

СТАЦИОНАРНЫЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫЙ R-ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ КОЛЕБАНИЙ И ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ГАРМОНИКОВ

K. Хедрих П. Козич, Р. Павлович

(Поступило 7. марта 1985.)

В работе построены первые асимптотические приближения решений системы дифференциальных уравнений первого приближения для амплитуд и фаз R-частотного режима вынужденных стационарных и нестационарных колебаний с малым параметром, которые позволяют построение амплитудно-частотных и фазно-частотных кривых для стационарных и нестационарных режимов колебаний и введен соответствующий четыричастотный анализ. Сделаны выводы о взаимном влиянию гармоников используя известные результаты для одночастотных нелинейных и линейных колебаний вычисления полученные в данной работе для четыричастотных колебаний.

Пользуясь вычислительными результатами построена семейства амплитудно-частотных кривых характеризующих изменения амплитуды при стационарных и нестационарных режимах резонанса.

1. Для колебательной системы со многими степенями свободы выбрана система коленчатого вала изображена на рисунке и. 1. Будем рассматривать крутильные колебания коленчатого вала с дисками при стационарном и нестационарном режиме четыри-частотных колебаний. Обозначим моменты инерции масс дисков через J_1, J_2, J_3, J_4 и J_5 . Предположим что участки вала между дисками имеют нелинейную крутящую жесткость. Упругий момент нелинейно зависит от угла поворота вала.

На диски действуют периодические крутящие моменты $E_1 \cos \theta_1 = \mathfrak{M}_1$, $E_2 \cos \theta_2 = \mathfrak{M}_2$, $E_3 \cos \theta_3 = \mathfrak{M}_3$, и $E_4 \cos \theta_4 = \mathfrak{M}_4$ где E_i амплитуды вынужденных моментов $\frac{d\theta_1}{dt} = \nu_1 \in \text{Rez } \omega_1$, $\frac{d\theta_2}{dt} = \nu_2 \in \text{Rez } \omega_2$, $\frac{d\theta_3}{dt} = \nu_3 \in \text{Rez } \omega_3$

и $\frac{d\theta_4}{dt} = \nu_4 \in \text{Rez } \omega_4$ частоты моментов. Углы отклонения от равномерного вращения вала обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и φ_5 .

Упругие моменты зависящие от разности углов поворота прилегающих валу дисков будут:

$$\begin{aligned}
 F_1(\varphi_2 - \varphi_1) &= c_1' (\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon f_1 (\varphi_2 - \varphi_1) = \mathfrak{M}_{e1} \\
 F_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= c_2' (\varphi_3 - \varphi_2) + \varepsilon f_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = \mathfrak{M}_{e2} \\
 F_3(\varphi_4 - \varphi_3) &= c_3' (\varphi_4 - \varphi_3) + \varepsilon f_3 (\varphi_4 - \varphi_3) = \mathfrak{M}_{e3} \\
 F_4(\varphi_5 - \varphi_4) &= c_4' (\varphi_5 - \varphi_4) + \varepsilon f_4 (\varphi_5 - \varphi_4) = \mathfrak{M}_{e4}
 \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $\varepsilon f_i(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$ определяются конкретно заданной характеристикой нелинейной части вала.

Предположим также, что на всех участках вала учитывается внутреннее трение, которое будем предполагать пропорциональным релативной скорости вращения с коэффициентами пропорциональности момента сил внутреннего сопротивления $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 .

Уравнения крутильных колебаний рассматриваемой системы можно привести к следующей системе уравнений (пятую степень свободы — вращение — исключаем);

$$\begin{aligned}
 J_1 J_2 \ddot{x} + (J_1 + J_2) F_1(x) - J_1 F_2(y) &= \\
 = J_1 E_1 \cos \theta_1 - J_2 E_2 \cos \theta_2 - \alpha_1 (J_1 + J_2) \dot{x} + \alpha_2 J_1 \dot{y} & \\
 J_2 J_3 \ddot{y} - J_3 F_1(x) + (J_2 + J_3) F_2(y) &= \\
 = J_2 E_3 \cos \theta_3 - J_3 E_2 \cos \theta_2 + \alpha_1 J_3 \dot{x} - \alpha_2 (J_2 + J_3) \dot{y} + \alpha_3 J_2 \dot{z} & \\
 J_3 J_4 \ddot{z} - J_4 F_2(y) + (J_3 + J_4) F_3(z) - J_3 F_4(v) &= \\
 = J_3 E_4 \cos \theta_4 - J_4 E_3 \cos \theta_3 + \alpha_2 J_4 \dot{y} - \alpha_3 (J_3 + J_4) \dot{z} + \alpha_4 J_3 \dot{v} & \\
 J_4 J_5 \ddot{v} - J_5 F_3(z) + (J_4 + J_5) F_4(v) &= - \\
 = - J_5 E_4 \cos \theta_4 + \alpha_3 J_5 \dot{z} - \alpha_4 (J_4 + J_5) \dot{v} &
 \end{aligned} \tag{2}$$

