого возвращения в начальную точку (если таковое возможно).

2. Возвращающиеся траектории. Если область возможности движения $\{V(x_1, x_2) \leqslant k\}$ компактна и не имеет положений равновесия (то-есть критических точек V) на границе $\{V = k\}$, то в фазовом пространстве $\{\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2\}$ фазовые траектории на соответствующем уровне энергии $K = k$ подпадают под теорему Пункаре о возвращении, а это значит, что большинство траекторий на конфигурационном пространстве — в данном случае на плоскости — будут самопересекаться. Таким образом, представление о характере из петлеобразного движения составляет существенную часть общей качественной картины движения.

Если $z = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2)$ и $\Phi(z)$ — некоторая функция состояния, то при движении композиция $\Phi(z(t))$ в типичном случае будет бесконечное число раз сколь угодно близко возвращаться к начальному значению. Возьмем, например,

$$\Phi = \lambda \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}_2^2,$$

тогда

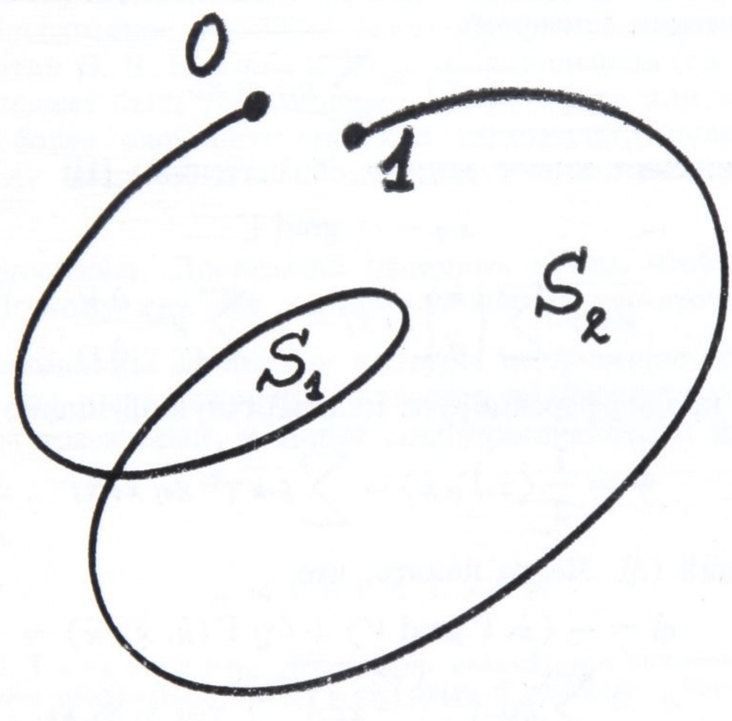
$$\frac{d\Phi}{dt} = -\lambda\left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_2\right) - \mu \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \Psi(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2)$$

Пусть $t_1 > t_0$ — какой-то момент времени, когда движение вернулось весьма близко к начальному состоянию (этот момент не обязательно близок к моменту нервого самопересечения). Тогда

$$0 \approx \Phi_1 - \Phi_0 = -\int_{t_0}^{t_1} \left[\lambda \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_2 \right) + \mu \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right] dt =$$

$$= -\int_{\{x(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}} \lambda \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_1 + \left(\lambda \frac{\partial V}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) dx_1.$$

Предположим, что вектор скорости поворачивается все время в одну сторону. Соединим точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$ отрезком, применим основной прием



и заметим, что увеличением t_1 вклад отрезка, соединяющего $x(t_0)$ и $x(t_1)$, можно сделать сколь угодно малым. Следовательно,

$$\Phi_1 - \Phi_0 \approx \sum m_n \int_{S_n} \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right) - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 \wedge dx_2.$$

где $m_n > 0$ — число раз, сколько движение охватывает данную площадь S_n. Предположим теперь, что

$$W(x_1, x_2) = \lambda \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right) - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} > 0 \tag{1}$$

всюду в области возможности движения. Тогда $\Phi_1 - \Phi_0$ не может быть близким к нулю, так как вычисленный двойной интеграл

$$\geqslant \min W \cdot S(k)$$

где $S(k)$ — площадь области $\{V \leqslant k\}$. Следовательно, при условии (1) траектории постоянно закручиваться в одну сторону не могут. В частности, достаточно потребовать, чтобы было

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} > 0;$$

эти условия однотипны, так как одно приводитя к другому поворотом осей на $\pi/4$. Очевидно, в общем случае какое-то из этих условий всегда выполняется в окрестности невырожденной критической точки потенциала V. Поскольку мы требовали также, чтобы области были компактны, получаем следующее утверждение: в некоторой конечной окрестности устойчивого положения равновесия с различными собственными частотами невозможны возвращающиеся траектории, закрученные все время в одну сторону.