где введены обозначения;

$$x = \varphi_1 - \varphi_2; \quad y = \varphi_3 - \varphi_2; \quad z = \varphi_4 - \varphi_3; \quad v = \varphi_5 - \varphi_4 \tag{2'}$$

Нелинейные упругие моменты участков вала предположим в форме:

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= c_1' x + c_1'' x^3 \\
 F_2(y) &= c_2' y + c_2'' y^3 \\
 F_3(z) &= c_3' z + c_3'' z^3 \\
 F_4(v) &= c_4' v + c_4'' v^3
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & J_1 J_2 \ddot{x} + (J_1 + J_2) c_1' x - J_1 c_2' y = \\
 & = - (J_1 + J_2) c_1'' x^3 + J_1 c_2'' y^3 - d_1 (J_1 + J_2) + d_2 J_1 \dot{y} + \\
 & + J_1 E_2 \cos \theta_2 - J_2 E_1 \cos \theta_1 \\
 & J_2 J_3 \ddot{y} - J_3 c_3' x + (J_2 + J_3) c_2' y - J_2 c_3' z = \\
 & = c_1'' J_3 x^3 - (J_2 + J_3) c_2'' y^3 + J_2 c_3'' z^3 + \alpha_1 J_3 \dot{x} - \\
 & - \alpha_2 (J_2 + J_3) \dot{y} + \alpha_3 J_2 \dot{z} + J_2 E_3 \cos \theta_3 - J_3 E_2 \cos \theta_2 \\
 & J_3 J_4 \ddot{z} - J_4 c_2' y + (J_3 + J_4) c_3' z - J_3 c_4' v = \\
 & = J_4 c_2'' y_3 - (J_3 + J_4) c_3'' z^3 + J_3 c_4'' v^3 + \alpha_2 J_4 \dot{y} - \alpha_3 (J_3 + J_4) \dot{z} + \\
 & + \alpha_4 J_3 \dot{v} + J_3 E_4 \cos \theta_4 - J_4 E_3 \cos \theta_3 \\
 & J_4 J_5 \ddot{v} - J_5 c_3' z + (J_4 + J_5) c_4' v = \\
 & = J_5 c_3'' z^3 - (J_4 + J_5) c_4'' v^3 + \alpha_3 J_5 \dot{z} - (J_4 + J_5) \alpha_4 \dot{v} - J_5 E_4 \cos \theta_4
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для построения приближенных решений этой системы (4) допустим, что нелинейность и коэффициент трения малы (т. е. колебания системы в свободном состоянии близки синусоидальным) а амплитуды внешних вынужденых моментов малы по сравнению с другими параметрами крутой системы.

Предположим что начальные условия соответствуют четыри-частотным колебаниям, потому что частоты вынужденых моментов в резонанском частотном интервале первых четыри собственных частот „невозмущенного“ колебания, которые считаем вычисленими. Первое асимптотическое приближение решений системы (4) близкое суперпозиции четыри нормальных форм колебаний „невозмущенной“ системе будет:

$$\begin{aligned}
 x &= a_1 K_{41}^{(1)} \cos(\theta_1 + \Psi_2) + a_2 K_{41}^{(2)} \cos(\theta_2 + \Psi_2) + \\
 &+ a_3 K_{41}^{(3)} \cos(\theta_3 + \Psi_3) + a_4 K_{41}^{(4)} \cos(\theta_4 + \Psi_4) \\
 y &= a_1 K_{42}^{(1)} \cos(\theta_1 + \Psi_1) + a_2 K_{42}^{(2)} \cos(\theta_2 + \Psi_2) + \\
 &+ a_3 K_{42}^{(3)} \cos(\theta_3 + \Psi_3) + a_4 K_{42}^{(4)} \cos(\theta_4 + \Psi_4) \\
 z &= a_1 K_{43}^{(1)} \cos(\theta_1 + \Psi_1) + a_2 K_{43}^{(2)} \cos(\theta_2 + \Psi_2) + \\
 &+ a_3 K_{43}^{(3)} \cos(\theta_3 + \Psi_3) + a_4 K_{43}^{(4)} \cos(\theta_4 + \Psi_4) \\
 v &= a_1 K_{44}^{(1)} \cos(\theta_1 + \Psi_1) + a_2 K_{44}^{(2)} \cos(\theta_2 + \Psi_2) + \\
 &+ a_3 K_{44}^{(3)} \cos(\theta_3 + \Psi_3) + a_4 K_{44}^{(4)} \cos(\theta_4 + \Psi_4)
 \end{aligned} \tag{5}$$

где амплитуды a_1, a_2, a_3, a_4 и фазы $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ неизвестные функции времени должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned}
 \frac{d a_1^*}{d t} &= -\frac{\delta_1}{2} a_1^* + \frac{E_1^*}{\omega_1 + \nu_1} \sin \Psi_1 \\
 \frac{d \Psi_1}{d t} &= \omega_1 - \nu_1 - [A_{11}(a_1^*)^2 + 2A_{12}(a_1^*)^2 + 2A_{13}(a_3^*)^2 + \\
 &\quad + 2A_{14}(a_4^*)^2] \frac{3}{8 \omega_1} + \frac{E_1^*}{a_1^*(\omega_1 + \nu_1)} \cos \Psi_1 \\
 \frac{d a_1^*}{d t} &= -\frac{\delta_2}{2} a_1^* - \frac{E_2^*}{\omega_2 + \nu_2} \sin \Psi_2 \\
 \frac{d \Psi_2}{d t} &= \omega_2 - \nu_2 - \frac{3}{8 \omega_2} [2A_{21}(a_1^*)^2 + A_{22}(a_1^*)^2 + \\
 &\quad + 2A_{23}(a_1^*)^2 + 2A_{24}(a_4^*)^2] - \frac{E_2^*}{a_2^*(\omega_2 + \nu_2)} \cos \Psi_2 \\
 \frac{d a_3^*}{d t} &= -\frac{\delta_3}{2} a_3^* - \frac{E_3^*}{\omega_3 + \nu_3} \sin \Psi_3 \\
 \frac{d \Psi_3}{d t} &= \omega_3 - \nu_3 - \frac{3}{8 \omega_3} [2A_{31}(a_1^*)^2 + 2A_3(a_2^*)^2 + \\
 &\quad + A_{33}(a_3^*)^2 + 2A_{34}(a_4^*)^2] - \frac{E_3^*}{a_3^*(\omega_3 + \nu_3)} \cos \Psi_3 \\
 \frac{d a_4^*}{d t} &= -\frac{\delta_4}{2} a_4^* - \frac{E_6^*}{\omega_4 + \nu_4} \sin \Psi_4 \\
 \frac{d \Psi_4}{d t} &= \omega_4 - \nu_4 - \frac{3}{8 \omega_4} [2A_{41}(a_1^*)^2 + 2A_{42}(a_2^*)^2 + \\
 &\quad + 2A_{43}(a_3^*)^2 + A_{44}(a_4^*)^2] - \frac{E_4^*}{a_4^*(\omega_4 + \nu_4)} \cos \Psi_4
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$E_1^* = \frac{E_1 J_2}{x_1 m_1}; \quad E_2^* = \frac{E_2 J_2}{x_2 m_2} \left(\frac{J_1}{J_2} - \frac{K_{42}^{(2)}}{K_{41}^{(2)}} \frac{J_3}{J_4} \right);$$

$$E_3^* = \frac{E_3 J_3}{x_3 m_3} \left[\frac{K_{42}^{(3)}}{K_{41}^{(3)}} \frac{J_2}{J_3} - \frac{K_{43}^{(3)}}{K_{41}^{(3)}} \frac{J_4}{J_3} \right];$$

$$E_4^* = \frac{E_4 J_4}{x_4 m_4} \left[\frac{K_{43}^{(4)}}{K_{41}^{(4)}} \frac{J_3}{J_4} - \frac{K_{44}^{(4)}}{K_{41}^{(4)}} \frac{J_5}{J_4} \right];$$