3. Обобщение. Начнем с локального аспекта. На римановом многообразии с метрическим тензором

$$\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = \sum g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

Уравнения движения имеют вид (в обозначениях [1])

$$\ddot{x}_\nabla = -\operatorname{grad} V$$

или

$$\ddot{x}_k + \sum \left\{ {k \atop ij} \right\} \dot{x}_i \dot{x}_j = -\sum g^{kj} \frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (2)$$

Как и в п. 1., продифференцируем квадратичную функцию состояния

$$\Phi = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \Gamma_x \dot{x} \rangle = \sum g_{ik} \gamma^{kl} g_{ej} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

в силу уравнений (2). Легко понять, что

$$\dot{\Phi} = -\langle \dot{x}, \Gamma \operatorname{grad} V \rangle + \langle \nabla \Gamma(\dot{x}, \dot{x}), \dot{x} \rangle =$$
$$= -\sum g_{ik} \gamma^{kl} \frac{\partial V}{\partial x_l} \dot{x}_i + \sum \varphi_{ijk} \dot{x}_i \dot{x}_j \dot{x}_k.$$

Если мы хотим, чтобы эта производная была линейна по скоростям, то кубическая форма голжна обратиться в нуль, а тогда, очевидно, Φ будет квадратичным интегралом движения по инерции ($V \equiv 0$). Инвариантная точка зрения на такие системы изложена в [1]. А именно, при деформации метрического тензора

$$\langle \dot{x}, \dot{x}_\varepsilon \rangle = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \varepsilon \langle \dot{x}, \Gamma \dot{x} \rangle$$

изменение длины вектора скорости

$$\frac{d}{d\varepsilon} \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle_\varepsilon}$$

должно быть постоянным вдоль каждой отдельно взятой геодезической (так называемая равностепенная деформация). В случае двух степеней свободы из наличия независимого квадратичного интеграла вытекает, что в некоторых координатах метрика имеет лиувиллев вид [2], что позволяет обобщить рассмортрения п. 1. Но интереснее обратиться к п. 2.

Рассмотрим 1 — форму

$$\alpha(\dot{x}) = -\langle \dot{x}, \Gamma \operatorname{grad} V. \rangle$$

Отсутствие закручивающихся траекторий обеспечивается тем, что $d\alpha$ должна быть формой объема на многообразии положений.

Обратим внимание, что если уравнения (2) обладают интегралом $\Phi + W(x_1, x_2)$, то $\alpha = dW$ и $d\alpha \equiv 0$. Поэтому на неплоских многобразиях (с ненулевой кривизной), когда запас квадратичных интегралов движения по инерции невелик (один или два независмых), обобщение проходит только для систем, не интегрируемых разделением переменных.

Чтобы это обобщение было бы справедливо ,,в целом'', необходимо оговорить топологическое строение многообразия положений $\mathfrak{M}$. Из недавних результатов В. В. Козлова и В. Н. Колокольцова (см. обзор [3]) вытекает, что $\mathfrak{M}$ может быть гомеоморфно только сфере или тору, так как на многообразиях более сложного строения интегралы, полиномиальные по скоростям (кроме энергии) и вообще аналитические интегралы существовать не могут.

Сфера односвязна. Достаточно выколоть точку, чтобы превратить ее в плоскость. Поэтому для нее локальный анализ достаточен.

На торе возможны замкнутые контуры не долящие его на две части. Поэтому здесь под вышеизложенную теорию подпадают только такие самопересекающиеся траектории, которые самопересекаются и на накрывающей тор плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. В. Татаринов, *Деформации многообразия положений и квадратичные интегралы движения натуральных систем в классической динамике.* ,,Успехи математических наук'', 36, вып. 4, 1981.

[2] Э. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика.* М.-Л., ОНТИ, 1937.

[3] В. В. Козлов, *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике.* ,,Успехи математических наук'', 1983, 38, вып. 1, 3—68.

STOKES FORMULA FOR INVESTIGATION OF SELFINTERSECTING TRAJECTORIES

It is shown that, under scertain condition, in natural systems with two degrees of freedom, the single side directed selfintersecting trajectories do not exist. This holds in the neighbourhood of the stable equilibrium position of general type. It is shown how the intersection angle of the trajectory can be estimated.

PRILAGOĐAVANJE STOKSOVE FORMULE ZA ISPITIVANJE SAMOPRESEČNIH TRAJEKTORIJA

Pokazano je da su u prirodnim sistemima sa dva stepena slobode kretanja, pri određenim uslovima, nemoguće samopresečne trajektorije, okrenute svo vreme u istu stranu. Delimično to stoji u okolini stabilnog ravnotežnog položaja. Ukazana je mogućnost ocenjivanja uglova, koje samopresečne trajektorije obrazuju same sa sobom.