где ввели белралмерные амплитуды $a_i^* = a_i K_{41}^{(i)} / x_i$; $i = 1, 2, 3, 4$ и следующие обозначения:

$$\begin{aligned} m_i &= J_1 J_2 + \left(\frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 J_2 J_3 + \left(\frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 J_3 J_4 + \left(\frac{K_{44}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 J_4 J_5; \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ \delta_i &= \frac{1}{m_i} \left\{ \alpha_1 (J_1 + J_2) + \left(\frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 \alpha_2 (J_2 + J_3) + \left(\frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 \alpha_3 (J_3 + J_4) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{K_{44}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 \alpha_4 (J_4 + J_5) - \left(\frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right)^2 (\alpha_2 J_1 + \alpha_1 J_3) - \frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} (\alpha_3 J_2 + \alpha_2 J_4) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \frac{K_{44}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} (\alpha_4 J_3 + \alpha_3 J_5) \right\}; \quad i = 1, 2, 3, 4. \\ A_i &= \frac{c_1''}{m_i} \left[- (J_1 + J_2) + J_3 \frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right]; \\ B_i &= \frac{c_2''}{m_i} \left[J_1 - (J_2 + J_3) \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} + J_4 \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right] \frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}}; \\ C_i &= \frac{c_3''}{m_i} \left[J_2 \frac{K_{42}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} - (J_3 + J_4) \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} + J_5 \frac{K_{44}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right] \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}}; \\ D_i &= \frac{c_4''}{m_i} \left[J_3 \frac{K_{43}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} - (J_4 + J_5) \frac{K_{44}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}} \right] \frac{K_{44}^{(i)}}{K_{41}^{(i)}}; \\ A_{ij}^{\overrightarrow{i}^j} &= x_j^2 \left[A_i + B_i \left(\frac{K_{42}^{(j)}}{K_{41}^{(j)}} \right)^2 + C_i \left(\frac{K_{43}^{(j)}}{K_{41}^{(j)}} \right)^2 + D_i \left(\frac{K_{44}^{(j)}}{K_{41}^{(j)}} \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{7'}$$

где $K_{4k}^{(s)}$ — фундаментальные функции — координаты собственных амплитудных векторов, соответствующей „невозмущенной“ линейной крутильной системы (смотри [1]).

2. Числовой пример: Примем для параметров системы конкретные числовые значения; $J_1 = 400 \text{ [Nm} s^2\text{]}; J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = 100 \text{ [Nm} s^2\text{]}, E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 800 \text{ [Ncm]}; \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 10 \text{ [Ncm} s/\text{rad}]; x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,05 \text{ [rad]}; c_1' = 0,12 \cdot 10^7 \text{ [Ncm/rad]}, c_1'' = 0,18 \cdot 10^7 \text{ [Ncm/rad}^3\text{]}, c_2' = c_3' = c_4' = 0,1 \cdot 10^7 \text{ [Ncm/rad]}, c_2'' = c_3'' = c_4'' = 0,17 \cdot 10^7 \text{ [Ncm/rad}^3\text{]}.$

Собственные частоты соответствующей „невозмущенной“ системы:

$$\omega_1 = 47,77 \text{ [s}^{-1}\text{]}; \quad \omega_2 = 107,95 \text{ [s}^{-1}\text{]}; \quad \omega_3 = 158,35 \text{ [s}^{-1}\text{]}; \quad \omega_4 = 189,7 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

Система дифференциальных уравнений первого приближения для выбранного числового примера получает вид;

$$\begin{aligned}
 \frac{d a_1^*}{d t} &= -\frac{0,2034}{2} a_1^* + \frac{26,0621}{47,77 + v_1} \sin \Psi_1 \\
 \frac{d \Psi_1}{d t} &= 47,77 - v_1 + 0,0567 a_1^{*2} + 2 \cdot 0,2226 a_2^{*2} + \\
 &+ 2 \cdot 0,1218 a_3^* - 2 \cdot 0,2246 a_4^{*2} + \frac{26,0621}{a_1^*(47,77 + v_1)} \cos \Psi_1 \\
 \frac{d a_2^*}{d t} &= -\frac{1,0243}{2} a_2^* - \frac{108,026}{107,95 + v_2} \sin \Psi_1 \\
 \frac{d \Psi_2}{d t} &= 107,95 - v_2 + 2 \cdot 0,1321 a_1^{*2} + 0,1655 a_2^{*2} + \\
 &+ 2 \cdot 0,1596 a_3^{*2} + 2 \cdot 0,1654 a_4^{*2} - \frac{108,026}{a_2^*(107,95 + v_2)} \cos \Psi_2 \\
 \frac{d a_3^*}{d t} &= -\frac{2,2427}{2} a_3^* + \frac{6,7334}{158,35 + v_3} \sin \Psi_3 \\
 \frac{d \Psi_3}{d t} &= 158,35 - v_3 + 2 \cdot 0,198 a_1^{*2} + 2 \cdot 0,1548 a_2^{*2} + \\
 &+ 0,2165 a_3^{*2} + 2 \cdot 4147 a_4^{*2} - \frac{6,7334}{a_3^*(158,35 + v_3)} \cos \Psi_3 \\
 \frac{d a_4^*}{d t} &= -\frac{3,3912}{2} a_4^* - \frac{40,445}{189,6 + v_4} \sin \Psi_4
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{d\Psi_4}{dt} = 189,7 - \nu_4 + 2 \cdot 0,258 \nu_1^{*2} + 2 \cdot 0,2054 \nu_3^{*2} + \\ + 0,7283 \nu_4^{*2} + 2 \cdot 0,1388 \nu_2^{*2} - \frac{40,455}{\nu_4^* (189,7 + \nu_4)} \cos \Psi_4$$

Для изучения амплитудно-частотных кривых характеризующих стационарные амплитуды и фазы соответствующих установившемуся четыричастотному режиму в изучаемой крутильной колебательной системе, пользуемся уравнениями (8) для $\tau = \text{const}$.

Приравнивая правые части дифференциальных уравнений первого приближения (8) нулю и исключая из этих уравнений фазы Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 и Ψ_4 , получаем для определения стационарных значений амплитуд a_1^* , a_2^* , a_3^* и a_4^* , систему нелинейных уравнений;

$$f_i(a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9)$$

Мгновенные частоты ν_1 , ν_2 , ν_3 и ν_4 вынужденных моментов выбираем через частотные резонансные интервалы:

$$\nu_1 \in (47,3 \div 48,6 [s^{-1}]); \quad \nu_2 \in (106; 110,5 [s^{-1}]);$$

$$\nu_3 \in (140; 160 [s^{-1}]); \quad \nu_4 \in (170; 200 [s^{-1}]).$$

Решения системы нелинейных уравнений (9) построены с помощью известного числового метода Runge-Kutta-а на вычислительной машине Honeywell 6.

На рисунках 1 *a* и 1 *b* показаны семейства амплитудно-частотных кривых характеризующие зависимость стационарных амплитуд первой, второй, третьей и четвертой гармоники соответствующих установившемуся четыричастотному режиму в изучаемой крутильной колебательной системе, для непрерывного изменения дискретных числовых значений частот ν_1 и ν_2 внешних вынужденных моментов и выбранных дискретно числовых значений частот $\nu_3 = 158,3 [s^{-1}]$; $\nu_4 = 189,6 [s^{-1}]$ которые выбраны непосредственно близкие третей и четвертой собственным частотам „невозмущенной“ системы.

На рисунке 1. *a* видно что для дискретного изменения значения частоты $\nu_4 = 106; 107,8; 108,5; 109 [s^{-1}]$ и постоянных значений $\nu_3 = 158,3 [s^{-1}]$ и $\nu_4 = 189,6 [s^{-1}]$, амплитудно-частотные кривые $a_1^*(\nu_1, \nu_2)$ первой гармоники для стационарных амплитуд для непрерывного изменения дискретных числовых значений частоты ν_1 в интервале $47,3 \div 48,6 [s^{-1}]$ изменяются по „форме“, но их максимальное значение амплитуды остается постоянным.

На рисунке 2 *a* приведено семейство амплитудно-частотных кривых $a_2^*(\nu_1, \nu_2)$ второй гармоники для стационарных амплитуд для непрерывного изменения дискретных значений $\nu_1 \in (47,3 \div 48,6 [s^{-1}])$ и дискретное изме-

нение частоты второй гармоники $\nu_2 = 106; 107,8; 108,5; 109; 110,5 [s^{-1}]$ и содержит кривые которые отличаются по форме. В интервале $\nu_2 \in (106; 107,8)$ влияние амплитуды первой гармоники вызывает уменьшение амплитуды второй гармоники, а в интервале $\nu_2 \in (108,2; 110 [s^{-1}])$ влияет на увеличение и уменьшение амплитуд a_2^* , „нерегулярной“ части кривых и для $\nu_2 > 110 [s^{-1}]$ влияние через увлечения амплитуды второй гармоники a_2^* .

На рисунках 3 а и 4 а видно семейство амплитудночастотных кривых $a_3^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ третьей и $a_4^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ четвертой гармоники и совместное влияние амплитуд первой и второй гармоники через „колебания формы“ характеристической части, для неперерывного изменения ν_1 и дискретного изменения $\nu_2 \in (106; 110,5 [s^{-1}])$ и постоянных $\nu_3 = 158,3 [s^{-1}]$ и $\nu_4 = 189,6 [s^{-1}]$.

На рисунке 1 б видно что для дискретного изменения значения частоты $\nu_1 = 47,7; 48; 48,4; 48,6 [s^{-1}]$ и постоянных значений $\nu_3 = 158,3 [s^{-1}]$ и $\nu_4 = 189,6 [s^{-1}]$ что кривые семейства амплитудно-частотных кривых первой гармоники для неперерывного изменения дискретных числовых значений частоты различаются по форме и максимальным и минимальным значениям.

В интервале $\nu_1 \in (47,7; 48,2 [s^{-1}])$ значения амплитуды a_1^* уменьшаются с увеличением значения амплитуды a_2^* и для $\nu_1 > 48,2 [s^{-1}]$ увеличивается с увеличением амплитуды a_2^* .

На рисунках 2 б, 3 б и 4 б показаны семейства амплитудно-частотных кривых для стационарных амплитуд a_2^* второй, a_3^* третьей и a_4^* четвертой гармоники для неперерывного изменения дискретных значений частоты ν_2 второй гармоники, дискретного изменения ν_1 и постоянных значений ν_3 и ν_4 . Взаимное влияние гармоник с изменением частот и амплитуд влияет на изменение формы кривых.

На остальных рисунках приведена семейства амплитудно-частотных кривых для нестационарных амплитуд при изменениях частот первой или второй гармоник и постоянных частот третьей и четвертой гармоник. Также на каждом рисунке приведена соответствующая амплитудно-частотная кривая стационарных амплитуд, что бы было видно для малых скоростях прохождения системы через резонанс нестационарные амплитуды близки стационарными.

Анализируя полученные кривые убеждаемся что при очень медленном прохождении через резонанс и в четырехчастотном режиме амплитудно-частотные кривые очень близки характеризующим стационарные амплитуды первой, второй, третьей и четвертой гармоники.

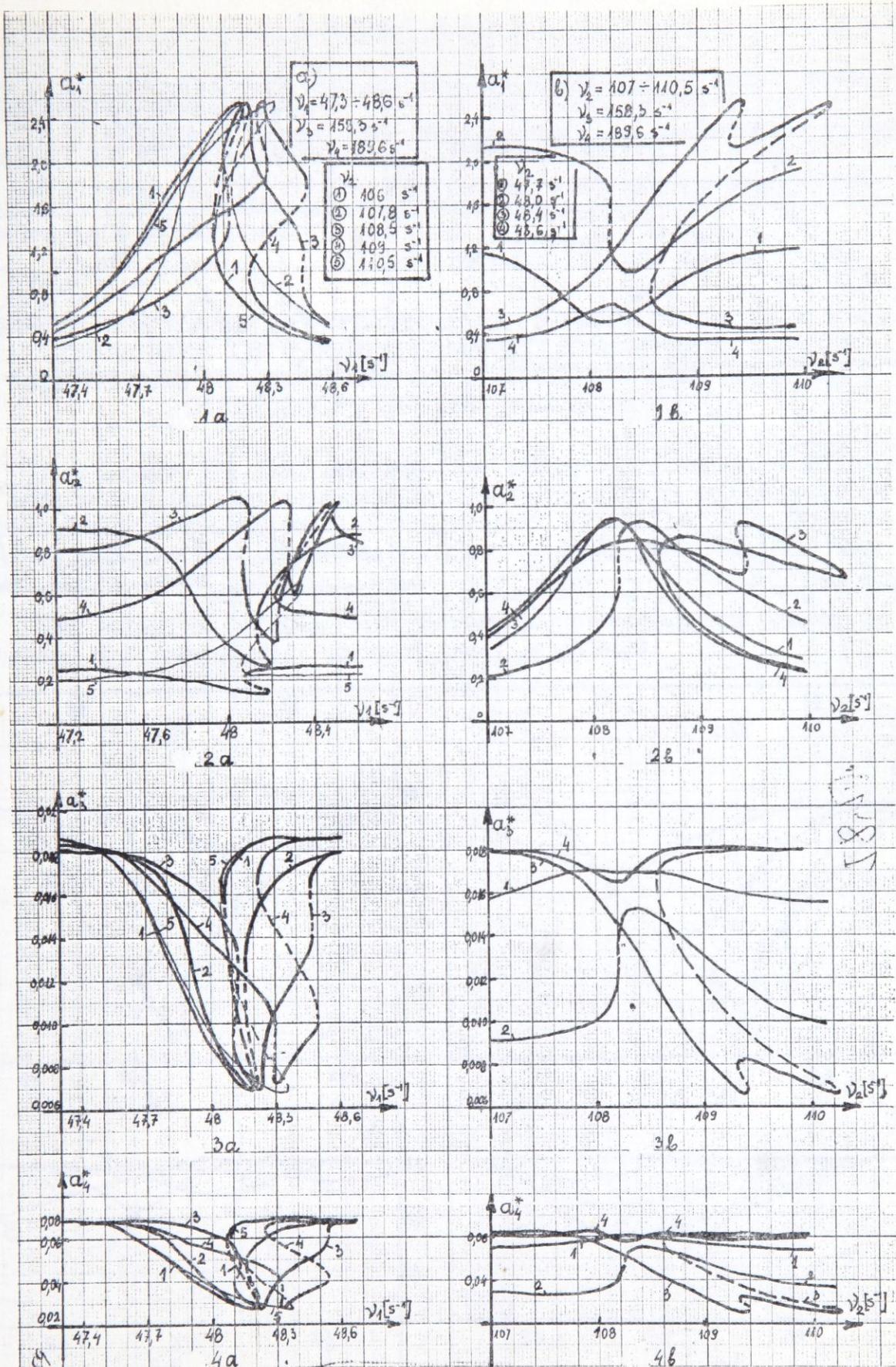


Рис. 1, 2, 3 и 4

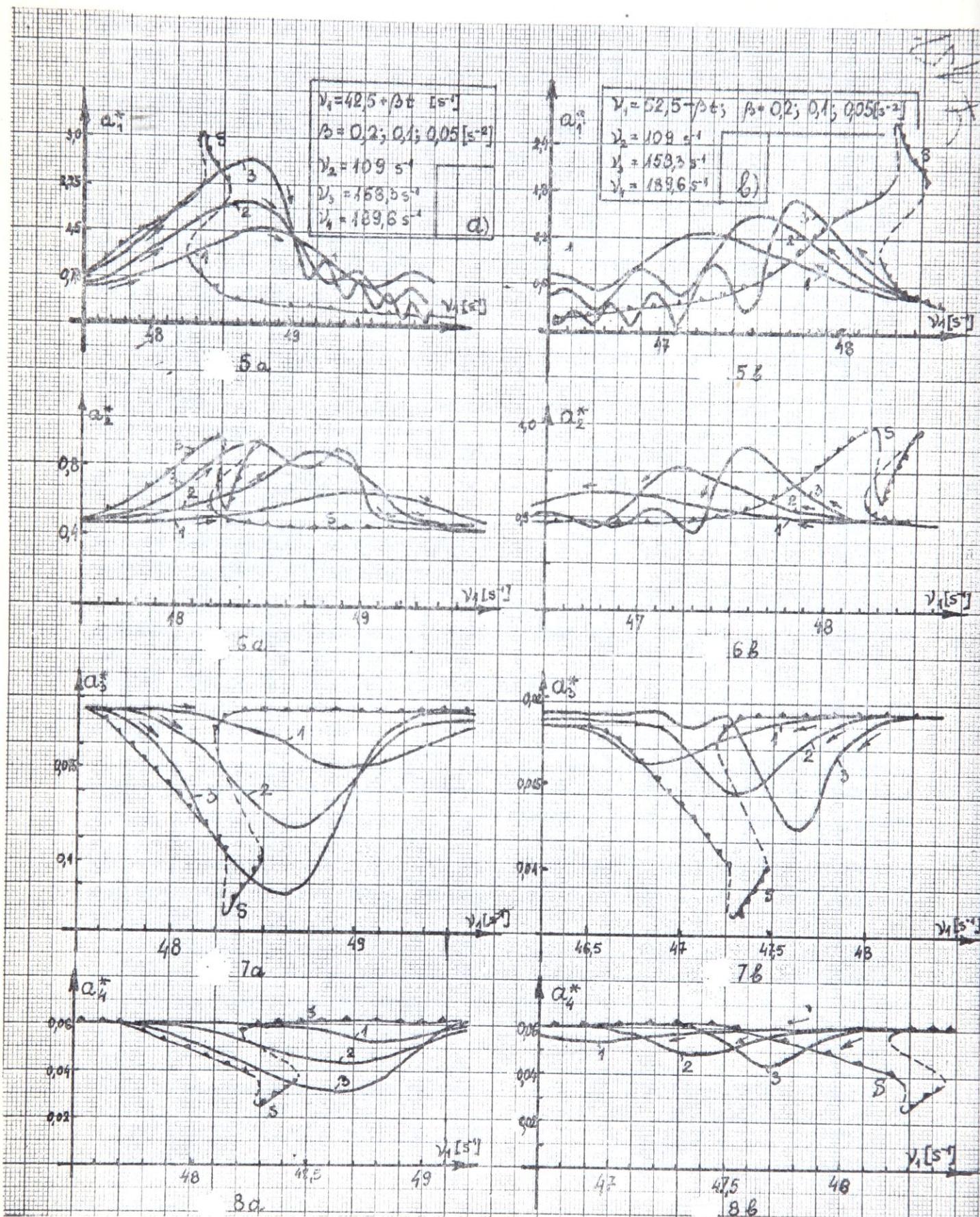


Рис. 5, 6, 7 и 8

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Митропольский Ю. А., *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Москва (1964).

[2] Стеванович Хедрих, К., *Двух-частотные нестационарные вынужденные колебания, балки*, Математическая физика, вып. 12, (1972).

[3] Hedrih K., Kozić P., Pavlović, R., *O uzajamnom uticaju harmonika u nelinearnim sistemima s malim parametrom*, Zbornik radova Matematičkog instituta, Nova serija knj. 4 (12) Beograd (1983).

A STATIONARY AND NONSTATIONARY R-FREQUENCY ANALYSIS
OF VIBRATIONS OF THE SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER
OF DEGREES OF FREEDOM OF VIBRATIONS AND MUTUAL
INFLUENCES OF THE HARMONICS

In this paper the first approximation solutions and system of differential equations of the first approximations for the amplitudes and phases of the four-frequency regime vibrations of the crankshaft with a five disks under conditions a stationary and nonstationary regime nonlinear vibrations, was composed.

The numerical example, with various amplitude-frequency curves for stationary and nonstationary resonant states, is enclosed.

STACIONARNA I NASTACIONARNA R-FREKVENTNA ANALIZA OSCILACIJA SISTEMA SA KONAČNIM BROJEM STEPENI SLOBODE OSCILOVANJA I UZAJAMNI UTICAJ HARMONIKA

U radu su sastavljene prve asimptomske aproksimacije rešenja i sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitude i faze četiri-frekventnog režima oscilovanja kolenastog vratila sa pet diskova u uslovima stacionarnog i nestacionarnog režima nelinearnih oscilacija. Priložen je i numerički primer u kome je variranjem frekvencija prirudnih momenata dobijeno više numeričkih rezultata pomoću kojih su sastavljene familije amplitudno-frekventnih kri-
vih za stacionarna i nestacionarna rezonantna stanja.

Др Катица Хедрих, проф,
18000 Ниш,
ул. Војводе Танкосића 3/22

Мр Предраг Козић, асист,
18000 Ниш,
ул. Станка Пауновића 43/2

Мр Ратко Павловић, асист,
18000 Ниш,
ул. Враче Тасковића 79/16

Југославија — Машински факултет
18000 Ниш